5a edición

matemáticas financieras

Alfredo Díaz Mata
Víctor Manuel Aguilera

Mc Graw Hill Education

Matemáticas financieras

Matemáticas financieras

Quinta edición

Alfredo Díaz Mata
Facultad de Contaduría y Administración
Universidad Nacional Autónoma de México

Víctor Manuel Aguilera Gómez
Universidad Iberoamericana
Universidad Nacional Autónoma de México

Mc Graw Hill Education

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SAO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director General México: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Jesús Mares Chacón
Coordinadora editorial: Marcela Rocha Martínez
Editora de desarrollo: Karen Estrada Arriaga
Supervisor de producción: Zeferino García García

MATEMÁTICAS FINANCIERAS
Quinta edición

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Pisos 16 y 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-0943-7
ISBN: 978-970-10-5920-3 (de la edición anterior)

1234567890 2456789013

Impreso en México *Printed in Mexico*

Contenido

Acerca de los autores

El doctor **Alfredo Díaz Mata** ha sido profesor de matemáticas en la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) durante los últimos 35 años. Tiene estudios de licenciatura en administración, además de una especialización en estadística aplicada y una maestría y un doctorado en ciencias de la administración, todos ellos por la UNAM. Se desempeña también como investigador en la División de Investigación de la Facultad de Contaduría y Administración desde hace 17 años.

Ha traducido más de 30 textos del inglés al español sobre temas de matemáticas, administración y finanzas, y es autor o coautor de una decena de libros, entre los que destacan *Estadística aplicada a la administración y la economía*, *Introducción al mercado bursátil. Invierta en la bolsa de valores* y *Matemáticas financieras*, el cual se publicó por primera vez hace 25 años y ya va en su quinta edición. Estos tres textos han sido publicados por la editorial McGraw-Hill/Interamericana.

Su experiencia laboral incluye el diseño y análisis de estudios de mercado en Procter & Gamble de México y la administración de sueldos y salarios en American Express México.

Víctor Manuel Aguilera Gómez es licenciado en contaduría con especialización en finanzas por la UNAM y es licenciado en administración de empresas con especialización en mercadotecnia por la Universidad Iberoamericana (UIA). Cursó estudios de posgrado en comercio internacional en la Universidad de París I (Panthéon-Sorbonne) y obtuvo el diploma en alta dirección de empresas por el Instituto Panamericano de Alta Dirección de Empresas (IPADE).

Tiene amplia experiencia en la docencia pues ha impartido cursos de matemáticas básicas, matemáticas financieras, estadística, finanzas, mercadotecnia y dirección, entre otros, a nivel de licenciatura, diplomado y maestría en diversas universidades del país, entre las que destacan la misma UNAM, donde fue profesor titular por concurso de oposición de las materias de matemáticas básicas y matemáticas financieras, la UIA (campus Ciudad de México y Saltillo), la Universidad de Colima, la Universidad de Guanajuato, la Universidad Autónoma de Coahuila, la Universidad Regiomontana y el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM) (campus Saltillo).

En el campo profesional ha adquirido experiencia principalmente como consultor de empresas y como especialista de concursos mercantiles (quiebras y suspensiones de pagos), lo que le ha dado la posibilidad de trabajar con todo tipo de empresas, desde micro y pequeñas, hasta grandes corporaciones.

Prefacio

Las matemáticas financieras se aplican en la vida cotidiana de las personas y las empresas por lo que resulta necesaria su cabal comprensión pues, además de ser de gran utilidad, con ellas se cometen errores que repercuten directamente en donde más nos duele, esto es, en el bolsillo. La lectura del presente texto y la solución de los problemas que en él se presentan permitirán al lector adquirir los conocimientos necesarios para comprender las implicaciones que tienen las variaciones del valor del dinero en el tiempo.

Al igual que las cuatro ediciones anteriores, esta quinta edición de *Matemáticas financieras* tiene como propósito primordial presentar las herramientas matemáticas necesarias para evaluar la equivalencia del valor del dinero en diferentes periodos y circunstancias de la manera más sencilla posible, es decir, abordando los temas con la menor complejidad posible.

Con ejemplos didácticos, se lleva al lector paso a paso a la solución de problemas prácticos que se presentan tanto en la vida personal como en la vida de los negocios. Los problemas están pensados para que sean resueltos de forma manual o con ayuda de una calculadora electrónica ya que esto permite que se comprendan cabalmente las circunstancias y la forma de resolver casos reales. Una vez que se logra esta comprensión, se revisa la utilización de la hoja de cálculo electrónica Excel® de Microsoft®, incluyendo sus funciones financieras, lo cual permite, por un lado, ejercitar la resolución de ejemplos financieros en forma rápida y, en segundo lugar, verificar que los cálculos realizados manualmente sean correctos. Sin embargo, es necesario recalcar la necesidad de tener una clara comprensión del planteamiento de los problemas y de la lógica para su solución antes de recurrir a la hoja de cálculo, pues con la misma velocidad con que se puede obtener la solución correcta a cálculos complejos, se pueden cometer errores garrafales, provocados por un mal planteamiento o una pobre comprensión de la lógica de los problemas financieros.

En lo esencial, se han mantenido sin cambios los temas que aborda el texto, precisando únicamente algunos detalles sugeridos por profesores y estudiantes que lo han utilizado. La estructura básica se mantuvo como sigue:

- Introducción y conceptos básicos (capítulo 1)
- Interés simple e interés compuesto (capítulos 2 y 3)
- Anualidades (capítulos 4 a 7 y 12)
- Amortización y tablas de amortización (capítulo 8)
- Depreciación (capítulo 10)
- Inversión en bolsa de valores (capítulo 9)
- Probabilidad y tablas de mortalidad (capítulo 11), que es la base del capítulo 12 en el cual se tratan las anualidades contingentes. Aquí, se modificó la tabla de mortalidad de la población mexicana dividida por sexos, en hombres y mujeres, adaptada ahora de la tabla "México: tabla de vida por sexo y edad desplegada, 2010", de Alejandro Mina Valdés de El Colegio de México, incluida en el artículo "La obtención y proyección de tablas de mortalidad empleando curvas spline" de la X Reunión Nacional de Investigación Demográfica en México, México, D.F., 3-6 de noviembre de 2010.

En esta edición se revisaron todos los problemas y ejercicios, y se modificaron numerosas cantidades y tasas de interés para adecuarlas a las circunstancias que prevalecen en los mercados financieros.

Por otra parte, se conservaron las principales características de la edición anterior y se actualizaron las secciones de aplicaciones que incluyen algunos capítulos. No todos ellos contienen aplicaciones porque en algunos no es pertinente (el de introducción es uno de ellos) y en otros hubiera resultado redundante (como en el de anualidades diferidas o como el capítulo 9 sobre inversiones bursátiles que está compuesto, prácticamente en su totalidad, de aplicaciones).

Además, se actualizaron las secciones de "Uso de Excel®" de todos los capítulos por, al menos, dos razones importantes: el uso de computadoras es ya una labor cotidiana tanto en el ámbito laboral como en la escuela y en el hogar, y Excel® de Microsoft es una herramienta muy útil y ampliamente difundida. Por otra parte, y tal como puede apreciarse en estas secciones, el uso de Excel® permite importantes ahorros de tiempo y esfuerzo. Los ejemplos abundan, pero uno notable es en el cálculo de tasas en aplicaciones de anualidades, en el cual se utilizó la versión 2010 de Excel.

Las secciones con Excel® están referidas casi en su totalidad a los ejemplos que ya se resolvieron en el texto, donde se presentan los conceptos y los procedimientos de cálculo por lo que es fácil comparar la resolución de los abundantes ejemplos en forma manual (es decir, con calculadora electrónica) y utilizando este popular software.

También se actualizaron las secciones "Matemáticas en internet" que aparecen al final de cada capítulo, en la cual se proporcionan direcciones de sitios de internet en los que se puede encontrar material adicional sobre los temas abordados que consideramos resultan de particular utilidad para los lectores. Cabe mencionar que en esta sección se redujo el número de sugerencias porque se detectó que habían cambiado o desaparecido las que se incluyeron en la edición anterior. Es muy fácil encontrar material adicional mediante sencillas búsquedas en Google o Yahoo!

Por último, se conserva la introducción a las anualidades crecientes, pues es un tema que cobra especial interés en el marco de la reforma de los sistemas de pensiones, en virtud de la necesidad de crear fondos de jubilación que puedan ayudar a tener un retiro digno.

Agradecimientos

Para la realización de este libro hemos contado con la colaboración de un gran número de personas y a todas ellas les expresamos nuestro agradecimiento; mencionamos en forma especial al ingeniero Jesús Valdez Cook, catedrático del ITESM Campus Saltillo, del Instituto Tecnológico de Saltillo y de la Universidad Autónoma de Coahuila, por sus valiosas observaciones y sugerencias; a los catedráticos del ITESM Campus Saltillo; a la licenciada Victoria Valdés Dávila, directora de la licenciatura en administración de empresas; al contador público Daniel Lozano Casas, director de la carrera de contador público; a la contadora pública Silvia Dávila Valdés, directora de la División de Administración y Ciencias Sociales y al ingeniero Mario Luis Cruz Vargas, catedrático de la Universidad Autónoma de Nuevo León, pues realizó una revisión minuciosa del material previo a esta edición.

También deseamos extender un amplio reconocimiento a los numerosos profesores y estudiantes de la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Nacional Autónoma de México, a quienes damos las gracias por sus valiosos comentarios y sugerencias que han ayudado a mejorar las diferentes versiones de este texto, en especial al licenciado en administración Jorge Armando Arroyo Domínguez.

Vaya también nuestro agradecimiento a las señoritas Ana Luisa Mendoza Luna y Blanca Yessenia Castillo Juárez quienes colaboraron con la mecanografía e integración del material.

Finalmente, pero no menos importante, agradecemos a todo el personal de McGraw-Hill Interamericana de México, en especial a Karen Estrada Arriaga, a Marcela Rocha Martínez y a Jesús Mares Chacón por hacer posible la publicación de este libro.

CAPÍTULO 1

Fundamentos

TEMARIO

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

- Explicar qué son los exponentes, los logaritmos y los antilogaritmos
- Plantear y resolver problemas que impliquen su uso
- Explicar qué es una progresión aritmética y qué es una progresión geométrica
- Plantear y resolver problemas que involucren progresiones
- Resolver ejercicios de exponentes, logaritmos y progresiones mediante el empleo de la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®

1.1 Exponentes

1.1.1 Exponentes enteros positivos

El producto de un número real que se multiplica por sí mismo se denota $a \times a$ o aa. Si el mismo número vuelve a multiplicarse por sí mismo se denota $a \times a \times a$ o aaa. Para simplificar este tipo de expresiones se acostumbra utilizar una notación abreviada tal que:

$$a \times a = a^2$$
$$a \times a \times a = a^3$$
$$a \times a \times a \times a \times a = a^5$$

en la que al símbolo a se le llama *base* y al número escrito arriba y a la derecha del mismo se le denomina *exponente*. Este último indica el número de veces que la base a se toma como *factor*.

Por lo tanto, podemos decir que si n es un entero positivo y a es cualquier número real,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots a}_{n \text{ factores}}$$

El término a^n se expresa como "a elevado a la n-ésima potencia", donde a es la base y n es el exponente o potencia.

EJEMPLO 1.1.1

a) $a \times a \times a \times a = a^4$
b) $b \times b \times b = b^3$
c) $a \times a \times a \times b \times b = a^3b^2$
d) $(-4)(-4)(-4)(-4) = (-4)^4 = 256$
e) $(-2)(-2)(-2)(6)(6)(6) = (-2)^3(6)^3 = -1\,728$
f) $(1 + 0.05)(1 + 0.05)(1 + 0.05)(1 + 0.05) = (1 + 0.05)^4 = 1.21550625$
g) $(1 + i)(1 + i)(1 + i) = (1 + i)^3$
h) $(1 - d)(1 - d) \cdots (1 - d) = (1 - d)^n$

1.2 Leyes de los exponentes

Si a y b son números reales distintos de cero, y m y n son enteros positivos, entonces se pueden aplicar las siguientes leyes de los exponentes.

1.2.1 Producto de dos potencias de la misma base

Para encontrar el producto de dos potencias de la misma base, se debe elevar la base a una potencia igual a la suma de los exponentes.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \tag{1.1}$$

EJEMPLO 1.2.1

a) $a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$
b) $a^4 \times a^2 = a^{4+2} = a^6$
c) $2^3 \times 2^3 = 2^{3+3} = 2^6 = 64$
d) $(-2)^2 \times (-2)^3 = (-2)^{2+3} = (-2)^5 = -32$
e) $(5)(5)^2(5)^3 = 5^{1+2+3} = 5^6 = 15\,625$
f) $(1 + i)^2(1 + i)^{15} = (1 + i)^{2+15} = (1 + i)^{17}$

1.2.2 Cociente de dos potencias de la misma base

Para encontrar el cociente de dos potencias de la misma base es necesario elevar la base a una potencia igual al exponente del numerador menos el exponente del denominador.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{1.2}$$

EJEMPLO 1.2.2

a) $\dfrac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$

b) $\dfrac{x^{10}}{x^4} = x^{10-4} = x^6$

c) $\dfrac{y^2}{y^5} = y^{2-5} = y^{-3}$

d) $\dfrac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$

e) $\dfrac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = 2^{-1} = 0.5$

1.2.3 Potencia de una potencia

Para elevar la m-ésima potencia de a a la n-ésima potencia se debe elevar la base a a una potencia igual al producto de los dos exponentes.

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{1.3}$$

EJEMPLO 1.2.3

a) $(a^2)^3 = a^{2\times 3} = a^6$

b) $(x^3)^5 = x^{3\times 5} = x^{15}$

c) $(2^3)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12} = 4\,096$

d) $(-3^2)^3 = -3^{2\times 3} = -3^6 = 729$

e) $(-1^3)^3 = -1^{3\times 3} = -1^9 = -1$

1.2.4 Potencia del producto de dos factores

Para determinar la n-ésima potencia del producto de dos factores, se debe encontrar el producto de cada factor elevado a la n-ésima potencia.

$$(ab)^n = a^n b^n \tag{1.4}$$

EJEMPLO 1.2.4

a) $(ab)^2 = a^2b^2$

b) $(xy)^3 = x^3y^3$

c) $(3x)^4 = 3^4x^4 = 81x^4$

d) $(3x^2)^3 = 3^3x^{2\times 3} = 27x^6$

e) $(2\times 5)^2 = 2^2\times 5^2 = 4\times 25 = 100$

1.2.5 Potencia del cociente de dos factores

Para determinar la n-ésima potencia del cociente de dos factores, es necesario encontrar el cociente de cada factor elevado a la n-ésima potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{1.5}$$

EJEMPLO 1.2.5

a) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$

b) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^4 = \dfrac{x^4}{y^4}$

c) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{8}{125}$

d) $\left(\dfrac{2a^2}{b}\right)^3 = \dfrac{2^3a^{2\times 3}}{b^3} = \dfrac{8a^6}{b^3}$

EJEMPLO 1.2.6

a) $b^3 \times b^4 = b^{3+4} = b^7$

b) $x^2 \times x^6 = x^{2+6} = x^8$

c) $\dfrac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$

d) $\dfrac{y^{15}}{y^{10}} = y^{15-10} = y^5$

e) $\dfrac{x^3y^2}{x^2y} = x^{3-2} \times y^{2-1} = xy$

f) $\dfrac{(1+i)^5}{(1+i)^2} = (1+i)^{5-2} = (1+i)^3$

g) $(x^4)^5 = x^{4\times 5} = x^{20}$

h) $(y^2)^6 = y^{2\times 6} = y^{12}$

i) $(2a^3)^4 = 2^4a^{3\times 4} = 16a^{12}$

j) $\left(\dfrac{x^3}{y^2}\right)^2 = \dfrac{x^{3\times 2}}{y^{2\times 2}} = \dfrac{x^6}{y^4}$

k) $\dfrac{2x^2y^3}{xy} = 2 \times x^{2-1} \times y^{3-1} = 2xy^2$

l) $\dfrac{(2xy)^3}{(xy)^2} = \dfrac{2^3x^3y^3}{x^2y^2} = 2^3 \times x^{3-2} \times y^{3-2} = 8xy$

1.3 Exponente cero, negativo y fraccionario

1.3.1 Exponente cero

Si a es un número real diferente de cero, $a^0 = 1$. Esta aseveración puede demostrarse aplicando la regla del cociente de dos potencias de la misma base. Considere el siguiente cociente:

$$\frac{a^m}{a^m} = 1$$

puesto que todo número dividido entre sí mismo es igual a la unidad. Ahora, si se aplica la regla del cociente de dos potencias, se tiene:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

EJEMPLO 1.3.1

a) $(5)^0 = 1$

b) $(3a)^0 = 1$

c) $-4x^0 = -4(1) = -4$ si $x \neq 0$

d) $0^0 =$ No es aplicable.

1.3.2 Exponente negativo

Si n es un entero positivo y $a \neq 0$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (1.6)$$

Para comprobar (1.6), observe que, como antes se expuso: $\dfrac{y^2}{y^5} = y^{2-5} = y^{-3}$

y, también:
$$\frac{y^2}{y^5} = \frac{y \times y}{y \times y \times y \times y \times y} = \frac{1}{y^3}$$

Por lo tanto,
$$\frac{y^2}{y^5} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$$

Numéricamente, esta relación puede demostrarse utilizando el siguiente ejemplo:

$$\frac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = 2^{-1}$$

$$\frac{2^3}{2^4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Así,

$$\frac{2^3}{2^4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 1.3.2

a) $\dfrac{3^3}{3^5} = 3^{3-5} = 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

b) $\dfrac{m^4}{m^7} = m^{4-7} = m^{-3} = \dfrac{1}{m^3}$

c) $\dfrac{(1+i)^2}{(1+i)^5} = (1+i)^{2-5} = (1+i)^{-3} = \dfrac{1}{(1+i)^3}$

1.3.3 Exponentes fraccionarios

Sea a la base de una potencia, y m/n el exponente al cual se encuentra elevada dicha base, entonces:

$$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \tag{1.7}$$

EJEMPLO 1.3.3

a) $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$

b) $x^{1/2} = \sqrt{x}$

c) $y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$

d) $(64)^{2/3} = \sqrt[3]{64^2} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = (4)^2 = 16$

e) $(27)^{-1/3} = \dfrac{1}{(27)^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{1}{3}$

f) $\left(\dfrac{a^2}{a^3}\right)^{1/2} = (a^{2-3})^{1/2} = (a^{-1})^{1/2} = a^{-1(1/2)} = a^{-1/2} = \dfrac{1}{a^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

g) $\dfrac{x^{5/2}}{x^{1/2}} = x^{5/2-1/2} = x^{4/2} = x^2$

h) $(y^{1/2})^{2/3} = y^{1/2\times 2/3} = y^{2/6} = y^{1/3} = \sqrt[3]{y}$

El uso de calculadoras electrónicas ha simplificado la resolución de problemas aritméticos complejos. En la concepción y manejo de este libro se considera que el estudiante dispone de una calculadora que posee la función y^x que permite obtener logaritmos y antilogaritmos, ya sean naturales o de base 10.

EJEMPLO 1.3.4

Resuelva las siguientes operaciones con el auxilio de una calculadora electrónica.

a) $\sqrt{15} = 15^{1/2} = 3.87298335$

b) $\sqrt[5]{120} = 120^{1/5} = 2.60517109$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{125.846 \times (0.357)^2}{(15.6)^4(0.674650)^5}} = \left(\dfrac{125.846 \times 0.127449}{(59\,224.0896)(0.13976313)}\right)^{1/3} = \left(\dfrac{16.03894685}{8\,277.344134}\right)^{1/3} = 0.12466990$

d) $5\,000(1+0.05)^{12} = 5\,000(1.79585633) = 8\,979.281632$

e) $1\,000\,000\dfrac{1}{(1+0.60)^5} = 1\,000\,000(1.60)^{-5} = 1\,000\,000(0.09536743) = 95\,367.43164$

f) $\dfrac{(1+0.15)^{20}-1}{0.15} = \dfrac{16.36653739-1}{0.15} = 102.4435826$

g) $\dfrac{1-(1+0.325)^{-10}}{0.325} = \dfrac{1-0.05995718}{0.325} = 2.89243944$

EJEMPLO 1.3.5

Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando las leyes de los exponentes con auxilio de una calculadora electrónica.*

a)
$$150(1+i)^{24} = 450$$
$$(1+i)^{24} = \frac{450}{150}$$
$$(1+i)^{24} = 3$$
$$1+i = \sqrt[24]{3} = 3^{1/24}$$
$$i = 3^{1/24} - 1$$
$$i = 0.04683938$$

b)
$$2(1+i)^{-4} = 1$$
$$(1+i)^{-4} = \frac{1}{2}$$
$$(1+i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/4}$$
$$i = (0.5)^{-1/4} - 1$$
$$i = 0.18920712$$

c)
$$5\,000(1-d)^{-4} = 1\,000$$
$$(1-d)^{-4} = \frac{1\,000}{5\,000}$$
$$1-d = (0.20)^{-1/4}$$
$$-d = (1.49534878) - 1$$
$$d = -0.49534878$$

d)
$$(1+i)^{12} = (1+0.15)^4$$
$$(1+i) = (1.15)^{4/12}$$
$$i = (1.15)^{1/3} - 1$$
$$i = 0.04768955$$

Ejercicios de las secciones 1.1 a 1.3

1. Simplifique:

a) $a^2 \times a^5$ *c*) $a^2 \times a^4 \times a^5$ *e*) $(3b) \times (5b^2) \times (6b^3)$

b) $a^3 \times a^8$ *d*) $b \times b^3 \times b^2$ *f*) $\dfrac{c^3}{c^8}$

* Cuando utilice la calculadora electrónica debe revisar el manual. En ocasiones le será necesario emplear el inverso del número.

g) $\dfrac{c^8}{c^3}$

h) $\dfrac{a^3 \times a^4}{a^5}$

i) $(x^3)^4$

j) $x^2 \times (x^5)^3$

k) $\dfrac{(2y)^2 \times (4y^3)^4}{(2y)^7}$

l) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^3$

m) $(a^2b^3)^4$

n) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^4$

o) $\left(\dfrac{x^2 \times x^3}{y \times y^4}\right)^3$

p) $\left(\dfrac{3x^2y^3}{2z^2}\right)^4$

q) $(1.05)^4(1.05)^{10}$

r) $\dfrac{(1.30)^2(1.30)^{10}(1.30)^{20}}{1.30}$

2. Simplifique:

a) x^0

b) a^0b^3

c) $a^{1/3} \times a^{1/2}$

d) $\dfrac{b^{3/2}}{b^{1/2}}$

e) $\dfrac{a^{1/4}a^{3/5}}{a^{1/2}}$

f) $(a^{-2})(a^{-3})$

g) $(b^{-2})^5$

h) $(9x^{-2})^{-5}$

i) $(y^{1/2})^{-3}$

j) $(a^{-2/3})^{-3}$

k) $\dfrac{(x^{2/3})^3}{x^{-2}}$

l) $(27^{-1/3})(256)^{-1/4}$

m) $(1.05)^{-4}(1.05)^{-1/2}$

n) $\left(\dfrac{a^{-3}}{b^{-6}}\right)^{-1/4}$

3. Simplifique, usando exponentes:

a) $\sqrt{x^3}$

b) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)\left(\sqrt{x^3}\right)$

c) $\dfrac{b^2 \times \sqrt{b}}{\sqrt{b^3}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{c^2}\sqrt{c^5}}{\sqrt[3]{c^6}}$

e) $\left(\dfrac{\sqrt{a^4}}{(ab^3)^{-2}}\right)^{-2}$

f) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{3/2}$

4. Resuelva las siguientes operaciones utilizando una calculadora electrónica:

a) $\sqrt{32}$

b) $\sqrt[3]{25^5}$

c) $\sqrt[4]{0.485}\ \sqrt[3]{0.36}$

d) $\dfrac{27\sqrt[3]{97}}{\sqrt[4]{38}}$

e) $\dfrac{(1+0.18)^4-1}{0.18}$

f) $8\,500(1+0.15)^{-4}$

g) $\dfrac{1-(1+0.60)^{-5}}{0.60}$

h) $(1.25)^{-1}\ \sqrt[3]{(1.30)^2}$

i) $\sqrt{0.25}\ \sqrt[3]{0.64}\ \sqrt[4]{0.82}$

j) $\sqrt{\dfrac{(128.35)^2}{(25.12)^{-1/3}}}$

5. Resuelva las siguientes operaciones utilizando una calculadora electrónica.

a) $100(1+i)^2 = 200$

b) $5\,000(1+i)^3 = 1\,500$

c) $1\,250(1+i)^{60} = 25\,000$

d) $50\,000(1+i)^{-20} = 3\,000$

e) $10\,000(1+i)^{-4} = 6\,000$

f) $(1+i)^4 = 1.60$

g) $(1+i)^{1/4} = 1.18$

h) $(1+i)^{10} - 1 = 50$

i) $(1+i)^4 = (1+0.05)^{12}$

j) $(1+i)^{12} = (1+0.30)^2$

1.4 Logaritmos

1.4.1 Definición

Sea N un número positivo y b un número positivo diferente de 1; entonces, el *logaritmo* en base b del número N es el exponente L de la base b tal que $b^L = N$. El enunciado de que L es el logaritmo en base b del número N se escribe como

$$L = \log_b N$$

EJEMPLO 1.4.1

$3 = \log_2 8$	ya que	$2^3 = 8$
$4 = \log_3 81$	ya que	$3^4 = 81$
$2 = \log_5 25$	ya que	$5^2 = 25$

En la práctica común se utilizan dos tipos de logaritmos: los *naturales*, cuya base es el número $e = 2.718281829\ldots$, y los logaritmos *comunes*, cuya base es $b = 10$. Ambos se pueden determinar fácilmente con ayuda de una calculadora electrónica o mediante tablas.

En seguida se mostrará la utilización de los logaritmos base 10 para simplificar cálculos complejos. Las leyes y procedimientos generales que aquí se tratarán también se pueden aplicar a los logaritmos naturales, por lo que ambos pueden ser utilizados en forma indistinta.

Los logaritmos base 10 se denominan *logaritmos comunes* y para identificarlos se utiliza el símbolo

$$L = \log_{10} N = \log N.$$

Los logaritmos naturales (base e) se simbolizan como sigue:

$$l_n = \log \text{nat } N = \log_e N = \ln$$

En lo sucesivo, la palabra “logaritmos” se referirá a los logaritmos comunes (base 10). Por definición, se tiene:

$\log 1\,000 = 3$	ya que	$10^3 = 1\,000$
$\log 100 = 2$	ya que	$10^2 = 100$
$\log 10 = 1$	ya que	$10^1 = 10$
$\log 1 = 0$	ya que	$10^0 = 1$
$\log 0.10 = -1$	ya que	$10^{-1} = 0.10$
$\log 0.010 = -2$	ya que	$10^{-2} = 0.010$
$\log 0.0010 = -3$	ya que	$10^{-3} = 0.0010$

Es necesario destacar que N debe ser un número positivo, en tanto que el $\log N$ puede ser cualquier número real positivo, negativo o cero.

1.4.2 Leyes de los logaritmos

Dado que *los logaritmos son exponentes* de base *b*, *las leyes de éstos les son aplicables* y nos dan como consecuencia tres leyes fundamentales de los logaritmos.[1]

[1] Para demostrar estas leyes, considere que: $A = 10^a$, $B = 10^b$ y $C = 10^c$
Por lo tanto, $\log A = a$, $\log B = b$ y $\log C = c$.

De esto se sigue que $A \times B \times C = 10^a \times 10^b \times 10^c = 10^{a+b+c}$.

$$\frac{A}{B} = \frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$$

$$A^n = (10^a)^n = 10^{an}$$

Con lo que se comprueba que

$$\log (A \times B \times C) = a + b + c = \log A + \log B + \log C$$

$$\log \frac{A}{B} = a - b = \log A - \log B$$

$$\log A^n = na = n \log A$$

1. El logaritmo del producto de dos números positivos es igual a la suma de los logaritmos de los números

$$\log(A \times B) = \log A + \log B \qquad \textbf{(1.8)}$$

2. El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B \qquad \textbf{(1.9)}$$

3. El logaritmo de un número elevado a la potencia n es n veces el logaritmo del número.

$$\log A^n = n \log A \qquad \textbf{(1.10)}$$

donde n puede ser cualquier número real.

EJEMPLO 1.4.2

Mediante el empleo de una calculadora electrónica o tablas se determina que:

$\log 2 = 0.301030$ $\qquad$ $\log 3 = 0.477121$; entonces:

a) $\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = 0.301030 + 0.477121 = 0.778151$
b) $\log 1.5 = \log 3/2 = \log 3 - \log 2 = 0.477121 - 0.301030 = 0.176091$
c) $\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3 = 2(0.477121) = 0.954242$
d) $\log 30 = \log(3 \times 10) = \log 3 + \log 10 = 0.477121 + 1 = 1.477121$
e) $\log 0.02 = \log(2 \times 10^{-2}) = \log 2 + \log 10^{-2} = 0.301030 + (-2) = -1.698970$
f) $\log \sqrt[2]{3} = \log 3^{1/2} = 1/2 \log 3 = 1/2(0.477121) = 0.238561$

1.4.3 Característica y mantisa

Todo número positivo puede ser escrito en la forma de un número básico B tal que $(1 < B < 10)$ multiplicado por una potencia entera de 10. Por ejemplo:

$$4\,354 = 4.354 \times 10^3$$
$$65 = 6.5 \times 10^1$$
$$3.2 = 3.2 \times 10^0$$
$$0.25 = 2.5 \times 10^{-1}$$
$$0.078 = 7.8 \times 10^{-2}$$
$$0.00358 = 3.58 \times 10^{-3}$$

Para calcular el logaritmo de un número de éstos se procede como sigue:

Si $\qquad N = 4\,354 = 4.354 \times 10^3$

$$\log(4.354 \times 10^3) = \log 4.354 + \log 10^3 = 0.638888 + 3$$

Si $\qquad N = 0.00358 = 3.58 \times 10^{-3}$

$$\log(3.58 \times 10^{-3}) = \log 3.58 + \log 10^{-3} = 0.553883 - 3$$

EJEMPLO 1.4.3

Determine el número básico de los siguientes números:

a) 20 000 $\quad$ *d*) 20 $\quad$ *g*) 0.02 $\quad$ *i*) 0.0002
b) 2 000 $\quad$ *e*) 2 $\quad$ *h*) 0.002 $\quad$ *j*) 0.00002
c) 200 $\quad$ *f*) 0.2

SOLUCIÓN:

Puesto que el número básico es un número B tal que $1 < B < 10$ multiplicado por una potencia entera de 10, se tiene:

a) $20\,000 = 2 \times 10^4$
b) $2\,000 = 2 \times 10^3$
c) $200 = 2 \times 10^2$
d) $20 = 2 \times 10^1$
e) $2 = 2 \times 10^0$
f) $0.2 = 2 \times 10^{-1}$
g) $0.02 = 2 \times 10^{-2}$
h) $0.002 = 2 \times 10^{-3}$
i) $0.0002 = 2 \times 10^{-4}$
j) $0.00002 = 2 \times 10^{-5}$

EJEMPLO 1.4.4

Dado $\log 2 = 0.301030$, determine el logaritmo de los números del ejemplo anterior:

SOLUCIÓN:

Puesto que $\log 2 = 0.301030$ se tiene:

a) $\log 20\,000 = \log(2\times 10^4) = \log 2 + \log 10^4 = 0.301030 + 4 = 4.301030$
b) $\log 2\,000 = \log(2\times 10^3) = \log 2 + \log 10^3 = 0.301030 + 3 = 3.301030$
c) $\log 200 = \log(2\times 10^2) = \log 2 + \log 10^2 = 0.301030 + 2 = 2.301030$
d) $\log 20 = \log(2\times 10^1) = \log 2 + \log 10^1 = 0.301030 + 1 = 1.301030$
e) $\log 2 = \log(2\times 10^0) = \log 2 + \log 10^0 = 0.301030 + 0 = 0.301030$
f) $\log 0.2 = \log(2\times 10^{-1}) = \log 2 + \log 10^{-1} = 0.301030 + \overline{1} = \overline{1}.301030$
g) $\log 0.02 = \log(2\times 10^{-2}) = \log 2 + \log 10^{-2} = 0.301030 + \overline{2} = \overline{2}.301030$
h) $\log 0.002 = \log(2\times 10^{-3}) = \log 2 + \log 10^{-3} = 0.301030 + \overline{3} = \overline{3}.301030$
i) $\log 0.0002 = \log(2\times 10^{-4}) = \log 2 + \log 10^{-4} = 0.301030 + \overline{4} = \overline{4}.301030$
j) $\log 0.00002 = \log(2\times 10^{-5}) = \log 2 + \log 10^{-5} = 0.301030 + \overline{5} = \overline{5}.301030$

Como puede observarse en el ejemplo anterior, el logaritmo de un número básico es una fracción decimal no negativa (ya que $\log 10 = 1$ y $\log 1 = 0$) y el logaritmo de una potencia entera de 10 es, por definición, un entero. Por lo tanto, el logaritmo de un número positivo estará constituido por dos partes:

a) Una parte entera llamada *característica*. La característica es el logaritmo de la potencia entera de 10 y está determinada por la posición del punto decimal en el número. La característica puede ser cualquier número entero, positivo, negativo o cero. Para $N > 1$, la característica es igual al número de dígitos a la izquierda del punto decimal menos una unidad. [Véanse los casos de *a*) a *e*) del ejemplo anterior.] Para $0 < N < 1$, la característica se determina por el lugar que ocupa la primera cifra significativa a la derecha del punto decimal. [Véanse los casos *f*) a *j*) del ejemplo anterior].

b) Una parte decimal llamada *mantisa*. La mantisa es el logaritmo del número básico y está determinada por la secuencia de los dígitos del número sin importar la posición del punto decimal. La mantisa es un decimal positivo (o cero, si el número es una potencia entera de 10).[2]

[2] Debe destacarse que el logaritmo de un número N tal que $0 < N < 1$ se mostrará en la calculadora como un solo número negativo que es el resultado de la suma algebraica de la mantisa positiva y la característica negativa. En estos casos, el resultado desplegado representa el logaritmo del inverso del número que está calculándose, por lo cual la parte decimal del número negativo que se muestra no representa la mantisa. Por ejemplo, si

$$N = 0.02 = 2 \times (10^{-2})$$
$$\log N = (\log 2 \times \log 10^{-2}) = 0.301030 - 2$$

la calculadora mostrará -1.698970 que es el resultado de la suma algebraica de $0.301030 - 2$. El logaritmo desplegado es el correspondiente al inverso del número que se está buscando,

$$10^{-1.698970} = \frac{1}{10^{1.698970}} = \frac{1}{5\times 10^1} = \frac{1}{50} = 0.02$$

ya que

$$0.698970 = \log 5 \text{ y } \log 1 = \log 10$$

EJEMPLO 1.4.5

Determine la característica y la mantisa de los logaritmos de los siguientes números.

a) 959.84 *b*) 27.35 *c*) 0.026 *d*) 0.004321 *e*) 6.478

Solución:
Cuando se determina la notación científica de un número, se tiene:

Número	Notación científica	Característica	Mantisa
0 959.84	9.5984×10^2	2	0.982199
27.35	2.735×10^1	1	0.436957
0.026	2.600×10^{-2}	–2	0.414973
0.004321	4.321×10^{-3}	–3	0.635584
6.478	6.478×10^0	0	0.811441

1.4.4 Antilogaritmos

Si $L = \log N$, N es llamado *antilogaritmo* de L y se denota como $N = \text{antilog } L$ cuando $L = \log N$. Por ejemplo,

$$200 = \text{antilog } 2.301030 \quad \text{ya que} \quad \log 200 = 2.301030$$
$$0.5 = \text{antilog } 0.698970 - 1 \quad \text{ya que} \quad \log 0.5 = 0.698970 - 1$$

El antilogaritmo de un logaritmo dado puede ser determinado mediante el empleo de una calculadora electrónica o por medio de tablas.

EJEMPLO 1.4.6

Dado $\log 8.37 = 0.922725$, determine el antilogaritmo de los siguientes logaritmos.

a) 2.922725 *c*) 0.922725 – 3 *e*) 0.922725 – 1
b) 1.922725 *d*) 3.922725

Solución:
a) antilog 2.922725 = 837.00
b) antilog 1.922725 = 83.70
c) antilog 0.922725 – 3 = 0.008370
d) antilog 3.922725 = 8 370.00
e) antilog 0.922725 – 1 = 0.8370

EJEMPLO 1.4.7

Utilizando una calculadora electrónica, determine el antilogaritmo de los siguientes logaritmos.

$L = \log N$ $\quad N = \text{antilog } L$ $\quad L = \log N$ $\quad N = \text{antilog } L$

a) antilog 4.25 = 17 782.79
b) antilog 1.8 = 63.0957
c) antilog –2.356547 = 0.0044
d) antilog –1.277366 = 0.0528
e) antilog –0.132460 = 0.737123
f) antilog 0.132460 = 1.35662

1.5 Cálculos con logaritmos

Como se estableció al principio del capítulo, los logaritmos han perdido importancia ante el advenimiento de las calculadoras y computadoras electrónicas que permiten la realización de complejas operaciones aritméticas con rapidez y precisión. Sin embargo, aún se utilizan para encontrar la solución de una ecuación.

En esta sección se presenta una serie de problemas resueltos mediante el uso de logaritmos.

EJEMPLO 1.5.1

Resuelva las siguientes operaciones por medio de logaritmos.

a) $\dfrac{85\,347 \times 15\,274}{125\,386}$ *b*) $(0.03768)^2(6.354428)^6$ *c*) $\sqrt[4]{\left[\dfrac{(5.36)^2(67.48)^3}{(356.27)^2}\right]^3}$

Solución:

a)
$$\log\left(\frac{85\,347 \times 15\,274}{125\,386}\right) = \log\ 85\,347 + \log 15\,274 - \log 125\,386$$
$$= 4.931188 + 4.183953 - 5.098249$$
$$= 4.016892$$
$$\text{antilog } 4.016892 = 10\,396.62$$

b)
$$\log[(0.03768)^2(6.354428)^6] = 2\log 0.03768 + 6\log 6.354428$$
$$= 2(-1.423889) + 6(0.803076)$$
$$= -2.847778 + 4.818456$$
$$= 1.970678$$
$$\text{antilog } 1.970678 = 93.471239$$

c)
$$\sqrt[4]{\left[\frac{(5.36)^2(67.48)^3}{(356.27)^2}\right]^3} = \left[\frac{(5.36)^2(67.48)^3}{(356.27)^2}\right]^{3/4}$$
$$\log\left[\frac{(5.36)^2(67.48)^3}{(356.27)^2}\right]^{3/4} = \frac{3}{4}(2\log 5.36 + 3\log 67.48\ - 2\log 356.72)$$
$$= \frac{3}{4}[2(0.729165) + 3(1.829175)\ - 2(2.551779)]$$
$$= \frac{3}{4}(1.45833 + 5.487525\ - 5.103559)$$
$$= \frac{3}{4}(1.842296)$$
$$= 1.381722$$
$$\text{antilog } 1.381722 = 24.083645$$

EJEMPLO 1.5.2

Determine el valor de la incógnita i (que representa tasa de interés por periodo) si $1\,000(1 - i)^3 = 3\,000$.

SOLUCIÓN:

a) Si se emplean logaritmos:

$$\log 1000 + 3\log(1+i) = \log 3000$$
$$3\log(1+i) = \log 3000 - \log 1000$$
$$\log(1+i) = \frac{\log 3000 - \log 1000}{3}$$
$$\log(1+i) = \frac{3.477121-3}{3}$$
$$\log(1+i) = 0.159040$$
$$(1+i) = \text{antilog}\,(0.159040)$$
$$1+i = 1.442249$$
$$i = 1.442249-1$$
$$i = 0.442249 = 44.22\%$$

b) Por solución directa:

$$1000(1+i)^3 = 3000$$
$$(1+i)^3 = \frac{3000}{1000}$$
$$(1+i)^3 = 3$$
$$1+i = (3)^{1/3}$$
$$i = 1.442249571-1$$
$$i = 0.442249 = 44.22\%$$

EJEMPLO 1.5.3

Determine d (tasa compuesta anual de depreciación) si

$$900(1-d)^3 = 200$$

SOLUCIÓN:

a) Si se emplean logaritmos:

$$\log 900 + 3\log(1-d) = \log 200$$
$$3\log(1-d) = \log 200 - \log 900$$
$$\log(1-d) = \frac{2.301030-2.954243}{3}$$
$$\log(1-d) = -0.217737$$
$$(1-d) = \text{antilog}\,(-0.217737)$$
$$-d = 0.605708-1$$
$$d = 0.394292$$
$$d \approx 39.43\%$$

b) Por solución directa:

$$900(1-d)^3 = 200$$
$$(1-d)^3 = 200/900$$
$$(1-d)^3 = 0.222222$$
$$(1-d) = \sqrt[3]{0.222222}$$
$$(1-d) = (0.222222)^{1/3}$$
$$(1-d) = 0.605706$$
$$-d = 0.605706-1$$
$$d = 0.394293$$
$$d \approx 39.43\%$$

EJEMPLO 1.5.4

Determine el valor de n (número de periodo de conversión) si n son meses y

$$1000(1+0.05)^n = 5000$$

SOLUCIÓN:

a) Por logaritmos:

$$\log 1000 + n\log(1+0.05) = \log 5000$$
$$n\log(1.05) = \log 5000 - \log 1000$$
$$n(0.021189) = 3.698970 - 3.000000$$
$$n = \frac{0.698070}{0.021189}$$
$$n = 32.9874$$
$$n \approx 33 \text{ meses}$$

El tiempo en que un capital quintuplicará su valor dada una tasa de interés de 5% mensual es de aproximadamente 33 meses.

Este tipo de problemas sólo puede resolverse mediante el uso de logaritmos.

EJEMPLO 1.5.5

Determine el valor de n (número de periodos de conversión) si n representa semestres y

$$
\begin{aligned}
3\,500(1+0.25)^{-n} &= 500\\
\log 3\,500 + [-n \log(1.25)] &= \log 500\\
-n \log 1.25 &= \log 500 - \log 3\,500\\
-n(0.096910) &= 2.698970 - 3.544068\\
n &= \frac{-0.845098}{-0.096910}\\
n &= 8.72044\\
n &\approx 8.72 \text{ semestres}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 1.5.6

Determine el valor de n (número de pagos periódicos) si n son trimestres y

$$\frac{(1+0.18)^n - 1}{0.18} = 10$$

Solución:

a) Por logaritmos:

$$
\begin{aligned}
(1+0.18)^n - 1 &= 10(0.18)\\
(1+0.18)^n - 1 &= 1.8\\
(1+0.18)^n &= 1.8+1\\
(1.18)^n &= 2.8\\
n \log 1.18 &= \log 2.8\\
n &= \frac{\log 2.8}{\log 1.18}\\
n &= \frac{0.447158}{0.07188}\\
n &= 6.220723\\
n &\approx 6.22 \text{ pagos trimestrales}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 1.5.7

Determine el valor de n (número de pagos periódicos) si n son años y

$$\frac{1-(1+0.50)^{-n}}{0.50} = 25$$

Solución:

a) Por logaritmos:

$$
\begin{aligned}
1-(1+0.50)^{-n} &= 25(0.50)\\
-(1.50)^{-n} &= 12.5 - 1\\
-(1.50)^{-n} &= 11.5\\
n \log 1.50 &= \log 11.5\\
n &= \frac{\log 11.5}{\log 1.50}\\
n &= \frac{1.060698}{0.176091}\\
n &= 6.023569\\
n &= 6.02 \text{ pagos anuales}
\end{aligned}
$$

Ejercicios de las secciones 1.4 y 1.5

6. Determine el logaritmo L.

a) $L = \log_3 (27)$
b) $L = \log_5 (0.008)$
c) $L = \log_8 \sqrt{64}$
d) $L = \log_{10} = 1/\sqrt{100}$
e) $L = \log_2 = \sqrt{4^4}$

7. Determine el número N.

a) $\log_2 N = 3$
b) $\log_5 N = 3$
c) $\log_4 N = 1/2$
d) $\log_6 N = 5$
e) $\log_{10} N = 2$

8. Determine la característica de:

a) 8
b) 5 210
c) 85 900
d) 3.25
e) 0.018
f) 45.60

9. Determine la mantisa de:

a) 2
b) 0.20
c) 0.020
d) 0.040
e) 0.080
f) 8 000

10. Determine el logaritmo común de:

a) 24
b) 82.320
c) 0.005
d) 7.489
e) 158
f) 0.0001
g) 10 000
h) 1
i) 0.03720
j) 10.25

11. Dado log 40 = 1.602060, determine el antilogaritmo de:

a) 2.602060 *b*) 0.602060 *c*) 0.602060 − 3

12. Determine el antilogaritmo de:

a) 2.5
b) 0.80
c) 3.3640
d) –3.0000
e) –0.03785
f) 1.9777

13. Mediante el empleo de logaritmos, resuelva las operaciones del ejercicio 4.
14. Mediante el empleo de logaritmos, resuelva las ecuaciones del ejercicio 5.
15. Mediante el empleo de logaritmos, resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $100(1 + 0.50)^n = 500$
b) $(1.05)^n = 3$
c) $3\,000(1 + 0.20)^n = 10\,000$
d) $10\,000(1 + 0.20)^{-n} = 3\,000$
e) $(1.60)^{-n} = 0.100$
f) $(1 + 0.18)^n - 1 = 0.35$
g) $1 - (1 + 0.04)^{-n} = 0.285$

1.6 Redondeo

En este libro se utilizarán las siguientes reglas para redondear:

1. El dígito retenido permanece sin cambio si los dígitos despreciados son menores de 5 000. Ejemplo: 0.13783 se redondea como 0.1378 si se desean 4 cifras significativas.
2. El dígito retenido se incrementa en 1 si los dígitos despreciados son mayores de 5 000. Ejemplo: 0.68917 se redondea como 0.69 si se desean sólo 2 decimales.
3. El dígito retenido se convierte en par (se incrementa en 1 cuando es necesario) si los dígitos despreciados son exactamente iguales a 5 000. Ejemplo: 0.235 se redondeará como 0.24 si se desean 2 decimales, en tanto que 0.14325 se redondeará como 0.1432 si se desean 4 decimales.

EJEMPLO 1.6.1

Redondee las siguientes cifras a 2 y 4 decimales:

		Dos decimales	Cuatro decimales
a)	30.82207	30.82	30.8221
b)	5.5517627	5.55	5.5518
c)	2.3562178	2.36	2.3562

		Dos decimales	Cuatro decimales
d)	14.5349976	14.53	14.5350
e)	1.238902	1.24	1.2390
f)	1.1130500	1.11	1.1130

1.7 Progresiones aritméticas

Una *progresión aritmética* es una sucesión de números llamados *términos*, tales que dos números cualesquiera consecutivos de la sucesión están separados por una misma cantidad llamada *diferencia común.*

1, 4, 7, 10… es una progresión aritmética cuya diferencia común es 3.
30, 25, 20, 15… es una progresión aritmética cuya diferencia común es –5.

Si se considera t_1 como el primer término de una progresión, d como la diferencia común y n el número de términos de la misma, se genera una progresión de la forma

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d\ldots, t_1 + (n - 2)d, t_1 + (n - 1)d$$

El último término de una progresión será igual al primer término de la misma adicionado de $(n - 1)$ diferencias:

$$u_1 = t_1 + (n - 1)d \tag{1.11}$$

En una serie de 3 términos puede verse claramente esto:

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d$$

El último término $(t_1 + 2d)$ es igual al primer término (t_1) adicionado de $(n - 1)$ veces la diferencia común, ya que $n = 3$, $n - 1 = 2$.

La suma de una progresión aritmética puede escribirse como sigue:

$$S = t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + \cdots + (u - 2d) + (u - d) + u$$

pero también puede escribirse en forma inversa:

$$S = u + (u - d) + (u - 2d) + \cdots + (t_1 + 2d) + (t_1 + d) + t_1$$

Si se suman las dos expresiones término a término se tiene:

$$2\,S = (t_1 + u) + (t_1 + u) + \cdots + (t_1 + u) + (t_1 + u)$$
$$2\,S = (t_1 + u)$$
$$S = \frac{n}{2}\left(t_1 + u\right) \tag{1.12}$$

Así, la suma de una progresión aritmética de n términos es igual a la suma del primero y el último término multiplicado por n y dividido entre dos.

Sustituyendo (1.11) en (1.12) se tiene:

$$S = \frac{n}{2}\left[t_1 + \left[t_1 + (n-1)d\right]\right]$$

Simplificando:

$$S = \frac{n}{2}\left[2t_1 + (n-1)d\right] \tag{1.13}$$

EJEMPLO 1.7.1

Determine el décimo término y la suma de la siguiente progresión aritmética 3, 7, 11…

SOLUCIÓN:

a) Se determina el último término aplicando (1.11) y se considera: $t_1 = 3$, $n = 10$ y $d = 4$.

$$u = t_1 + (n - 1)d$$
$$u = 3 + (10 - 1)4$$
$$u = 3 + 36$$
$$u = 39$$

b) Para determinar la suma se aplica la fórmula (1.12):

$$S = n/2(t_1 + u)$$
$$S = 10/2(3 + 39)$$
$$S = 5(42)$$
$$S = 210$$

Una alternativa de cálculo es la fórmula (1.13):

$$S = n/2[2t_1 + (n - 1)d]$$
$$S = 10/2[2(3) + (10 - 1)4]$$
$$S = 5[6 + (9)(4)]$$
$$S = 5(42)$$
$$S = 210$$

EJEMPLO 1.7.2

Determine el último término y la suma de la progresión aritmética 48, 45, 42… si cuenta con 15 términos.

SOLUCIÓN:

a) Se determina el último término. Para ello se debe aplicar (1.11) considerando que $t_1 = 48$, $n = 15$ y $d = -3$:

$$u = t_1 + (n - 1)d$$
$$u = 48 + (15 - 1)(-3)$$
$$u = 48 + (14)(-3)$$
$$u = 48 - 42 = 6$$

b) La suma se determina aplicando (1.12):

$$S = n/2(t_1 + u)$$
$$S = 15/2\ (48 + 6)$$
$$S = 7.5(54)$$
$$S = 405$$

EJEMPLO 1.7.3

El primer término de una progresión aritmética es: $t_1 = -2$ mientras que el último es $u = 48$, y la suma $S = 253$. Determine n y d.

SOLUCIÓN:

Sustituyendo en (1.12) se tiene:

$$S = n/2(t_1 + u)$$
$$253 = n/2\ (-2 + 48)$$
$$(253)(2) = n(46)$$
$$n = 506/46 = 11$$

En (1.11) se sustituyen los datos conocidos y se determina d:

$$u = t_1 + (n-1)d$$
$$48 = -2 + \ (11-1)d$$
$$50 = 10d$$
$$d = 50/10 = 5$$

EJEMPLO 1.7.4

Conocidos $t_5 = 27$, $t_7 = 35$, determine t_1 y S_7.

SOLUCIÓN:

$$t_7 = t_1 + 6d = 35 - 27$$
$$t_5 = t_1 + 4d = 27$$

Restando la ecuación t_5 de t_7 se tiene que:

$$(t_1 + 6d) - (t_1 + 4d) = 35 - 27$$
$$2d = 8$$
$$d = 8/2 = 4$$

Para determinar t_1 se sustituye en cualquier ecuación y se tiene:

$$t_1 + 6d = 35$$
$$t_1 + 6(4) = 35$$
$$t_1 = 35 - 24$$
$$t_1 = 11$$

La suma se determina sustituyendo los valores conocidos en (1.12):

$$S = \frac{n}{2}(t_1 + u)$$
$$S_7 = 7/2(11 + 35)$$
$$S_7 = 3.5(46)$$
$$S_7 = 161$$

EJEMPLO 1.7.5

Se recibe un préstamo bancario de \$12 000, el cual se acuerda pagar mediante 12 pagos mensuales de \$1 000 más intereses sobre saldos insolutos a razón de 5% mensual. ¿Qué cantidad de intereses se paga en total?

SOLUCIÓN:

El primer pago que debe hacerse será de \$1 000 de capital más \$600 de intereses (5% de 12 000). El segundo será de \$1 000 más \$550 (5% de 11 000); el tercero de 1 000 más 500 (5% de 10 000), y así sucesivamente.

$$t_1 = 600 \qquad d = -50 \qquad n = 12$$

Aplicando la fórmula (1.13) se tiene:

$$S = n/2[2t_1 + (n-1)d]$$
$$S = 12/2[2(600) + (12-1)(-50)]$$
$$S = 6[1\,200 + (-550)]$$
$$S = 6(650)$$
$$S = 3\,900$$

Deberá pagar \$3 900 de intereses.

Ejercicios de la sección 1.7

16. Determine el último término y la suma de las progresiones siguientes:

a) 11, 23, 35... 12 términos
b) 5, −3, −11... 10 términos
c) 1/2, 5/8, 3/4... 7 términos
d) 1/4, 1/12, −1/12... 20 términos
e) 1.00, 1.05, 1.10... 12 términos

17. Determine la suma de:

a) Los números pares de 1 a 100
b) Los números nones de 9 a 100
c) Los números enteros múltiplos de 5, de 10 a 500

18. En una progresión aritmética se tiene:

a) $t_1 = 8$ $t_5 = 36$; determine d, t_{10} y S_{10}
b) $t_5 = 60$ $t_{10} = 5$; determine d, t_1 y S_{10}
c) $t_3 = 8t_n = 9n = 8$; determine d, t_1 y S_8
d) $t_n = -5d = -1/4n = 12$; determine t_1 y Sn

19. Una empresa recibe un préstamo bancario de \$30 000 que acuerda liquidar en 10 pagos semestrales más intereses sobre saldos insolutos de 10% semestral. ¿Qué cantidad total de intereses debe pagar?

1.8 Progresiones geométricas

Una *progresión geométrica* es una sucesión de números llamados *términos*, tales que dos números consecutivos cualesquiera de ella guardan *un cociente* o *una razón común.* En otras palabras, esto quiere decir que cualquier término posterior se puede obtener del anterior multiplicándolo por un número constante llamado *cociente* o *razón común.*

3, 6, 12, 24, 48... es una progresión geométrica cuya razón común es 2.

−2, 8, −32, 128... es una progresión geométrica cuya razón común es −4.

t, tr, tr^2, tr^3, tr^4... es una progresión geométrica cuya razón común es r.

Tomando el último ejemplo se puede generar una progresión geométrica con 6 términos:

$$t_1, t_1r, t_1r^2, t_1r^3, t_1r^4, t_1r^5$$

De ella se desprende que el último término es igual a:

$$u = t_1 r^{n-1} \qquad (1.14)$$

y que una progresión con n términos adoptará la forma:

$$t_1, t_1r, t_1r^2 \cdots t_1r^{n-3}, t_1r^{n-2}, t_1r^{n-1}$$

La suma de esta progresión es igual a:

$$S = t_1 + t_1r + t_1r^2 + \cdots t_1r^{n-3} + t_1r^{n-2} + t_1r^{n-1}$$

Luego, si se multiplican ambos lados de la ecuación por r, se tiene:

$$rS = t_1r + t_1r^2 + t_1r^3 + \cdots + t_1r^{n-2} + t_1r^{n-1} + t_1r^n$$

Si se resta la segunda expresión de la primera se tiene:

$$S - rS = t_1 + (t_1r - t_1r) + (t_1r^2 - t_1r^2) + \cdots + (t_1r^{n-2} - t_1r^{n-2}) + (t_1r^{n-1} - t_1r^{n-1}) - t_1r^n$$

$$S - rS = t_1 - t_1r^n$$

Por lo que

$$S(1 - r) = t_1 - t_1r^n$$

$$S = \frac{t_1 - t_1r^n}{1 - r} = t_1\frac{(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S = t_1\frac{(1 - r^n)}{1 - r} \tag{1.15}$$

Es conveniente utilizar la fórmula anterior cuando $r < 1$ y la expresión

$$S = t_1\frac{(r^n - 1)}{r - 1} \tag{1.15'}$$

cuando $r > 1$.

Una progresión geométrica será *creciente* si la razón común r es positiva mayor que 1.

EJEMPLO 1.8.1

Genere una progresión de 5 términos con $t_1 = 3$ y $r = 4$.

SOLUCIÓN: 3, 12, 48, 192, 768

Una progresión geométrica será *decreciente* si la razón común r es positiva menor que 1.

EJEMPLO 1.8.2

Genere una progresión geométrica de 5 términos con $t_1 = 80$ y $r = 1/4$.

SOLUCIÓN: 80, 20, 5, 1.25, 0.3125

EJEMPLO 1.8.3

Encuentre el décimo término y la suma de los primeros 10 términos de las siguientes progresiones:

a) 1, 2, 4, 8 *b*) $(1 + 0.04)^{-1}, (1 + 0.04)^{-2}, (1 + 0.04)^{-3}$.

SOLUCIÓN:

a) Para determinar el décimo término se aplica la fórmula (1.14) con $t_1 = 1, r = 2$:

$$u = t_1r^{n-1}$$
$$u = 1(2)^{10-1}$$
$$u = 1(2)^9$$
$$u = 1(512) = 512$$

La suma de la progresión se obtiene aplicando la fórmula (1.15′):

$$S = t_1 \frac{(r^n - 1)}{r - 1}$$
$$S = 1\frac{(2^{10} - 1)}{2 - 1}$$
$$S = 1\frac{1024 - 1}{1}$$
$$S = 1023$$

b) En la segunda progresión se tiene que:

$$t_1 = (1.04)^{-1},\ r = (1.04)^{-1} \text{ y } n = 1$$

Para calcular el décimo término se aplica (1.14):

$$u = t_1 r^{n-1}$$
$$u = (1.04)^{-1}[(1.04)^{-1}]^{10-1}$$
$$u = (1.04)^{-1}(1.04)^{-9}$$
$$u = (1.04)^{-10}$$
$$u = 0.675564$$

La suma se determina aplicando la fórmula (1.15) pues $r < 1$.

$$S = t_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$
$$S = (1.04)^{-1} \frac{1 - [(1.04)^{-1}]^{10}}{1 - (1.04)^{-1}}$$
$$S = (1.04)^{-1} \frac{1 - (1.04)^{-10}}{1 - (1.04)^{-1}} \times \frac{1.04}{1.04}$$
$$S = (1.04)^{0} \frac{1 - (1.04)^{-10}}{1.04 - (1.04)^{0}}$$
$$S = \frac{1 - (1.04)^{-10}}{1.04 - 1} = \frac{1 - (1.04)^{-10}}{0.04}$$
$$S = \frac{1 - 0.675554}{0.04} = 8.110896$$

EJEMPLO 1.8.4

Una progresión geométrica tiene como primero y último términos $t_1 = 80$, $t_n = 5/4$; $r = 1/2$. Determine n y S.

Solución:

Sustituyendo los valores conocidos en (1.14):

$$u = t_1 r^{n-1}$$
$$5/4 = 80(1/2)^{n-1}$$
$$5/320 = (1/2)^{n-1}$$
$$1/64 = (1/2)^{n-1}$$

si se pone 1/64 en función de 1/2, se tiene:

$$1/64 = (1/2)^6 \text{ (ya que } 2^6 = 64)$$

Por lo tanto:

$$(1/2)^{n-1} = (1/2)^6$$
$$n-1 = 6$$
$$n = 6+1$$
$$n = 7$$

Se aplica (1.15) para determinar la suma:

$$S = t_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$
$$S = 80\frac{1-(1/2)^7}{1-(1/2)} = 80\frac{0.992188}{0.5}$$
$$S = 158.75$$

EJEMPLO 1.8.5

Una progresión geométrica cuenta entre sus términos con $t_3 = 8$ y $t_6 = 512$. Determine t_8 y S_8.

SOLUCIÓN:

Se tiene que $t_n = t^1 r^{n-1}$

$$t_3 = t_1 r^2 = 8 \qquad \text{y} \qquad t_6 = t_1 r^5 = 512$$

De la primera ecuación se despeja $t_1 = \frac{8}{r^2}$ y se sustituye en la segunda ecuación:

$$\frac{8}{r^2} r^5 = 512$$
$$\frac{8r^5}{r^2} = 512$$
$$8r^3 = 512$$
$$r^3 = 512/8$$
$$r^3 = 64$$
$$r = (64)^{1/3}$$
$$r = 4$$

Sustituyendo:

$$t_1 r^2 = 8$$
$$t_1(4)^2 = 8$$
$$t_1(16) = 8$$
$$t_1 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Para determinar t_8 se aplica (1.14):

$$u = t_1 r^{n-1}$$
$$u = 1/2(4)^{8-1}$$
$$u = 1/2(4)^7$$
$$u = 1/2(16\,384)$$
$$u = 8\,192$$

La suma se calcula utilizando (1.15′):

$$S = t_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$$

$$S=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{4^8-1}{4-1}$$
$$S=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{65\,535}{3}$$
$$S=10\,922.50$$

EJEMPLO 1.8.6

La inflación de un país se ha incrementado 40% en promedio durante los últimos 5 años. ¿Cuál es el precio actual de un bien que tenía un precio de \$100 hace 5 años?

SOLUCIÓN: $n=6$ $\quad t_1=100$ $\quad t_6=?$ $\quad r=(1+0.40)$

Aplicando (1.14) se tiene:

$$u=t_1r^{n-1}$$
$$u=100(1.40)^{6-1}$$
$$u=100(1.40)^5$$
$$u=100(5.37824)$$
$$u=537.82$$

Puede esperarse que el precio del bien se haya más que quintuplicado en ese periodo dada una inflación promedio de 40%, puesto que dicha inflación se va calculando sobre la del año anterior, que a su vez lo fue sobre la del año previo y así sucesivamente.

EJEMPLO 1.8.7

La inflación de un país latinoamericano se ha incrementado 4% en promedio durante los últimos 5 años. ¿Cuál es el precio actual de un bien que tenía un precio de \$100 hace 5 años?

SOLUCIÓN: $n=6$ $\quad t_1=100$ $\quad t_6=?$ $\quad r=(1+0.04)$

Aplicando (1.14) se tiene:

$$u=t_1r^{n-1}$$
$$u=100(1.04)^{6-1}$$
$$u=100(1.04)^5$$
$$u=100(1.2166529)$$
$$u=121.67$$

Como puede observarse al comparar el resultado de este ejemplo con el del ejemplo inmediato anterior, los efectos de tasas elevadas de inflación son muy importantes, puesto que con una tasa de inflación anual de 4% el precio del bien se incrementará 21.67% en 5 años, en tanto que con un incremento anual de 40% los precios se incrementan 437.82% durante el mismo periodo.

Ejercicios de la sección 1.8

20. Determine el último término y la suma de las siguientes progresiones:

a) 7, 35, 175…	10 términos	*c*) 2/3, 2/15, 2/75…	15 términos
b) 5, −20, 80…	8 términos	*d*) 3/4, −1/4, 1/12…	12 términos

21. En una progresión geométrica se tiene:

a) $t_1 = 4$ $\quad t_6 = 972;$ $\quad$ determine r, t_8 y S_8

b) $t_3 = 20$ $\quad t_7 = 1\,620;$ $\quad$ determine r, t_1 y S_7

c) $t_5 = 8$ $\quad t_n = 0.5$ $\quad n = 9;$ $\quad$ determine r, t_1 y S_8

d) $t_n = -1/8$ $\quad r = -1/4$ $\quad n = 8;$ $\quad$ determine t_1 y S_8

e) $t_1 = 1.04$ $\quad r = 1.04;$ $\quad$ determine t_{12} y S_{12}

22. Un jugador de ajedrez solicitó al rey, después de haberle enseñado este juego, que en pago le diese 1 grano de trigo por el primer cuadro, 2 por el segundo, 4 por el tercero, 8 por el cuarto y así sucesivamente. ¿Cuántos granos debía darle por el cuadro número 32? ¿Cuántos granos debía darle por los cuadros 1 al 32? Imagine la cantidad si el tablero de ajedrez tiene 64 cuadros.

23. Un equipo de cómputo con valor de $10 000 es depreciado cada mes 10% de su valor al comienzo del mes. ¿Cuál será la depreciación en el 12o. mes?

24. Una persona deposita en un banco $5 000. El banco le paga un interés mensual de 3% sobre el saldo que tenga acumulado al principio del mes. Si dicho interés se reinvierte mes a mes en la misma cuenta, ¿qué cantidad habrá reunido al cabo de un año?

1.9 Progresiones geométricas infinitas

Considere la progresión geométrica

$$1,\ 1/2,\ 1/4,\ 1/8\ldots$$

cuyo primer término es 1 y cuya razón es r 1/2. La suma de los primeros n términos es

$$S_n = \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}$$

$$S_n = \frac{1}{1-1/2} - \frac{(1/2)^n}{1-1/2}$$

$$S_n = \frac{1}{1/2} - \frac{(1/2)^n}{1/2}$$

$$S_n = 2-(1/2)^{n-1}$$

Para cualquier n, la diferencia $2 - S_n = (1/2)^{n-1}$ es positiva, y se reduce a medida que crece n. Si n crece sin límite (tiende al infinito), se dice que S se aproxima a 2 como límite.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2$$

En el caso de una progresión geométrica del tipo

$$t_1,\ t_1 r,\ t_1 r^2,\ t_1 r^3\ldots$$

la suma de los primeros n términos puede escribirse como

$$S_n = t_1\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{t_1}{1-r} - \frac{t_1 r^n}{1-r}$$

Cuando $(-1 < r < 1)$, si n crece infinitamente, el término en r^n tiende a 0 y S_n tiende a $\dfrac{t_1}{1-r}$.

Así, se dice que

$$S = \frac{t_1}{1-r} \text{ cuando } -1 < r < 1 \qquad \textbf{(1.16)}$$

y se le considera la suma de una progresión geométrica infinita.

EJEMPLO 1.9.1

Determine la suma de la progresión geométrica infinita:

1, 1/3, 1/9, 1/27…

SOLUCIÓN:

Se tiene que $t_1 = 1$, $r = 1/3$ y ya que $(-1 < r < 1)$, se aplica la fórmula (1.16)

$$(-1 < r < 1)$$
$$S = \frac{t_1}{1-r}$$
$$S = \frac{1}{1-1/3}$$
$$S = \frac{1}{2/3}$$
$$S = 1.5$$

EJEMPLO 1.9.2

Determine la suma de la progresión geométrica infinita:

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{256}\ldots$$

SOLUCIÓN: $t_1 = 1$ $r = 1/4$ ya que $(-1 < r < 1)$

$$S = \frac{1}{1-1/4}$$
$$S = \frac{1}{3/4}$$
$$S = 4/3$$

EJEMPLO 1.9.3

Determine la suma de la progresión geométrica infinita:

$$(1+i)^{-1},\ (1+i)^{-2},\ (1+i)^{-3},\ (1+i)^{-4}$$

SOLUCIÓN: $t_1 = (1+i)^{-1}$ y $r = (1+i)^{-1}$

Aplicando la fórmula (1.16) se tiene que

$$S = \frac{(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}}$$

Si se multiplican el numerador y el denominador por $(1 + i)$ se tiene:

$$S = \frac{(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} \times \frac{(1+i)}{(1+i)}$$

Aplicando las leyes de los exponentes se tiene:

$$S = \frac{(1+i)^{-1+1}}{(1+i)-(1+i)^{-1+1}} = \frac{(1+i)^{0}}{(1+i)-(1+i)^{0}}$$
$$S = \frac{1}{(1+i)-1}$$
$$S = \frac{1}{i}$$

EJEMPLO 1.9.4

Transforme 0.555555… en una fracción propia.[3]

SOLUCIÓN:
El número 0.555555… puede escribirse como la suma de 0.50 + 0.05 + 0.005 +… Así, se tiene una progresión geométrica infinita en la cual $t_1 = 0.50$ y $r = 0.10$. Aplicando la fórmula (1.16) se tiene:

$$S = \frac{t_1}{1-r} = \frac{0.5}{1-0.1} = \frac{0.5}{0.9} = \frac{5}{9}$$

EJEMPLO 1.9.5

Transforme 2.533333 a un número mixto.[4]

SOLUCIÓN:
El número 2.533333… puede escribirse como la suma de 2 + 0.5 + 0.03 + 0.003 + 0.0003…

También puede escribirse como

$$2 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} \ldots$$

Así, se tiene la suma de un número entero (2), una fracción $\frac{5}{10}$ y una progresión infinita que tiene como primer término $t_1 = 0.03$ y como razón $r = 0.10$.

Al aplicar la fórmula (1.16) a la progresión infinita se tiene:

$$2.533333\ldots = 2 + \frac{5}{10} + \frac{t_1}{1-r} = 2 + \frac{5}{10} + \frac{0.03}{1-0.1}$$

$$2.533333\ldots = 2 + \frac{5}{10} + \frac{0.03}{0.9} = 2 + \frac{5}{10} + \frac{3}{90}$$

$$2.533333\ldots = 2 + \frac{45+3}{90}$$

$$2.533333\ldots = 2\frac{48}{90}$$

Ejercicios de la sección 1.9

25. Determine la suma de las progresiones geométricas infinitas siguientes:

a) 0.2, 0.02, 0.002, 0.0002…
b) 0.4, 0.04, 0.004, 0.0004…
c) 1, 1/5, 1/25…
d) 1, –1/4, 1/16, –1/64
e) $(1.05)^{-1}$, $(1.05)^{-2}$, $(1.05)^{-3}\ldots$

---

[3] Fracción propia es aquella en que el numerador es menor que el denominador. Ejemplos:

$$\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{2}{5}; \frac{8}{10}.$$

Toda fracción propia es menor que la unidad.

[4] Fracción impropia es aquella en que el numerador es mayor que el denominador. Ejemplos:

$$\frac{5}{2}; \frac{4}{3}; \frac{7}{5}; \frac{10}{9}.$$

Toda fracción impropia es mayor que la unidad y puede escribirse con la suma de un número natural más una fracción, dando origen a los números mixtos.

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}. \qquad \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

26. Transforme en fracción propia o número mixto los siguientes valores:

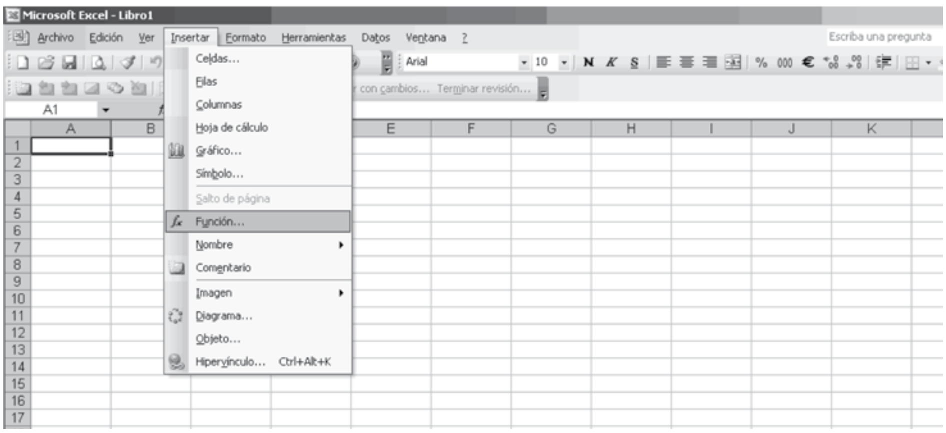
a) 1.111111… *d*) 0.353535 *g*) 2.522222
b) 2.055555… *e*) 0.777777 *h*) 1.848484
c) 3.0681818… *f*) 0.141414 *i*) 0.202020

27. Se deja caer una pelota de hule de una altura de 30 metros. Si cada rebote llega a 2/3 de la altura de la cual cae, ¿cuántos metros habrá recorrido hasta alcanzar el reposo?

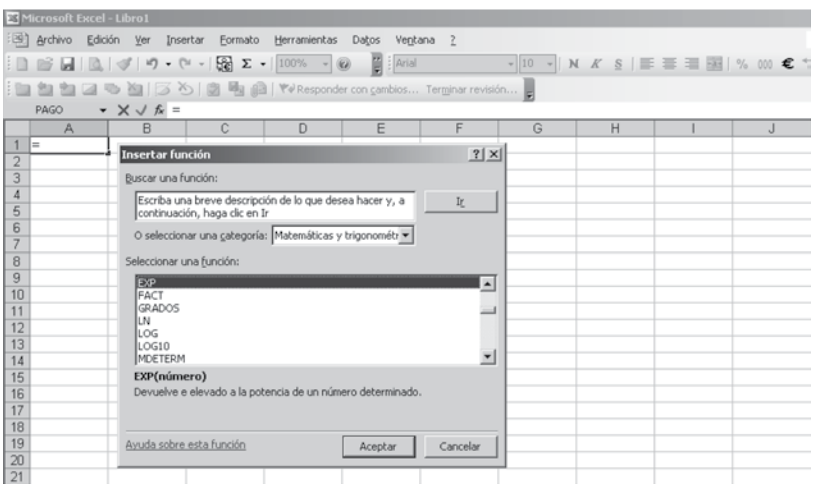
1.10 Uso de Excel

El paquete Excel cuenta con funciones específicas para calcular logaritmos y antilogaritmos naturales; cuenta también con una función para calcular logaritmos base 10 y permite asimismo determinar el logaritmo de cualquier número en la base que se quiera elegir.

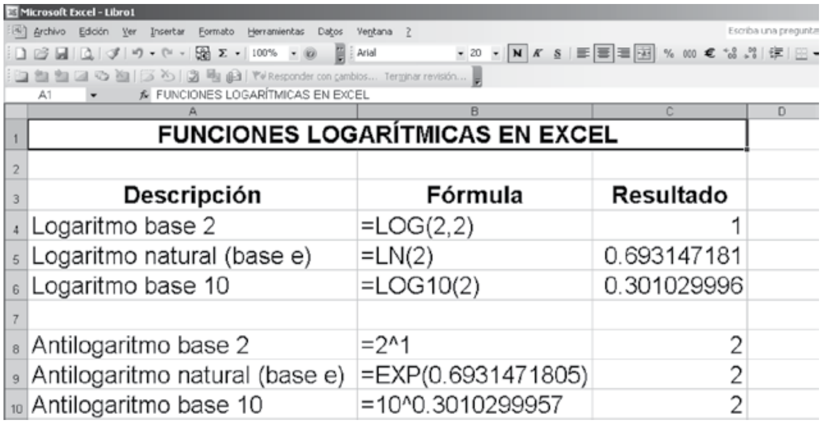
Estas funciones pueden activarse desde la opción Insertar/Función que se encuentra en el menú principal de Excel:



o bien oprimiendo el botón f_x que se localiza en la barra inmediata superior a las celdas de la hoja de cálculo a la que se suele denominar “barra de comandos”. Una vez que se accesa esta opción, se selecciona la categoría de funciones **Matemáticas y trigonométricas** y entre ellas aparecen las relacionadas a exponentes y logaritmos.



El uso de estas funciones se ilustra en el siguiente ejemplo:



	A	B	C
1	FUNCIONES LOGARÍTMICAS EN EXCEL		
2			
3	Descripción	Fórmula	Resultado
4	Logaritmo base 2	=LOG(2,2)	1
5	Logaritmo natural (base e)	=LN(2)	0.693147181
6	Logaritmo base 10	=LOG10(2)	0.301029996
7			
8	Antilogaritmo base 2	=2^1	2
9	Antilogaritmo natural (base e)	=EXP(0.6931471805)	2
10	Antilogaritmo base 10	=10^0.3010299957	2

Para encontrar el antilogaritmo de un número de base distinta al número *e*, se debe emplear una fórmula con el siguiente formato:

b^L

Donde

b = base
^ = símbolo de exponenciación
L = logaritmo

En los ejemplos que se ofrecen en la imagen anterior, se muestran las fórmulas para calcular el antilogaritmo del número 2 con base 2 y 10. Así, el antilogaritmo se determina como sigue:

Antilogaritmo de 1 en base 2:

Fórmula	Resultado
= 2^1	2

Antilogaritmo de 0.301029995663981 en base 10:

Fórmula	Resultado
= 10^0.301029995663981	2

Excel puede ser también de utilidad para construir progresiones aritméticas y geométricas, pues permite probar de manera rápida y sencilla los valores de ellas una vez que se conocen los valores de t y d en el caso de las progresiones aritméticas, así como los valores de t_1 y r en el caso de las progresiones geométricas.

1.11 Resumen

En este capítulo se han estudiado tres temas que resultan básicos para comprender y manejar las matemáticas financieras.

a) Los *exponentes* y sus *leyes.*
b) *Logaritmos* y *antilogaritmos.*
c) Progresiones: *aritméticas* y *geométricas.*

Un *exponente* nos indica el número de veces que un valor llamado *base* debe multiplicarse por sí mismo, y se expresa en su forma general como a^n donde a es la base y n el exponente.

Las operaciones que involucran exponentes están regidas por las siguientes leyes:

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

6. $a^0 = 1$

7. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

8. $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Un logaritmo es el exponente al cual debe elevarse una base para obtener un número determinado.

$$b^L = N$$

Como exponentes que son, los logaritmos se sujetan a las leyes que los rigen y, en virtud de ello, son de gran utilidad para simplificar cálculos aritméticos.

Tres leyes fundamentales de los logaritmos se derivan de la aplicación de las leyes de los exponentes.

1. $\log (A \times B) = \log A + \log B$
2. $\log \dfrac{A}{B} = \log A - \log B$
3. $\log A^n = n \log A$

Así, al aplicar logaritmos, la multiplicación de dos números se convierte en la suma de sus logaritmos, un cociente en una resta y una potencia en una multiplicación.

Una *progresión aritmética* es una sucesión de números llamados términos, tales que cualesquiera dos números consecutivos de la sucesión están separados por una misma cantidad llamada diferencia común.

Las progresiones aritméticas son la base teórica del interés y del descuento simples.

Las *progresiones geométricas* son, a su vez, la base del interés compuesto y las anualidades, y se definen como una sucesión de números llamados términos, tales que cualesquiera dos números consecutivos de la misma guarden un cociente o razón común.

En una progresión geométrica cualquier número posterior se puede obtener del anterior multiplicándolo por un número constante llamado cociente o razón común.

Comprobación del capítulo

Si ha leído el capítulo completo, el lector debe:

- Comprender el concepto de exponente.
- Conocer y aplicar las leyes de los exponentes.
- Comprender el concepto de logaritmos.
- Determinar el logaritmo común de un número.
- Comprender el concepto de característica.
- Comprender el concepto de mantisa.
- Conocer y aplicar las leyes de los exponentes.
- Determinar el antilogaritmo de un logaritmo.
- Efectuar cálculos utilizando logaritmos.
- Comprender el concepto de progresión aritmética.
- Comprender el concepto de progresión geométrica.
- Comprender el concepto de progresión geométrica infinita.
- Resolver ejercicios que involucren exponentes, logaritmos y progresiones utilizando la hoja de cálculo Microsoft Excel.

Términos y conceptos importantes

- Antilogaritmo
- Base
- Característica
- Cociente o razón común
- Diferencia común
- Exponente
- Exponente cero
- Exponente fraccionario
- Exponente negativo
- Logaritmo
- Mantisa
- Progresión aritmética
- Progresión geométrica
- Progresión geométrica infinita

Fórmulas importantes

Exponentes

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (1.1)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (1.2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (1.3)$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (1.4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (1.5)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \textbf{(1.6)}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad \textbf{(1.7)}$$

Logaritmos

$$\log (A \times B) = \log A + \log B \quad \textbf{(1.8)}$$

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B \quad \textbf{(1.9)}$$

$$\log A^n = n \log A \quad \textbf{(1.10)}$$

Progresiones aritméticas

$$u = t_1 + (n-1)d \quad \textbf{(1.11)}$$

$$S = \frac{n}{2}(t_1 + u) \quad \textbf{(1.12)}$$

$$S = \frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d] \quad \textbf{(1.13)}$$

Progresiones geométricas

$$u = t_1 r^{n-1} \quad \textbf{(1.14)}$$

$$S = t_1\frac{(1-r^n)}{1-r} \quad \text{para } r < 1 \quad \textbf{(1.15)}$$

$$S = t_1\frac{(r^n-1)}{r-1} \quad \text{para } r > 1 \quad \textbf{(1.15')}$$

Progresiones geométricas infinitas

$$S = \frac{t_1}{1-r} \quad \text{cuando } (-1 < r < 1) \quad \textbf{(1.16)}$$

Ejercicios complementarios

1. Simplifique.

a) $ax^4 \times a^3x^5$

b) $a^2y^5 \times b^2y^5$

c) $a^3x^4 \times a^2y^3 \times x^2y^6$

d) $(3x^5)(5x^2)(2x^6)$

e) $\dfrac{y^2}{y}$

f) $\dfrac{y^5}{y^6}$

g) $\dfrac{(x^2y^3)\times(xy^5)}{y^4 \times y^3}$

h) $(d^2)^5$

i) $(i^3)^3 \times (i^2)^3$

j) $\dfrac{(3x^2)^4(x^3)^5}{(9x^4)(9x^4)^2}$

k) $\left(\dfrac{5x}{x^2}\right)^3$

l) $(x^3y^5)^2$

m) $\left(\dfrac{x^3}{y^5}\right)^2$

n) $\left(\dfrac{x^2y^3 \times x^2y^4}{y^5 \times y^2}\right)^3$

o) $\left(\dfrac{2z^5}{x^3y^5}\right)^3$

p) $(1+0.06)^3 \times (1+0.06)^{12}$

q) $\dfrac{(1.80)^5 \times (1.80)^3 \times (1.80)^2}{(1.80)}$

2. Simplifique.

a) 1^0

b) $(5a)^0 \times (3a^2)^0$

c) $b^{1/5} \times b^{1/4}$

d) $\dfrac{b^{1/5}}{b^{1/4}}$

e) $\left(\dfrac{b^{3/4} \times b^{6/8}}{b^{1/4}}\right)^{1/4}$

f) $(x^{-2})(x^{-5})(x^3)$

g) $(y^{-2})^3$

h) $(y^{-3})^{-5}(y^2)^{-2}$

i) $(a^{-1/4})^{-2}$

j) $(a^{-2/5})$

k) $\dfrac{(y^{-4/7})(y^{-4/7})^7}{y^{-1/5}}$

l) $(125^{-1/5})(125)^{-2/5}$

m) $(1+0.075)^{-5} \times (1+0.075)$

n) $\dfrac{(1.60)^{-4} \times (1+0.60)^{-1}}{(1.60)^0}$

3 Simplifique hasta la mínima expresión.

a) $-5(5)^{-2} =$

b) $-4a^{-2} =$

c) $(-4a)^{-2} =$

d) $\dfrac{(-2a)^4 \times 2a^{-2/4}}{(2a)^{-2} \times a^{2/4}} =$

e) $\dfrac{\left(x^{-2}\right)^{-4} \times \left(x^{1/4}\right)^2}{\left(x^{1/2}\right)^{-4} \times \left(x^{-2/4}\right)^4} =$

f) $\dfrac{4^0 - 2^{-4}}{4 - 2(4)^{-2}} =$

g) $(64)^{2/3} =$

h) $(-64)^{2/3} =$

i) $(64)^{-2/3} =$

j) $(-64)^{-2/3} =$

k) $\left[\left(27a^3\right)^{-1/3} \times \dfrac{1}{(a^{-3})^{1/6}}\right]^{-1} =$

l) $\left[8\left(x^3y^{-3}z^{-3}\right)^{1/3}\right]^{1/2} =$

m) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}b^{-1}} =$

n) $\left[\dfrac{2x^{-2}}{4x^2}\right]^{-1/2} + \left[\dfrac{64x^3}{27y^3}\right]^{-1/3} =$

o) $\left(-8x^3\right)^{-1/3} =$

p) $\dfrac{\left[(a-1)^5 x^2\right]^{2/3} \times \left[3ax^{1/6} - 3x^{1/6}\right]^2}{x^{1/6}} =$

q) $\dfrac{\left[x^3 y^{1/2}\right]^6 \times \left[3a^{1/4} b^3\right]^{-3}}{27} \times \dfrac{\left[a^{1/4} b\right]^{-2}}{\left[a^{1/4} b\right]^{-1}} \times \left[xy^2 x^{3/4} y^4\right]^{1/2} =$

4. Simplifique.

a) $\sqrt{x^2 y^3}$

b) $\sqrt[3]{y^{-3}}\,\sqrt[4]{x^5}$

c) $\dfrac{a^3 \times \sqrt[2]{a^4}}{\sqrt[5]{a^{10}}}$

d) $\left(\dfrac{\sqrt{b^3} \times \sqrt[3]{a^2 b^5}}{\sqrt[4]{a^3 b^7}}\right)^{-3}$

5. Determine el valor de las incógnitas en las siguientes ecuaciones.

a) $5^{x+1} = 3^{2x}$

b) $(1+0.02)^n = (10.765163)^{1/2}$

c) $100^{2/x} = (1+0.1)^x$

d) $500\dfrac{(1+0.04)^x - 1}{(1+0.04)^{1/4} - 1} = 3\,000$

e) $250 = 5\dfrac{(1+0.01)^y - 1}{0.01}$

f) $250 = 5\dfrac{1-(1+0.01)^{-n}}{0.01}$

6. Determine el logaritmo L.

a) $L = \log_2\ (512)$

b) $L = \log_4\left(\dfrac{1}{64}\right)$

c) $L = \log_5\ \sqrt[5]{3125}$

d) $L = \log_{10}\ \sqrt{10\,000}$

7. Determine el número N.

a) $\log_2 N = 0$

b) $\log_3 N = -3$

c) $\log_5 N = -1$

d) $\log_9 N = 1/2$

e) $\log_{10} N = 0$

f) $\log_{10} N = 3/2$

8. Determine la característica de:

a) 125
b) 347 250
c) 0.0000578
d) 4.75862475
e) 0.3
f) 35.4
g) 1 348
h) 40
i) 172.35
j) 1.0005

9. Determine la mantisa de:

a) 3
b) 30
c) 300
d) 3 000
e) 0.0003
f) 0.50
g) 4
h) 1.60
i) 9
j) 2 700

10. Determine el logaritmo común de:

a) 318
b) 600
c) 8 524
d) 0.375
e) 7.32
f) 1 000 000
g) 45 372 000
h) 0.0000045
i) 35.5
j) 40

11. Determine el antilogaritmo de:

a) $\overline{1}.301030$
b) 1.301030
c) –1.301030
d) 0
e) 4.25
f) $\overline{2}.602060$
g) –0.901090
h) 3.275
i) 2.2335
j) 0.901090

12. Exprese las siguientes relaciones con un solo logaritmo.

a) $(\log 4) - (\log 6) + (\log 10) =$

b) $(4\log 2) - (6\log 3) + \log 2^3 =$

c) $(\frac{1}{2}\log 16) - (\frac{1}{3}\log 64) + (\frac{1}{3}\log 27) =$

d) $(\log 5) - 1 =$

e) $\log 5 - 1) =$

f) $(\log 10) - (\log 5) + (\log 20) =$

13. Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales mediante el empleo de logaritmos:

a) $1(1+0.80)^n = 10$

b) $(1+0.75)^n = 5$

c) $1\,000(1+0.075)^n = 10\,000$

d) $1(1+0.50)^{-n} = 0.10$

e) $1(1+0.75)^{-n} = 0.10$

f) $100(1+1.00)^{-n} = 1$

g) $(1+0.20)^n = 2$

h) $1-(1+0.05)^{-n} = 0.5$

14. Determine la suma de las siguientes progresiones.

a) 50, 60, 70, 80, 90, 100

b) 32, 24, 16, 8

c) $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}$

d) $-\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{12}, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{12}$

15. ¿Qué cantidad de intereses pagará un tarjetahabiente bancario si adeuda $8 800 y los liquidará en 11 pagos mensuales más intereses sobre saldos insolutos a razón de 5% mensual? ¿Cuál será el importe del último pago?

16. Determine el último término y la suma de las siguientes progresiones.

a) 5, 40, 320… 5 términos

b) –3, 12, –48… 8 términos

c) $\frac{1}{7}, \frac{1}{49}, \frac{1}{343}\ldots$ 7 términos

d) $\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{27}\ldots$ 10 términos

17. Un padre de familia decide formar un fondo de ahorro que paga 3% de interés mensual, con el fin de costear los estudios profesionales de su hijo de 8 años. Inicia el fondo con \$500 y determina depositarle el doble del saldo existente en cada cumpleaños de su hijo hasta que éste cumpla dieciocho años. ¿Qué cantidad deberá depositar en el decimoquinto aniversario? ¿Qué cantidad deberá depositar en el decimoctavo año? ¿Cuánto dinero habrá depositado al finalizar el año número dieciocho?
18. La moneda de un país se ha devaluado, respecto al dólar, a razón de 2% mensual durante el último año. Suponiendo que este factor de devaluación se mantuviera constante durante el próximo año, ¿cuál será la paridad de dicha moneda al cabo de 12 meses si actualmente es de 100 unidades por un dólar?
19. Bajo el supuesto de una tasa de inflación de 2% mensual constante, ¿cuál será el poder adquisitivo de \$1 al cabo de 12 meses?
20. Determine la suma de las progresiones geométricas siguientes.
    a) 5, 0.5, 0.05, 0.005…
    b) 1, 1/10, 1/100…
    c) −1, 1/10, −1/100…
    d) $(1 + 0.50)^0$, $(1 + 0.50)^{-1}$, $(1 + 0.50)^{-2}$…
21. El señor Pérez debe \$8 000. Toma la decisión de pagar \$800 al final de cada 6 meses para disminuir la deuda, pero, además, debe pagar 2% por concepto de intereses. ¿Cuál será el interés total que debe pagar?
22. ¿Cuál será el tiempo que empleará una persona en saldar una deuda de \$2 000 si paga \$250 la primera semana, \$260 la segunda, \$270 la tercera y así sucesivamente?
23. Una máquina con un costo inicial de \$40 000 se deprecia a una tasa de 5% anual sobre el valor contable al inicio del ejercicio. ¿Cuál será su valor contable al final del 5o. año?
24. Una investigación arrojó que la población de una ciudad se incrementará 8% anual durante 5 años. Calcule el porcentaje total en que aumentará la población al final de los cinco años.

Matemáticas en internet. Fundamentos

Existen numerosos sitios en internet relacionados con los temas que se abordan en este capítulo. Por ejemplo, una búsqueda en Google de “sucesiones y progresiones” arroja 10 500 resultados, mientras que esa misma búsqueda en Yahoo! produce 224 000 resultados. Por otra parte, en YouTube existen 4 382 videos que abordan este tema. En esta sección se muestran sólo unos cuantos ejemplos de sitios útiles relacionados con los temas tratados.

1.1 Exponentes

- Información y ejemplos sobre exponentes y radicales.
  http://www.disfrutalasmatematicas.com/exponentes.html

1.2 Leyes de los exponentes

- Leyes de los exponentes presentadas de una manera amena.
  http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/exponentes-leyes.html
- Información y ejemplos sobre exponentes y radicales.
  http://www.galeon.com/student_star/expyrad01.htm

1.3 Exponente cero, negativo y fraccionario

- Exponentes especiales: exponente cero, exponentes negativos y exponentes fraccionarios.
  http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas15.htm
- Página en la cual se ilustra la forma en que se utiliza la notación científica con números muy grandes y con números muy pequeños.
  http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/notacion-cientifica.html
- Video en el cual se ilustra cómo elevar un número a una potencia, utilizando tres tipos diferentes de calculadoras científicas.
  http://youtu.be/1MM5fA08jOM

1.4 Logaritmos

- Definición y propiedades de los logaritmos.
  http://platea.pntic.mec.es/anunezca/ayudas/logaritmos/logaritmos.htm
- Explicación sobre logaritmos, antilogaritmos y ejercicios resueltos.
  http://www.vitutor.net/1/12.html

1.7 Progresiones aritméticas y 1.8 Progresiones geométricas

- Aplicación que permite generar los términos, el último término y la suma para progresiones tanto aritméticas como geométricas.
  http://132.248.129.43/~lugo/bach2/Sucesiones/index.html

- Presenta un desarrollo muy completo, más extenso que el abordado en el texto, con relación a sucesiones y progresiones.
  www.vitutor.com/al/sucesiones/res.html

- Documento que, aparte de repasar los conceptos básicos de ambos tipos de progresiones, tiene una parte muy interesante de aplicaciones titulada "Algunos problemas para refrescar las ideas" y que trata aplicaciones sobre 1) números pentagonales, 2) leyenda del inventor del ajedrez (que, por cierto tiene un error en los cálculos, ¿puede usted detectarlo?), 3) "A vueltas con los bancos", una aplicación financiera, 4) las progresiones y el crecimiento de la población; teorías de Malthus, 5) la sucesión de Fibonacci y el número áureo, y 6) la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y el número e.
  www.unizar.es/ttm/2005-06/PROGRESIONESII.pdf

CAPÍTULO
2
Interés simple

TEMARIO

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

- Explicar los conceptos de interés simple, tiempo, capital, monto, valor actual, tasa de interés, interés, descuento y ecuaciones de valores equivalentes
- Distinguir y explicar la diferencia entre descuento real y descuento comercial, así como entre tiempo real y tiempo aproximado
- Plantear y resolver ejemplos de cálculo de tasa de interés, tiempo, capital, monto, valor actual y descuento a interés simple
- Plantear y resolver ejemplos de ecuaciones de valores equivalentes a interés simple
- Resolver ejercicios y aplicaciones de interés simple utilizando la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®

2.1 Introducción y conceptos básicos

Suponga la siguiente situación:

El señor López obtiene un préstamo por \$20 000 que solicitó a un banco, y acuerda pagarlo después de dos meses, entregándole al banco \$20 400. Este caso permite ejemplificar una operación en la que interviene el interés simple. El supuesto fundamental del cual se parte es que el dinero aumenta su valor con el tiempo: el señor López obtuvo inicialmente \$20 000 y pagó, dos meses después, \$20 400, esto es, los \$20 000 que le prestaron más \$400 de interés que, de acuerdo con el supuesto básico, es la cantidad en que aumentó el valor del préstamo original en dos meses. Desde el punto de vista del banco, esos intereses son su ganancia por el hecho de haber invertido su dinero en el préstamo, y desde el punto de vista del señor López, son el costo de haber utilizado los \$20 000 durante dos meses.

Los elementos que intervienen en una operación de interés son, de acuerdo con el mismo ejemplo:

C = el capital que se invierte = \$20 000
t = el tiempo o plazo = dos meses
I = el interés simple = \$400
M = el monto = capital más intereses = \$20 400
i = la tasa de interés

La tasa de interés refleja la relación que existe entre los intereses y el capital; en el ejemplo,

$$i = \frac{400}{20\,000} = 0.02$$

Si se le multiplica por 100, este cociente indica que el capital ganó 2% de interés en dos meses, pues \$400 es 2% de \$20 000. Luego, para convertir a la misma base, se acostumbra expresar tanto la tasa de interés i como el tiempo t en unidades de año, por lo que, según el ejemplo, $t = 2$ meses, y si el año tiene 12 meses, el tiempo expresado en unidades de año es:

$$t = 2/12 = 1/6$$

Y la tasa de interés, si es de 0.02 por bimestre, en 6 bimestres será:

$$i = 0.02\,(6) = 0.12 \text{ o, expresado en porcentaje,}$$
$$0.12 \times 100 = 12\% \text{ anual}$$

La tasa de interés se puede expresar de dos maneras:

a) En decimales: 0.12.
b) En porcentaje: 12%.

Es importante observar que ambas son sólo expresiones distintas de lo mismo, sólo que la primera es la forma algebraica de plantearlo, mientras que su expresión porcentual es la que más se utiliza cuando se le maneja verbalmente. Además, también es de uso común hablar de tasas porcentuales de interés (por ejemplo: "con una tasa de 9% anual").

En resumen, y abundando sobre el ejemplo,

$$\begin{aligned} C &= \$20\,000 \\ I &= \$400 \\ t &= 1/6 \\ i &= 0.12 \\ M &= \$20\,400 \end{aligned}$$

y se puede observar que, en general, el monto es igual al capital más los intereses:

$$\begin{array}{ccccc} M & = & C & + & I \\ 20\,400 & = & 20\,000 & + & 400 \end{array} \tag{2.1}$$

y el interés es igual al capital multiplicado por la tasa y por el tiempo:

$$\begin{array}{ccccc} I & = & C & i & t \\ 400 & = & 20\,000 & (0.12) & (1/6) \end{array} \tag{2.2}$$

Combinando las dos expresiones anteriores:

$$M = C + Cit \tag{2.3}$$

$$M = 20\,000 + 20\,000\,(0.12)(1/6) = 20\,000 + 400 = 20\,400$$

Factorizando la expresión (2.3) se obtiene:

$$M = C\,(1 + it) \tag{2.4}$$

Al factor $(1 + it)$ se le conoce como *factor de acumulación con interés simple*.
Otra relación que se puede observar se obtiene despejando C en (2.4):

$$C = \frac{M}{(1+it)} = M(1+it)^{-1}$$

$$C = \frac{M}{(1+it)} = M(1+it)^{-1} = 20\,400(1.02)^{-1} = 20\,400(0.980392)$$

$$C = 20\,000$$

Este caso podría pensarse, con las mismas cantidades, en los siguientes términos: el señor Chávez tiene una deuda de \$20 400 que debe pagar *dentro de dos meses*. Si la operación está pactada a 12% anual de interés simple, ¿cuánto debería pagar para saldar su deuda el día de hoy?

La respuesta es, desde luego, \$20 000. En este caso se comprenderá por qué se acostumbra llamar a esta cantidad *valor actual* de la deuda o, lo que es lo mismo, valor actual de la operación. Es necesario observar que el capital y el valor actual representan lo mismo, sólo que en contextos diferentes: el capital es una cantidad que se invierte ahora para obtener después un monto superior, y el valor actual es, precisamente, el valor que tiene en este momento una cantidad cuyo valor se ha planteado en una fecha futura. En última instancia, ambos conceptos se pueden pensar y plantear uno en función del otro.

Más adelante se presentan otros ejemplos, para ilustrar de manera más clara los diversos conceptos que se han explicado hasta aquí.

2.2 Monto

EJEMPLO 2.2.1

Un comerciante adquiere un lote de mercancía con valor de \$3 500 que acuerda liquidar mediante un pago de inmediato de \$1 500 y un pago final 4 meses después. Acepta pagar 10% de interés anual simple sobre el saldo. ¿Cuánto deberá pagar dentro de 4 meses?

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} C &= 3\,500 - 1\,500 = 2\,000 \\ i &= 0.10 \\ t &= 4/12 = 1/3 \\ M &= 2\,000[1 + (0.10)(1/3)] = 2\,000(1.033333) \\ &= \$2\,066.67 \end{aligned}$$

Deberá pagar \$2 066.67, de los cuales \$2 000 son el capital que adeuda y \$66.67 los intereses de 4 meses.

EJEMPLO 2.2.2

Una persona deposita \$150 000 en un fondo de inversiones bursátiles que garantiza un rendimiento de 0.8% mensual. Si retira su depósito 24 días después, ¿cuánto recibe?

Solución:

$$\begin{aligned} C &= 150\,000 \\ i &= 0.8\% \text{ mensual} \\ t &= 24/30 \\ M &= 150\,000[1 + (0.008)(4/5)] \\ &= 150\,000(1 + 0.0064) \\ &= 150\,960 \end{aligned}$$

Observe que en este caso se plantea tanto el tiempo como la tasa en meses.

2.3 Valor actual o presente

Repasando, el valor actual, que equivale al capital, se puede encontrar despejando C en la fórmula del monto (2.4), como sigue:

$$C = \frac{M}{(1+it)} = M(1+it)^{-1}$$

EJEMPLO 2.3.1

Una persona participa en una "tanda" y le toca cobrar en el decimoctavo mes. Si dentro de 18 meses recibirá \$30 000, ¿cuál es el valor actual de su tanda, con un interés simple de 20% anual?

Solución:

M = \$30 000 es un monto, pues se trata de una cantidad de la que se dispondrá en una fecha futura.

$t = 18/12 = 1.5$

i = 20% anual

$$C = \frac{M}{(1+it)} = \frac{30\,000}{\left[1+(0.2(1.5))\right]}$$

$$C = 30\,000/1.30 = \$23\,076.92$$

En este caso, \$23 076.92 es el valor actual de \$30 000, realizables dentro de 18 meses con 20% anual de interés simple.

EJEMPLO 2.3.2

Un individuo compró un terreno por el cual pagó \$195 000 el primero de enero, y lo vende el primero de junio del año siguiente en \$256 000. Considerando sólo los valores de compra y venta, ¿fue una inversión conveniente la operación que realizó si la tasa de interés de mercado era de 11%?

Solución:

En este caso, para evaluar la conveniencia se calcula el valor actual de \$256 000, 17 meses atrás, a una tasa similar a las vigentes en ese lapso, para comparar esa cantidad con lo que pagó.

Pagado el primero de enero	*Valor actual de \$256 000, 17 meses antes, a 11% anual simple*
195 000	$C = \dfrac{256\,000}{1+(17/12)(0.11)} = \dfrac{256\,000}{1.155833}$
	$C = \$221\,485.28$

Ganó \$26 485.28, resultado de restar a \$221 485.28 (precio de venta), los \$195 000 del precio de compra, al haber invertido en el terreno en vez de haberlo hecho en una inversión bancaria o bursátil que habría tenido el mismo rendimiento de mercado.

2.4 Interés

EJEMPLO 2.4.1

Una persona obtiene un préstamo de $50 000 y acepta liquidarlo año y medio después. Acuerda que, mientras exista el adeudo, pagará un interés simple mensual de 1.5%. ¿Cuánto deberá pagar de interés cada mes?

Solución:

a)

$C = 50\,000$
$t = 1$ mes
$i = 1.5\% = 0.015$
$I = 50\,000(0.015)(1) = \$750$

Tendrá que pagar $750 mensuales.

Puesto que la tasa de interés y el plazo están expresados en meses (la misma unidad para ambos conceptos), el cálculo del interés es directo.

b) Para resolver este mismo ejemplo, pero expresando las cantidades en periodos anuales (ya no mensuales), se debe proceder de la siguiente manera.

Solución:

$C = 50\,000$
$t = 1/12$
$i = (0.015)(12) = 0.18$ anual
$I = 50\,000/1/12)(0.18) = \$750$

EJEMPLO 2.4.2

Si alguien deposita $75 000 en una cuenta bancaria que ofrece pagar 0.35% mensual simple, ¿cuánto recibirá mensualmente de intereses?

Solución:

$C = \$75\,000$
$i = 0.0035$ mensual
$I = \$75\,000(0.0035)(1)$
$I = \$262.50$ mensuales

Ejercicios de las secciones 2.1 a 2.4

1. Se obtiene un crédito por $180 000 a 160 días con 15% de interés anual simple. ¿Qué cantidad debe pagar al vencerse su deuda?
2. ¿Qué cantidad por concepto de interés simple mensual produce un capital de $40 000 a un interés de 13% anual simple?
3. Si una persona deposita hoy $50 000 a plazo fijo con 2.20% de interés mensual, y no retira su depósito y reinvierte sus intereses, ¿cuánto tendrá en su cuenta 3 meses después si la tasa de interés no varía?
4. Una persona adquiere hoy un terreno que cuesta $220 000. Si suponemos que el terreno aumenta su valor en forma constante y a razón de 0.2% mensual, ¿cuál será su valor después de 2 meses?
5. María Eugenia desea adquirir un inmueble dentro de 2 años. Supone que el enganche que tendrá que pagar en esas fechas será de $60 000. Si desea tener esa cantidad dentro de 2 años, ¿qué suma debe invertir en su depósito de renta fija que rinde 0.8% de interés mensual simple?

6. ¿Qué cantidad se debe invertir hoy a 1.8% de interés simple mensual para tener $20 000 dentro de dos meses?
7. ¿Cuál es el valor de un pagaré por $5 000 que vence el 15 de septiembre si se considera un interés de 5% anual simple y hoy es 11 de julio?
8. Para terminar de saldar una deuda, una persona debe pagar $3 500 el 15 de julio. ¿Con qué cantidad pagada hoy, 13 de marzo, liquidaría su deuda si se considera un interés de 6% anual?
9. Un mes después de haber obtenido un préstamo, José Luis debe pagar exactamente $850. ¿Cuánto obtuvo en préstamo, si el pago que debe hacer incluye intereses de 18% anual?
10. ¿Cuál es el valor actual de una letra de cambio de $ 9 000 que vence dentro de 60 días, si la tasa de interés es de 17% anual?
11. Una persona que cobra $5 000 mensuales de sueldo es despedida por problemas financieros de la empresa. En consecuencia, se le paga su correspondiente indemnización, que incluye 3 meses de sueldo, días por antigüedad y descuentos por impuestos, lo que arroja un saldo neto de $45 000. ¿Qué ingreso fijo mensual le representaría al ahora desempleado depositar el monto de su liquidación en una inversión que paga 18% de interés simple anual?
12. ¿Qué cantidad de dinero colocada en una inversión de renta fija que paga 10% de interés simple anual produce intereses mensuales de $450?
13. ¿Cuánto debe pagar por concepto de intereses una persona que tiene una deuda por $22 000 si la liquida 6 meses después y le cobran intereses a razón de 16% anual simple?
14. ¿Cuánto tendría que pagar mensualmente por concepto de intereses una persona que adeuda $7 500 si le cobran 8% simple semestral?
15. Salomé tiene 2 deudas:

   a) Le debe $80 000 a un banco que cobra 1.5% mensual.
   b) Compró a crédito un automóvil; pagó determinado enganche y le quedó un saldo de $125 000 que comenzará a pagar dentro de 8 meses; mientras tanto, debe pagar 12% de interés simple anual durante ese lapso.
   ¿Cuánto pagará en los próximos seis meses por concepto de intereses?

16. Los movimientos de la cuenta de crédito de un cliente fueron:

Saldo registrado el 14 de febrero	$450
Cargo el 27 de febrero	$150
Abono el 31 de marzo	$400
Cargo el 15 de abril	$1 000
Cargo el 30 de abril	$100

Si el almacén cobra 14% anual de interés, ¿qué cantidad deberá pagar el cliente el 15 de mayo para saldar la cuenta?

17. ¿Cuál es el saldo al 1 de junio de una cuenta de crédito a la que se le carga mensualmente 18% de interés simple anual y que ha tenido los siguientes movimientos?

1 de marzo	Saldo	$850
15 de marzo	Abono	$150
31 de marzo	Cargo	$450
15 de mayo	Abono	$200
31 de mayo	Abono	$250

18. Diez por ciento anual es un tipo razonable de interés de rendimiento del dinero. Por ello, ¿cuál de las tres ofertas de venta siguientes es más conveniente para la compra de un terreno?

   a) $90 000 al contado.
   b) $45 000 al contado y el saldo en dos pagarés: uno por $25 000 a 30 días, y otro por la misma cantidad a 60 días.
   c) $30 000 al contado y un pagaré de $64 000 a 30 días.

19. A las tasas vigentes, ¿cuánto rinde de intereses mensuales un millón de pesos en un depósito a plazo fijo de:

a) 28 días? *b*) 91 días? *c*) 180 días?

20. A las tasas vigentes, ¿qué cantidad se recibiría al final de la transacción por un pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento por $50 000 a un plazo de 3 meses?

2.5 Tasa de interés

Se revisan aquí algunos ejemplos en los que se debe determinar la tasa de interés de operaciones con interés simple.

EJEMPLO 2.5.1

Una persona compra un reproductor de discos compactos que cuesta $1 500. Paga un enganche de $800 y acuerda pagar otros $750 tres meses después. ¿Qué tasa de interés simple pagó?

Solución:

$C = 1500 - 800 = 700$, la cantidad que queda debiendo

$t = 3/12 = 0.25$

$I = \$750 - \$700 = \$50$

y, con $I = Cit$

$$\$50 = \$700\, i(0.25)$$
$$\$50 = i(700)(0.25) = 175i$$
$$i = (50/175)$$
$$i = 0.285714$$

Pagó un interés de 28.57% anual.

EJEMPLO 2.5.2

Una persona compró un terreno el 1 de enero en $195 000 y lo vendió 17 meses después en $256 000. ¿Qué tasa de interés simple anual le rindió su inversión?

Solución:

$C = 195\,000$

$M = 256\,000$

$t = 17/12$ años

$i = ?$

de $M = C(1 + it)$

$$256\,000 = 195\,000[1 + i(17/12)]$$
$$\frac{256\,000}{195\,000} = 1 + 17/12\, i = 1.312821$$
$$\frac{17i}{12} = 1.312821 - 1 = 0.312821$$
$$i = \frac{12(0.312821)}{17} = 0.220814$$

La tasa es de 0.2208 anual simple o 22.08% anual simple.

EJEMPLO 2.5.3

¿Cuál es la tasa de interés simple mensual equivalente a una tasa de 54% anual?

$$i = \frac{0.54}{12} = 0.045 \text{ o } 4.5\% \text{ mensual}$$

EJEMPLO 2.5.4

¿Cuál es la tasa de interés mensual simple equivalente a una tasa de 0.165 semestral?

$$i = \frac{0.165}{6} = 0.0275 = 2.75\% \text{ mensual}$$

2.6 Plazo o tiempo

EJEMPLO 2.6.1

¿En cuánto tiempo se duplica un capital invertido a una tasa de 19% de interés anual simple?

De $M = C(1 + it)$ suponiendo $M = 2$ y $C = 1$

$$2 = 1[1 + (0.19)t]$$
$$1 + 0.19\,t = 2$$
$$0.19\,t = 2 - 1 = 1$$
$$t = 1/0.19$$
$$t = 5.26 \text{ años}$$
$$0.26 \text{ años} = 365\,(0.26) \text{ días} = 94.9 \text{ días}$$
$$t = 5 \text{ años y } 95 \text{ días, aproximadamente}$$

Observe que para resolver este problema sólo se necesitó suponer un monto igual al doble de cualquier capital. Si se utiliza $M = 30$ $C = 15$

$$30 = 15(1 + 0.19\,t)$$
$$30/15 = 1 + 0.19\,t$$
$$2 = 1 + 0.19\,t$$
$$t = 1/0.19 \text{ que es la misma expresión que se obtuvo antes}$$

EJEMPLO 2.6.2

¿En cuánto tiempo se acumularían \$5 000 si se depositan hoy \$3 000 en un fondo que paga 1.2% simple mensual?

$$M = 5\,000$$
$$C = 3\,000$$
$$i = 0.012 \text{ mensual}$$

$$5\,000 = 3\,000(1 + 0.012t)$$
$$\frac{5\,000}{3\,000} = 1 + 0.012\,t$$
$$1.666667 = 1 + 0.012\,t$$
$$0.012\,t = 0.666667$$
$$t = 0.666667/0.012$$
$$t = 55.56 \text{ meses}$$

Como la tasa i estaba dada en meses, el resultado que se obtiene en t también está en meses, y 0.56 meses = 0.56 (30) días = 16.8 días; entonces, se deben depositar hoy \$3 000 a 1.2% mensual simple durante 55 meses y 17 días, aproximadamente, para acumular la cantidad solicitada.

2.7 Tiempo real y tiempo aproximado

Existen situaciones en las que el plazo de una operación se especifica mediante fechas, en lugar de mencionar un número de meses o años.

EJEMPLO 2.7.1

¿Cuál será el monto el 24 de diciembre de un capital de \$10 000 depositado el 15 de mayo del mismo año en una cuenta de ahorros que paga 19% anual simple?

$$C = 10\,000$$
$$i = 0.19$$
$$t = ?$$

a) Para calcular el *tiempo real* es necesario determinar el número de días que transcurren entre las dos fechas (observe que el 15 de mayo no se incluye, ya que si se deposita y retira una cantidad el mismo día, no se ganan intereses).

16 días de mayo
30 días de junio
31 días de julio
31 días de agosto
30 días de septiembre
31 días de octubre
30 días de noviembre
24 días de diciembre
223

y,
$$t = 223/365$$
$$M = 10\,000[1 + (0.19)(223/365)]$$
$$M = 10\,000(1.116082)$$
$$M = 11\,160.82$$

b) En muchos casos se calcula el tiempo en forma aproximada, contando meses enteros de 30 días y años de 360 días.

Por lo tanto, del 16 de mayo al 15 de diciembre hay 7 meses, más 9 días del 15 de diciembre al 24 de diciembre:

$$7(30) + 9 = 219 \text{ días}$$

$$t = 219/360$$
$$M = 10\,000\,[1 + 0.19(219/360)]$$
$$= 10\,000(1.115583)$$
$$= 11\,155.83$$

Aunque ocasiona diferencias en los valores que se obtienen, se utiliza el cálculo aproximado del tiempo debido a que es más sencillo y es común su uso en transacciones comerciales.

EJEMPLO 2.7.2

El 11 de julio se firmó un pagaré por \$1 700 con 18% de interés. ¿En qué fecha los intereses llegarán a \$150?

a) Con tiempo exacto:

$$I = 150$$
$$C = 1\ 700$$
$$i = 0.18$$
$$I = Cit$$
$$150 = \$1\ 700(0.18)\ t$$
$$150 = \$306\ t$$
$$t = \frac{150}{306} = 0.490196 \text{ años, pues la tasa está en años}$$

0.490196(365) = 178.92 o, *aproximando*, 179 días

Al 31 de julio	20
Al 31 de agosto	20 + 31 = 51
Al 30 de septiembre	51 + 30 = 81
Al 31 de octubre	81 + 31 = 112
Al 30 de noviembre	112 + 30 = 142
Al 31 de diciembre	142 + 31 = 173
Al 6 de enero	173 + 6 = 179

El 6 de enero del año siguiente se acumulan $150 de intereses.

b) Con tiempo aproximado.

$$t = 0.490196 \text{ [igual que en } a\text{)]}$$
$$0.490196(360) = 176.47 \text{ o, aproximando, } 177 \text{ días}$$

Como sabemos, 177 días son 5 meses y 27 días, por lo que del 11 de julio más 5 meses = 11 de diciembre. A partir de esta fecha más 27 días = 7 de enero.

Ejercicios de las secciones 2.5 a 2.7

21. Encuentre el interés simple:

a) real y
b) aproximado u ordinario de un préstamo de $1 500 a 60 días, con 15% de interés simple.

22. ¿Qué forma de calcular el tiempo, real u ordinario, produce una mayor cantidad de intereses?
23. De acuerdo con el tiempo ordinario, ¿cuántos días transcurren desde el 15 de marzo hasta el 18 de diciembre?
24. De acuerdo con el criterio real, ¿cuánto tiempo transcurre desde el 14 de mayo hasta el 15 de noviembre?
25. ¿A qué tasa de interés simple anual $2 500 acumulan intereses por $250 en 6 meses?
26. ¿A qué tasa de interés simple se duplica un capital en 20 meses?
27. ¿En qué tiempo $2 000 se convierten en $2 500 a 14% de interés simple anual?
28. Una persona le prestó $400 a un amigo, y 4 meses después le cobró $410. ¿Qué tasa anual de interés pagó el amigo?
29. El señor Martínez obtiene un préstamo por $2 000 y paga después de 8 meses $2 200. ¿Qué tasa de interés mensual simple le cobraron?
30. Una bicicleta cuesta $800. Un comprador paga $500 al contado y el resto a 60 días, con un recargo de 5% sobre el precio al contado. ¿Qué tasa de interés anual simple le aplicaron?
31. ¿Cuál es la tasa de interés simple proporcional bimestral equivalente a una tasa de 16% anual?
32. ¿Cuál es la tasa simple anual equivalente a una tasa trimestral simple de 5%?
33. ¿Cuál es la fecha de vencimiento de un pagaré firmado el 15 de junio a un plazo de 180 días?
34. Una señora reembolsa $205.08 por un pagaré de $185 firmado el 10 de mayo con 38% de interés simple anual. ¿Cuándo lo pagó?

35. Una persona adquiere una licuadora que cuesta \$320 el 14 de agosto y la paga el 26 de noviembre con un abono de \$350. ¿Qué tasa de interés simple anual exacto pagó?
36. El 15 de febrero se firmó un pagaré de \$1 500 con 22% de interés simple anual. ¿En qué fecha los intereses sumarán \$400?
37. Investigue qué tasa de interés simple mensual carga alguna tienda de departamentos sobre cuentas de crédito corriente.
38. ¿Cuál es la tasa de interés simple anual que pagan los Bonos del Ahorro Nacional si duplican la inversión en cinco años?

2.8 Descuento

El descuento es una operación de crédito que se lleva a cabo principalmente en instituciones bancarias y que consiste en que éstas adquieren letras de cambio o pagarés, de cuyo valor nominal *descuentan* una suma equivalente a los intereses que devengaría el documento entre la fecha en que se recibe y la fecha del vencimiento. Con esta operación se anticipa el valor actual del documento.

Existen básicamente dos formas de calcular el descuento:

- El descuento comercial.
- El descuento real o justo.

2.8.1 Descuento comercial

En este caso la cantidad que se descuenta se calcula sobre el valor nominal del documento, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2.8.1

Observe el pagaré que aparece abajo.

Si el banco realiza operaciones de descuento a 20% anual, y si el señor Díaz desea descontar el documento el 15 de junio, los \$185 000 (el valor nominal del pagaré) devengarán los siguientes intereses (descuento) durante los 2 meses en que se adelanta el valor actual del documento:

$$\text{descuento} = D$$

$$D = Mit = Mdt \tag{2.5}$$

en donde d representa la tasa de *descuento*

$$185\,000(2/12)(0.20) = 185\,000(0.033333) = 6\,166.67$$

Núm. 0000 México, D.F. a 10 de mayo de 20 XX \$ 185 000

Por este PAGARÉ prometo(emos) pagar incondicionalmente a la orden de Alfredo Díaz Villanueva el día 15 de agosto de 20XX la cantidad de ciento ochenta y cinco mil pesos 00/100 valor recibido en mercancía a mi (nuestra) entera satisfacción.

En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obligo(amos) a cubrir % mensual por concepto de intereses moratorios, sin que por eso se entienda prorrogado el plazo. Este documento forma parte de una serie de documentos, por lo que la falta de pago de uno de ellos faculta aplicar el artículo 79 en relación con el No. 174 de la Ley General de Títulos y Operaciones de Crédito.

Alma González Nava

En consecuencia, \$6 166.67 es el descuento que se aplica:

valor nominal	185 000.00
menos *descuento*	6 166.67
valor anticipado	178 833.33

Por lo tanto, el señor Díaz recibe \$178 833.33, que es el *valor comercial* del documento el 15 de junio, ya que se aplicó el *descuento comercial*. Tal como se había señalado al principio, el descuento se calculó con base en el valor nominal del pagaré.

EJEMPLO 2.8.2

Una empresa descontó en un banco un pagaré. Recibió \$166 666.67. Si la tasa de descuento es de 30% y el pagaré vencía 4 meses después de su descuento, ¿cuál era el valor nominal del documento en la fecha de su vencimiento?

SOLUCIÓN:

Aquí
$$C = 166\,666.67$$
$$d = 0.30$$
$$t = 4/12 \text{ de año} = 1/3 \text{ de año}$$

Se sabe que el descuento $(D) = Mdt$ y $M = C + D$

$$D = (C + D)\,dt = Cdt + Ddt$$
$$D - Ddt = Cdt$$
$$D(1 - dt) = Cdt$$
$$D = \frac{Cdt}{1 - dt}$$
$$D = \frac{166\,666.67(0.30)(1/3)}{1-(0.30)(1/3)} = \frac{166\,666.67(0.10)}{1-0.10} = \frac{16\,666.67}{0.90} =$$
$$D = \$18\,518.52$$

Por lo tanto, el valor del pagaré en su fecha de vencimiento es:

$$166\,666.67 + 18\,518.52 = \$185\,185.19$$

EJEMPLO 2.8.3

Una empresa descuenta un documento por el cual recibe \$945.05. Si la tasa de descuento es de 25% y el valor nominal del documento era de \$1 000, ¿cuánto tiempo faltaba para el vencimiento?

SOLUCIÓN:

$$M = 1\,000$$
$$C = 945.05$$
$$d = 0.25$$
$$D = 1\,000 - 945.05$$
$$D = 54.95$$
$$D = Mdt$$
$$54.95 = 1\,000(0.25)t$$

$$t = \frac{54.95}{250} = 0.21980 \text{ de año} = 0.21980(12)\text{meses} \approx 2.64 \text{ meses}$$

0.64 meses (30) = 19.20 o, *aproximando*, 19 días.

El plazo es de 2 meses y 19 días.

2.8.2 Descuento real o justo

A diferencia del descuento comercial, el descuento justo se calcula sobre el valor real que se anticipa, y no sobre el valor nominal.

EJEMPLO 2.8.4

Con los datos del ejemplo 2.8.1: $M = \$185\,000$

$t = 2/12$

$d = 0.20$

SOLUCIÓN:

De acuerdo con el descuento real, sustituyendo en la fórmula del monto a interés simple (el interés real):

$$M = C(1 + it)$$
$$185\,000 = C[1 + 0.20(2/12)]$$
$$185\,000 = C(1 + 0.033333)$$
$$C = \frac{185\,000}{1.033333} = 179\,032.26$$

Por lo que el descuento asciende a

$$185\,000 - 179\,032.26 = \$5\,967.74$$

que es un tanto inferior al descuento comercial.

EJEMPLO 2.8.5

Datos del ejemplo 2.8.2: $C = 166\,666.67$

$d = 0.30$

$t = 1/3$

SOLUCIÓN:

$$M = 166\,666.67[1 + 0.3(1/3)]$$
$$M = 166\,666.67(1.10)$$
$$M = \$183\,333.34$$

Si la operación se hubiera llevado a cabo bajo descuento real, el valor nominal del pagaré habría sido de $183 333.34.

Observe la diferencia con los resultados obtenidos en el ejemplo 2.8.2, bajo descuento comercial.

Descuento justo = $183 333.34 − 166 666.67 = 16 666.67

Descuento comercial = 185 185.19 − 166 666.67 = 18 518.52

El descuento justo equivale a 10% del capital, en tanto que el descuento comercial equivale a 10% del monto.

EJEMPLO 2.8.6

Datos del ejemplo 2.8.3: $M = 1\,000$

$C = 945.05$

$d = 0.25$

SOLUCIÓN:

$$M = C(1 + dt)$$
$$1\,000 = 945.05(1 + 0.25t)$$

$$\frac{1\,000}{945.05} = (1 + 0.25t)$$
$$1.058145 = 1 + 0.25t$$
$$1.058145 - 1 = 0.25t$$
$$\frac{0.058145}{0.25} = t$$
$$t = 0.232580$$

0.232580 años = 2.79096 meses = 2 meses 23.72 días

Plazo con descuento comercial: 2 meses y 19 días
Plazo con descuento real: ≈ 2 meses y 24 días

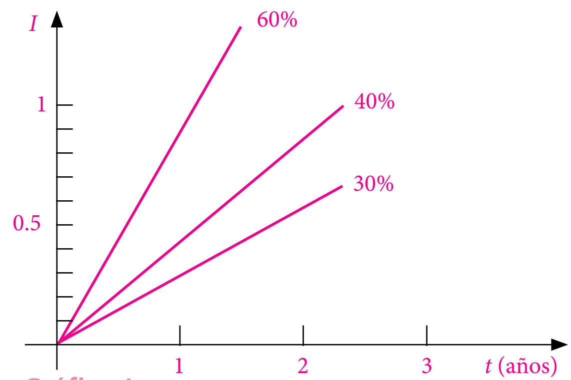
2.9 Gráficas de interés simple

Graficar I y M en un sistema de coordenadas rectangulares ayuda a observar lo que le ocurre al dinero con el tiempo.

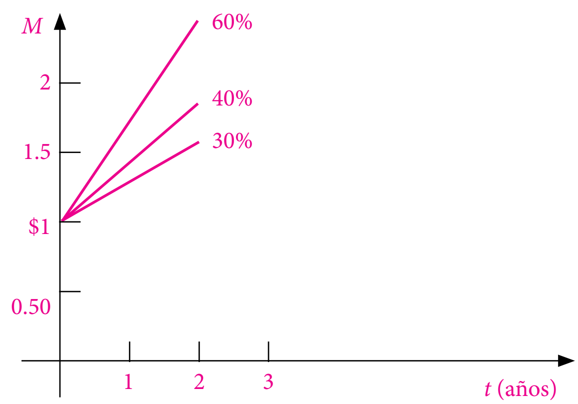
2.9.1 Gráfica de *I*

Ya se vio que	$I = Cit$
Si se supone que	$C = 1$
Entonces	$I = it$

De esta forma, la gráfica de los valores de I en función del tiempo son líneas rectas que pasan por el origen y que tienen como pendiente i, como puede apreciarse en la gráfica A.



Gráfica A



Gráfica B

Observe que, como era de esperarse, la recta sube más rápidamente (el interés es mayor) cuando la pendiente (la tasa de interés) es mayor.

2.9.2 Gráfica de *M*

De $\qquad M = C(1 + it)$

Si $\qquad C = 1 \quad M = 1 + it$

y $(1 + it)$ representa el *monto* de \$1 para diferentes valores de i de t (gráfica B).

Al igual que en la gráfica del interés, la recta sube con mayor rapidez (el monto es mayor) cuando la pendiente (la tasa de interés) es mayor.

Ejercicios de las secciones 2.8 y 2.9

39. Elabore una gráfica del interés que se produce en un mes con un capital de \$1 000 invertidos en depósitos a plazo fijo de:

a) 60 días *b*) 90 días *c*) 180 días *d*) 360 días

40. Confeccione otras gráficas con las mismas alternativas, pero considerando el monto.

41. ¿Cuál es el descuento comercial de un documento que vence dentro de 5 meses, y que tiene un valor nominal de \$3 850, si se le descuenta a una tasa de 18% tres meses antes de su vencimiento?

42. ¿Cuál es el descuento real del documento del ejercicio 41?

43. Si se descuenta el documento de la página siguiente a una tasa de 23% el 29 de agosto.

a) ¿Cuál sería el descuento comercial? *b*) ¿Cuál sería el descuento justo?

Núm. 0000 Zihuatanejo, Gro,. a 10 de marzo de 20 XX $ 580 000

Por este PAGARÉ prometo(emos) pagar incondicionalmente a la orden de Alfonso Martínez Sánchez el día 18 de octubre de 20XX la cantidad de quinientos ochenta mil pesos 00/100 valor recibido en efectivo a mi (nuestra) entera satisfacción.

En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obligo(amos) a cubrir % mensual por concepto de intereses moratorios, sin que por eso se entienda prorrogado el plazo. Este documento forma parte de una serie de documentos, por lo que la falta de pago de uno de ellos faculta a aplicar el artículo 79 en relación con el No. 174 de la Ley General de Títulos y Operaciones de Crédito.

44. ¿En qué fecha se descontó un documento con valor nominal de \$3 000, si su fecha de vencimiento era el 29 de diciembre, el tipo de descuento 15% y el descuento comercial fue de \$112.50?

45. ¿En qué fecha se descontó un documento con valor nominal de \$5 750, si su fecha de vencimiento era el 15 de octubre, el tipo de descuento comercial 32% y el descuento de \$531.56?

46. ¿En qué fecha se descontó un documento con valor nominal de \$1 250, si su fecha de vencimiento era el 27 de junio, el tipo de descuento 42% y se recibieron \$1 217.92 netos?

47. ¿Qué tasa de descuento real se aplicó a un documento con valor nominal de \$700, si se descontó 60 días antes de su vencimiento y se recibieron \$666.67 netos? Considere *a*) tiempo aproximado y *b*) tiempo real.

48. ¿Qué tasa de descuento real se aplicó a un documento con valor nominal de \$1 000, si se descontó 45 días antes de su vencimiento y el descuento fue de \$30.48?

49. ¿Qué tasa de descuento comercial se aplicó a un documento con valor nominal de \$1 750, si se descontó 90 días antes de su vencimiento y se recibieron \$1 592.50 netos?

50. ¿Qué tasa de descuento comercial se aplicó a un documento con valor nominal de \$38 500, si se descontó 15 días antes de su vencimiento y el descuento fue de \$315?

51. ¿Cuál es el valor nominal de un pagaré por el cual se recibieron $1439.79, si se descontó comercialmente a una tasa de 17%, 85 días antes de su vencimiento?
52. ¿Cuál era el valor nominal de un documento que se descontó comercialmente 2 meses antes de su vencimiento, si la tasa de descuento fue de 18% y el descuento importó $150?
53. ¿Con cuántos días de anticipación se descontó un documento cuyo valor era de $4 270 si el tipo de descuento comercial fue de 27% y el descuento aplicado fue de $288.22?
54. ¿Con qué anticipación se descontó un documento cuyo valor nominal era de $1 300, con tasa de descuento comercial de 35%, si la cantidad neta recibida fue de $1 154.04?
55. ¿Cuál era la fecha de vencimiento de un pagaré con valor nominal de $3 500, por el cual se recibieron $3 420.86 netos el 14 de julio, si el tipo comercial de descuento aplicado fue de 22%?
56. ¿Cuál era la fecha de vencimiento de un pagaré con valor nominal de $240 000, por el que se recibieron $227 680.00 el 14 de diciembre, si la tasa de descuento aplicada fue de 22%?
57. ¿Cuál era la fecha de vencimiento de un pagaré nominal de $17 000 que se descontó comercialmente a una tasa de 27% el 12 de enero, cuyo descuento ascendió a $420.75?
58. ¿Cuál era la fecha de vencimiento de un pagaré con valor nominal de $748, que fue descontado a tasa real, el 17 de octubre, a 11.5% y cuyo descuento ascendió a $15.69?
59. El señor López le debe al señor Montiel $5 000. Éste acepta como pago un documento a 90 días; si el señor Montiel puede descontarlo de inmediato en un banco que aplica una tasa de descuento de 30% anual simple, ¿cuál debe ser el valor nominal del documento para que el señor Montiel reciba del banco los $5 000 adeudados?
60. Si un banco desea ganar 15% de interés simple en el descuento de documentos, ¿qué tasa de descuento debe utilizar si el plazo es de *a*) 3 meses y *b*) 9 meses?
61. El Banco del Norte descuenta a un cliente a una tasa de 20% un pagaré con valor nominal de $2 500 000 que vence en 60 días. Ese día dicho banco descuenta en el Banco Agrícola ese mismo documento a una tasa de 18%. ¿Cuál fue la utilidad que obtuvo?
62. ¿Cuál es el precio de colocación de un certificado de tesorería (CETE), con valor nominal de $10, que se coloca a una tasa de descuento de 9%, y que tiene un vencimiento a 28 días?

2.10 Ecuaciones de valores equivalentes

Es un caso muy frecuente, y por eso importante, que en las operaciones financieras haya dos o más transacciones diferentes que deben replantearse para transformarlas en una operación única.

Este planteamiento de ecuaciones de valores equivalentes es uno de los más importantes en matemáticas financieras, por lo que es necesario asegurarse de que se comprenda cabalmente. En todos los demás temas se encontrarán abundantes ejemplos de este concepto.

En su forma más simple podría considerarse, por ejemplo, que la fórmula del monto a interés simple es una ecuación de valores equivalentes, ya que

$$M = C(1 + it)$$

El monto M es *equivalente* a un capital C, colocado a un tiempo t y a una tasa i.

En seguida se presentan otros ejemplos:

EJEMPLO 2.10.1

Una empresa firma un pagaré por $120 000 a 90 días, a 25%. Treinta días después, contrae una deuda por $100 000 para pagarla 2 meses después, sin intereses. Dos meses después de la primera fecha, acuerda con un acreedor pagar $150 000 en ese momento y, para saldar el resto de su deuda, hacer un pago final 3 meses después de la última fecha, con interés de 30%. Determine el pago final convenido.

Solución:
En primer lugar, conviene identificar que las operaciones implicadas son cuatro, dos de contratación de deuda y dos de pago. Por otro lado, observe que el valor total de las operaciones de adeudo debe ser igual al valor total de las operaciones de pago:

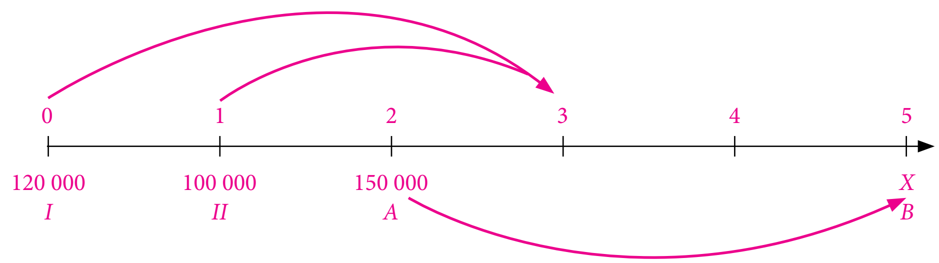
Operaciones de contratación de deuda	Operaciones de pago
I. $120 000 a 90 días a 25%	*A.* $150 000 dos meses después
II. 30 días después $100 000 a dos meses, sin interés	*B.* Pago final (desconocido), cinco meses después de la primera fecha

Con base en el cuadro anterior se puede plantear la *equivalencia* en este simple ejemplo, como:

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = A + B$$

De esta idea proviene el nombre de *ecuaciones equivalentes*.

Se acostumbra utilizar lo que se conoce como *diagramas de tiempo y valor* para representar la situación gráficamente:



Sobre la recta se representa el tiempo; en este caso, en meses.

- Sobre el tiempo 0 está marcada la operación I.
- Sobre el tiempo 1 está marcada la operación II.
- Sobre el tiempo 2 está marcada la operación *A*.
- Sobre el tiempo 5 está marcada la operación *B*.

En esta última operación, la *X* representa la cantidad que se trata de calcular.

Ahora bien, para determinar la equivalencia es necesario encontrar el valor de las diferentes operaciones en una sola fecha para que sea posible compararlas. Esto es así porque, como se sabe, el valor del dinero es diferente en tiempos diferentes, y las operaciones están planteadas en tiempos distintos.

La fecha que se elige para hacer coincidir el valor de las diferentes operaciones se conoce como *fecha focal*, y en el ejemplo es fácil ver que resulta conveniente escoger como fecha focal el momento en que se debe realizar el pago final para saldar todas las operaciones (cinco meses después de la primera fecha). Así,

I. El valor de la operación I dentro de 3 meses es:

$120\,000[1 + (0.25)(3/12)] = 120\,000(1.0625) = 127\,500$, que es su valor a los 90 días (3 meses)

y luego de su valor a 60 días hasta el quinto mes (2 meses más), a 30% que fue lo convenido para saldar la operación.

$$127\,500[1 + (0.30)(2/12)] = 127\,500(1.0500) = 133\,875$$

La operación I (120 000 en el tiempo 0) *equivale* a $133 875 en 5 meses.

II. Para la operación II:

Esta operación se contrató sin intereses, por lo cual vale 100 000 dos meses antes de la fecha focal, en la cual su valor será:

$$100\,000[1 + (0.30)(2/12)] = 100\,000(1.0500) = 105\,000$$

A. Para ésta, los $150 000 que pagó a los 2 meses, valen al quinto mes:

$$150\,000[1 + (0.30)(3/12)] = 150\,000(1.075) = \$161\,250$$

B. Finalmente, X se realizará en la fecha focal, por lo que estará dado a su valor en ese momento.

De regreso al planteamiento de la ecuación de *valores equivalentes*.

Valor total de las deudas = valor total de los pagos

$$\begin{aligned} \mathrm{I} + \mathrm{II} &= A + B \\ 133\,875 + 105\,000 &= 161\,250 + X \\ X &= 133\,875 + 105\,000 - 161\,250 \\ X &= 77\,625 \end{aligned}$$

que es la cantidad que habrá de pagar esa persona en el quinto mes para saldar todas las operaciones.

Ahora conviene observar en forma resumida *todo* lo que se hizo para llegar a la solución.

Valor total de las deudas = valor total de los pagos

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = A + B$$
$$133\,875 + 105\,000 = 161\,250 + X$$

$$\begin{aligned} &27\,500(1.0500) + 100\,000(1.0500) = 150\,000(1.0750) + X \\ &120\,000(1.0625)(1.0500) + 100\,000(1.0500) = 150\,000(1.0750) + X \\ &120\,000[1 + (0.25)(3/12)][1 + (0.30(2/12)] + 100\,000[1 + (0.30)(2/12)] = \\ &150\,000[1 + (0.30)(3/12)] + X \end{aligned}$$

Esta expresión representa el planteamiento completo, donde a cada cantidad se le aplicarán los valores correspondientes de tiempos y tasas de interés para encontrar su valor en la fecha focal.

En los casos de interés simple es muy importante identificar la fecha focal de acuerdo con lo pactado en las operaciones, pues el cambio de fecha focal produce variaciones en las cantidades. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.10.2

Resuelva el ejemplo 2.10.1 utilizando como fecha focal el cuarto mes, en vez del quinto.

SOLUCIÓN:

Deudas = Pagos

$$\begin{aligned} &120\,000[1 + (0.25)(3/12)][1 + (0.3)(1/12)] + 100\,000[1 + (0.3)(1/12)] = \\ &150\,000[1 + (0.3)(2/12)] + \frac{X}{1+(0.3)(1/12)} \\ &120\,000(1.0625)(1.0250) + 100\,000(1.0250) = 150\,000(1.0500) + \frac{X}{1.0250} \\ &130\,687.50 + 102\,500 = 157\,500 + \frac{X}{1.0250} \\ &233\,187.50 - 157\,500 = \frac{X}{1.0250} \\ &X = 75\,687.50(1.0250) \\ &X = 77\,579.69 \end{aligned}$$

Esta cantidad es diferente a la que se encontró utilizando el quinto mes como fecha focal. Este ejemplo indica que en el caso de las ecuaciones de valores equivalentes a interés simple, las *fechas focales diferentes producen resultados diferentes*.

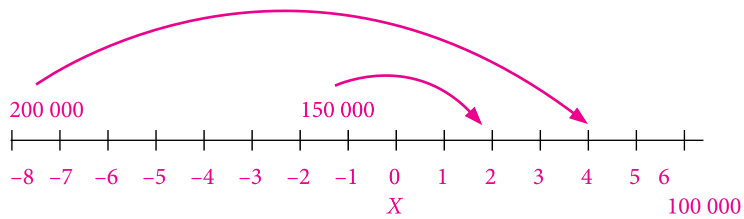
EJEMPLO 2.10.3

Una persona contrajo una deuda hace 8 meses por $200 000 con 40% de interés simple, que vence dentro de 4 meses. Además debe pagar otra deuda de $150 000 contraída hace 2 meses, con 35% de interés simple y que vence dentro de dos meses. Considerando un interés de 42%, ¿qué pago deberá hacer hoy para saldar sus deudas, si se compromete a pagar $100 000 dentro de 6 meses?

Solución:

Las deudas son $200 000 de 8 meses antes, que vence dentro de 4 meses, a 40% y de $150 000 de 2 meses antes, que vence dentro de 2 meses, a 35%; los pagos son: X hoy, $100 000 dentro de 6 meses.

La fecha focal es el día de hoy.
El diagrama de tiempo y valor es:



A su vencimiento, el valor de la primera deuda es:

$$200\,000[1 + 0.40(12/12)]$$
$$200\,000\,(1.4) = 280\,000$$

mientras que su valor en la fecha focal asciende a

$$\frac{280\,000}{1+(0.42)(4/12)} = \frac{280\,000}{1.14} = 245\,614.04$$

A su vencimiento, el valor de la segunda deuda es:

$$150\,000[1 + 0.35(4/12)] = 167\,500$$

y su valor en la fecha focal

$$\frac{167\,500}{1+(0.42)(2/12)} = \frac{167\,500}{1.07} = 156\,542.06$$

El valor de $100 000 en la fecha focal es

$$\frac{100\,000}{1+(0.42)(6/12)} = \frac{100\,000}{1.21} = 82\,644.63$$

en donde

$$X = 245\,614.04 + 156\,542.06 - 82\,644.63$$
$$X = 319\,511.47$$

2.11 Aplicaciones, ventas a plazo, tarjetas de crédito, préstamos prendarios (empeño), pagos anticipados de facturas

EJEMPLO 2.11.1

Suponga que una persona tiene una cuenta de crédito en un almacén, sobre la que paga 18% de interés y que muestra los siguientes movimientos en los últimos meses:

Saldo al 1 de junio	$4 000
Abono el 16 de junio	$2 000
Cargo el 11 de julio	$2 500
Cargo el 31 de julio	$ 150
Abono el 15 de agosto	$2 000

Calcule el saldo al 15 de septiembre.

Solución:

Del 1 al 16 de junio, el saldo de $4 000 causa interés y llega a un monto de:

$$4\,000[1 + 0.18(15/360)] = 4\,000(1.0075) = 4\,030$$

4 030	Monto al 16 de junio
(2 000)	menos lo abonado el 16 de junio.
2 030	Este saldo causa interés durante 25 días, por lo que se convierte en un monto de
2 030	$[1 + 0.18(25/360)] = 2\,030(1.0125) = 2\,055.38$
2 055.38	Saldo al 11 de julio, antes del cargo, más
2 500	el cargo causado el 11 de julio.
4 555.38	Saldo al 11 de julio. Este saldo, que incluye el cargo del 11 de julio, causa interés durante 20 días, y llega el 31 de julio a un monto de:
4 555.38	$[1 + 0.18(20/360)] = 4\,600.93$
4 600.93	Saldo al 31 de julio, antes del cargo, más
150	el cargo causado el 31 de julio.
4 750.93	Saldo al 31 de julio, que el 15 de agosto se convierte en un monto de:
4 750.93	$[1 + 0.18(15/360)] = 4\,750.93(1.0075) = 4\,786.56$
4 786.56	Saldo al 15 de agosto
2 000	menos el abono del 15 de agosto.
2 786.56	Saldo que crece al 15 de septiembre a un monto de:
2 786.56	$[1 + 0.18(1/12)] = 2\,786.56(1.0150)$
2 828.35	que es el saldo al 15 de septiembre.

EJEMPLO 2.11.2

A continuación se analiza la forma en que se calculan los intereses que se cargan a los cuentahabientes de tarjetas de crédito. En este caso particular, observe los estados de cuenta de un tarjetahabiente bancario que se muestran a continuación.

Se puede observar que el cuerpo de ese estado de cuenta está dividido en tres secciones: dos yuxtapuestas en la parte superior y una tercera sección en la parte inferior que tiene como encabezado "Detalle de operaciones".

La sección de la parte superior izquierda señala en su parte superior que la "tasa personal anualizada" es de 33.68%, en tanto que en la parte inferior de la sección derecha se anota que la "tasa mensual de int. por crédito" es de 2.90%.

Lo primero que es necesario observar es la incongruencia entre estas dos tasas, ya que la "tasa anualizada" correspondiente a 2.90% mensual es de $2.90 \times 12 = 34.80\%$, que no corresponde con 33.68% que se anota en la otra sección. Esta tasa, la de 33.68% correspondería a una tasa mensual de $33.68/12 = 2.806667$, que se redondearía a 2.81%. Además, como se ilustra más adelante, ninguna de estas dos tasas es la que se utilizó para calcular los intereses.

En la sección izquierda se puede ver que el saldo anterior de la cuenta fue de $9 435.18 y que sólo se hicieron pagos y depósitos por $1 000.00 por lo que correspondía cobrar intereses en este estado de cuenta, lo cual se hizo por un total de $340.87, más $45.23 de "IVA por intereses y comisiones", como se puede apreciar en la sección izquierda.

Tasa personal anualizada **33.68%**

CONTADOR PERSONAL

Pago Puntual Consecutivo	0 1 2 3 4 5	6 7 8 9	10 11 12	13
Tasa de Interés	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 2	N 3
NIVEL CUMPLIDO				

SALDO ANTERIOR	9 435.18
SUS PAGOS Y DEPÓSITOS	1 000.00-
SUS COMPRAS Y DISPOSICIONES	3 346.02
COMISIONES	0.00
INTERESES POR CRÉDITO	340.87
IVA POR INT. Y COMIS.	45.23
SALDO ACTUAL	**12 167.30**

PERIODO DEL	**17-AGO-2007 AL 16-SEP-2007**
FECHA DE CORTE	**16-SEP-2007**
LÍMITE DE CRÉDITO	81 500.00
CRÉDITO DISPONIBLE	61 894.00
TASA MENSUAL DE INT. POR CRÉDITO	2.90%

D E T A L L E   D E   O P E R A C I O N E S

FECHA	CONCEPTO		POBLACION/ RFC	MONEDA EXTRANJERA	PESOS
AGO25	LIVERPOOL PERISU	11 13	MEXICO DF		222.30
AGO25	LIVERPOOL PERISU	11 13	MEXICO DF		421.15
AGO25	SEARS PERISUR	11 12	CIUDAD DE ME		144.13
AGO25	LOS CAMPOS D LA BELLEZ		CBE 021011*IM7*		1 180.00
SEP05	SU ABONO . . . GRACIAS				1 000.00–
SEP16	PALACIO HIERRO	02 12			117.53
SEP16	PALACIO HIERRO	02 12			149.91
SEP16	MARTI	06 09			1 111.00
SEP16	INTERES GRAVABLE				301.53
SEP16	INTERES EXENTO				39.34
SEP16	IVA POR INTERESES Y COMISIONES				45.23

Se ilustra en seguida la forma en la que se calculan estos intereses, con interés simple. Se resumen las operaciones en el cuadro siguiente:

Fecha	Pesos	Días transcurridos	Intereses	Saldo	Tasa
16 de agosto	9 435.18	9	88.2057237		0.031162
25 de agosto	222.30				
25 de agosto	421.15				
25 de agosto	144.13				
25 de agosto	1 180.00			11 490.9657	
05 de septiembre	–1 000.00	11	131.30	10 622.26	
16 de septiembre	117.53	11	121.370677		
16 de septiembre	149.91				
16 de septiembre	1 111.00				
16 de septiembre	301.53				
16 de septiembre	39.34				
16 de septiembre	45.23		340.872941	12 167.30	

El cuadro reproduce básicamente la parte inferior del estado de cuenta, sin incluir los conceptos. En la columna de días transcurridos se muestran los días que pasaron entre el 16 de agosto y las fechas de las operaciones correspondientes (16 de agosto es la fecha de corte según se puede apreciar en la fecha del saldo anterior en la sección izquierda y también en la sección derecha donde se marca que el periodo es del 17 de agosto al 16 de septiembre).

Como los intereses se van calculando de manera acumulada hasta la siguiente operación, los $88.2057237 que aparecen en la cuarta columna se calcularon con la tasa del 0.031162, que es la que hace que se obtengan los intereses cargados en este estado de cuenta y que se anota en el primer renglón de la última columna y durante los 9 días que transcurrieron hasta el 25 de agosto, la siguiente fecha en la que hubo movimientos. Esos $88.2057237 son, entonces, los intereses simples de \$9 435.18, durante nueve días a esa tasa de 0.031162, o $9\,435.18 \times 0.031162 \times 9/30 =$ \$88.2057237.

Por su parte, los \$11 490.9657 que aparecen como primer saldo en el sexto renglón son la suma del saldo anterior (9 435.18) más los intereses generados por esta cantidad entre el 16 y el 25 de agosto (\$88.2057237), más los cuatro cargos del 25 de agosto:

$$9\,435.18 + 88.2057237 + 222.30 + 421.15 + 144.13 + 1\,180 = \$11\,490.97$$

Y este saldo generó intereses del 25 de agosto hasta el 5 de septiembre (11 días) por: 11 490.9657 * 0.031162 * 11/30 = 131.30, que es la cantidad que aparece en el cuarto renglón y séptima columna. Como en esta fecha del 5 de septiembre se abonaron \$1 000 a la cuenta, el nuevo saldo es el saldo anterior, más los intereses generados menos este pago, que arroja los \$10 622.26 que aparecen como saldo abajo del anterior: $11\,490.9657 + 131.30 - 1\,000 = 10\,622.26$.

Finalmente, este último saldo generó otros 11 días de intereses, del 5 al 16 de septiembre, la fecha de corte: $10\,622.26 \times 0.031162 \times 11/30 = 121.370716$, que es la cantidad que aparece como intereses el 16 de septiembre. La cantidad que aparece en el último renglón de la columna de intereses es de \$340.87 que aparecen como intereses en la sección izquierda del estado de cuenta que se está analizando.

Como puede verse de lo anterior, y como ya se había apuntado antes, los intereses que cobra este banco (Banamex) no sólo no corresponden con los anunciados (que no son congruentes entre sí) sino que además son superiores a cualquiera de los dos anunciados: 3.12% mensual contra 2.81% y 2.90% que se anuncian. Si se realizan estas mismas operaciones con las tasas anunciadas se obtienen \$307.07 y \$316.00 de intereses, respectivamente. (Véase figura de la página anterior).

EJEMPLO 2.11.3

Una persona acude al Nacional Monte de Piedad a empeñar un televisor, para lo cual presenta el aparato y la correspondiente factura. El valuador que examina la prenda le ofrece un préstamo de \$1 500, que es aceptado por el solicitante. Si esta institución carga 2.5% mensual sobre el préstamo, ¿cuánto deberá pagar el dueño del televisor para recuperar el aparato después de 50 días de otorgado el préstamo?

SOLUCIÓN:

Éste es un caso de monto, en donde

$$\begin{aligned} C &= 1\,500 \\ i &= 0.025 \text{ mensual} \\ t &= 50/30 \text{ meses} \\ M &= 1\,500[1 + 0.025(50/30)] = 1\,500(1.0417) \\ M &= \$1\,562.50 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.11.4

Para tratar de lograr el pronto pago de sus facturas, los proveedores ofrecen descuento por el pago anticipado. Así, 5/10, n/30 podrían ser los términos impresos en una factura, los cuales indican que se otorga un descuento de 5% si se paga a más tardar en 10 días, y n/30 señala que si se paga en un plazo de 10 a 30 días se debe cubrir el importe neto.

Si un comerciante recibe una factura por \$12 000 en esos términos:

a) ¿Le conviene obtener un préstamo con intereses a 30% para pagar la factura al décimo día?
b) ¿Cuál es la mayor tasa de interés simple según la que le convendría obtener crédito para aprovechar el descuento?

SOLUCIÓN:

a) Si paga en 10 días obtiene un descuento de

$$12\,000(0.05) = \$600$$

y pagaría $$12\,000 - 600 = \$11\,400$$

Si utiliza el dinero prestado, tendría que utilizarlo 20 días: de cuando paga a cuando vence el importe neto de la factura. Hacer esto le costaría:

$$I = 11\,400(0.30)(20/360) = \$190$$

y como lo que le cuesta el préstamo es inferior a lo que se ahorra, sí le convendría pagar con el préstamo a los 10 días, ya que ahorraría:

$$600 - 190 = \$410$$

b) Si lo que ahorra por el pronto pago son $600, la mayor tasa que podría aceptar sería la que produjera intereses por esa cantidad de un capital de $11 400 en 20 días:

$$600 = 11\,400(i)20/360$$
$$600 = 11\,400(0.05555556)i$$
$$600 = 6.3333i$$
$$i = 0.9474 \text{ anual simple.}$$

Ejercicios de las secciones 2.10 y 2.11

63. Una persona debe pagar $2 500 en 3 meses, y $8 500 en 6 meses. ¿Qué cantidad deberá pagar hoy para saldar sus deudas si se considera una tasa de 12% simple?

64. La señora Moreno adeuda $5 000 que ya incluyen intereses, y debe pagarlos dentro de 8 meses. Si hace un pago de $3 000 dentro de 2 meses, ¿cuánto deberá pagar al cabo de los 8 meses si se considera la operación a una tasa de 30% anual, y se usa como fecha focal dentro de 8 meses?

65. El señor Gómez presta el 14 de julio $3 500 a 5 meses y medio a 10% de interés simple. También presta, 4 meses después, otros $2 000 con 14% de interés y vencimiento a 3 meses. Si considerara para la equivalencia una tasa de 15%, ¿qué cantidad recibida por el señor Gómez el 14 de diciembre liquidaría esos préstamos?

66. Bajo el supuesto de que el Nacional Monte de Piedad cobra 5.5% mensual por los préstamos que hace sobre prendas pignoradas, ¿cuánto tendría que pagar dentro de 3 meses una persona que empeñó hace un mes un televisor por el que le prestaron $800, y que el día de hoy empeña un reloj por el que le prestan $750?

67. El señor García firma tres pagarés:

- Uno por $400, para pagarlo en 4 meses, con 25% de interés anual.
- Otro por $195, para pagarlo en 9 meses con una tasa de 20% anual.
- Un tercero por $350, para pagarlo en 5 meses sin intereses.

Si al cabo de 3 meses decide liquidar los 3 documentos mediante la entrega de $450 en ese momento y un pago final 6 meses después, ¿cuál será el importe de este pago si la operación de equivalencia se calcula con intereses de 21% anual?

68. Una persona debe liquidar dentro de 8 meses una deuda de $500 que ya incluye los intereses, $450 contratados hoy a una tasa de 24% para pagar dentro de 6 meses. Si decide saldar sus deudas con 2 pagos iguales, uno dentro de 10 meses y el otro dentro de un año, y la operación se calcula con una tasa de 25%, ¿cuál será el importe de esos 2 pagos iguales si se usa como fecha focal:

a) dentro de 10 meses? *b*) dentro de un año?

Comente la diferencia entre los resultados de *a*) y *b*).

69. Si una persona invierte hoy cierta cantidad en un proyecto que le reditúa $50 000 al cabo de 4 meses, y $30 000 después de 6 meses, ¿qué cantidad tendría que haber invertido para lograr un rendimiento de 16% sobre su inversión?

70. Una pareja de recién casados adquiere un horno eléctrico que cuesta \$2 200, y paga \$800 al contado. El saldo debe ser cubierto mediante 3 pagos iguales a los 30, 60 y 90 días. Si el interés que se le cobra es de 30% anual simple, ¿a cuánto asciende cada uno de esos pagos?

71. Una persona tiene dos opciones para pagar un préstamo:

- pagar \$2 000 a los 5 meses y \$3 000 a los 10 meses, o
- pagar \$$X$ a los 3 meses y \$3X a los 8.

Si las operaciones son equivalentes y el dinero vale 18% anual simple, encuentre X usando como fecha focal dentro de 8 meses.

72. Un usuario del Nacional Monte de Piedad empeñó una alhaja el 15 de diciembre y la rescató el 15 de febrero del año siguiente con un pago de \$207. Si esa institución cobra 4.5% mensual, ¿cuánto le prestaron al cliente por su alhaja?

73. ¿Cuál sería el precio al contado de un automóvil que se pagó con un

- enganche de \$48 500
- abono de \$38 500 realizado 6 meses después de la compra
- pago final de \$35 500 ocho meses después de la compra

si el costo del préstamo fue de 2% mensual simple?

74. El 16 de junio una persona contrajo una deuda por \$3 000 para pagarla el 16 de octubre con intereses de 29% simple anual. La deuda se documenta mediante un pagaré en el que se especifica, además de las condiciones de la operación, una cláusula que señala que en caso de mora el deudor deberá pagar 5% de interés mensual. ¿Cuánto deberá cobrar el acreedor si el deudor le paga el 5 de noviembre?

75. El señor Rodríguez firma un pagaré por \$675 a 8 meses de plazo e interés de 10%. Si efectúa dos pagos antes del vencimiento, uno por \$150 a los 2 meses, y otro por \$200 a los 4 meses, ¿cuál es el saldo que debe pagar al vencerse el pagaré?

76. En un almacén se vende un comedor en \$4 850 al contado. A un plazo de 3 meses se vende mediante 3 pagos mensuales de \$1 744.40. ¿Qué tasa de interés simple mensual se cobra en el plan a crédito? Utilice como fecha focal el día de la compra.

77. Observe el siguiente estado de cuenta de un usuario de tarjetas de crédito. ¿Cuál fue la tasa de interés que se cobró?

Tasa Personal Anualizada	**39.80%**

CONTADOR PERSONAL

Pago Puntual Consecutivo	0 1 2 3 4 5	6 7 8 9	10 11 12	13
Tasa de Interés	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 2	N 3
NIVEL CUMPLIDO				

SALDO ANTERIOR	15 657.31
SUS PAGOS Y DEPÓSITOS	4 700.00-
SUS COMPRAS Y DISPOSICIONES	1 513.05
COMISIONES	0.00
INTERESES POR CRÉDITO	450.26
IVA POR INT. Y COMIS.	53.48
SALDO ACTUAL	**12 974.10**

PERIODO DEL	**17-NOV-2007 AL 16-DIC-2007**
FECHA DE CORTE	**16-DIC-2007**
LÍMITE DE CRÉDITO	81 500.00
CRÉDITO DISPONIBLE	65 172.96
TASA MENSUAL DE INT. POR CRÉDITO	3.31%

DETALLE DE OPERACIONES

FECHA	CONCEPTO	POBLACIÓN/ RFC	MONEDA EXTRANJERA	PESOS
DIC03	SU ABONO . . . GRACIAS			4 700.00–
DIC16	INTERES GRAVABLE			356.51
DIC16	INTERES EXENTO			93.75
DIC16	IVA POR INTERESES Y COMISIONES			53.48
DIC16	PALACIO HIERRO 05 12			117.53
DIC16	PALACIO HIERRO 05 12			149.91
DIC16	LIVERPOOL 02 13			134.61
DIC16	MARTI 09 09			1 111.00

2.12 Uso de Excel

Aunque el paquete Excel no tiene funciones específicas para interés simple (la mayoría de ellas son para anualidades y depreciación, como se ve en los capítulos correspondientes a estos temas), dada la sencillez del tema, también es fácil elaborar mecanismos para resolver este tipo de situaciones.

2.12.1 Cálculo de *M*, *C*, *i* o *t*, a partir de la fórmula del monto a interés simple $M = C(1 + it)$

Para resolver problemas que impliquen a cualquiera de las variables que intervienen en el interés simple, monto, capital, interés, tasa de interés o tiempo, se pueden usar cuatro columnas y tres renglones de Excel de la siguiente manera:

	A	B	C	D
1	M	C	i	t
2				
3	=B2*(1+C2*D2)	=A2/(1+C2*D2)	=(A2/B2–1)/D2	=(A2/B2–1)/C2

El primer renglón contiene la identificación de los posibles valores que se buscan, en el segundo se deben introducir los valores conocidos y sólo debe quedar vacía la celda del valor que se busca (lo cual se ilustra en seguida con ejemplos), mientras que en las cuatro celdas del tercer renglón se introducen las fórmulas del cálculo de cada incógnita:

En la celda A3 aparece la fórmula del monto, $M = C(1+it)$ en términos de los valores de las celdas del renglón 2, mientras que en las celdas B3, C3 y D3 están las fórmulas para calcular el capital o valor presente, la tasa de interés y el tiempo, según su procedimiento de cálculo, el cual se determina despejando en la fórmula del monto.

Para el capital:

$$C = \frac{M}{1+it}$$

Para la tasa de interés y el tiempo:

$$1+it = \frac{M}{C}$$

$$it = \frac{M}{C} - 1$$

$$i = \frac{\frac{M}{C} - 1}{t}$$

$$t = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i}$$

La fórmula del monto de la celda A3 indica que se multiplica el valor que se introduzca en B2 (el capital) por la suma de 1 más el producto del valor de la celda C2 (la tasa de interés) por el valor de la celda D2 (el tiempo o plazo de la operación).

Para ilustrar lo anterior, si se construye un cuadro en Excel como el que se muestra y se introducen en las celdas B2, C2 y D2 los valores del ejemplo 2.2.1, que habla de un comerciante que debe \$2 000 que tiene que pagar cuatro meses después con intereses a una tasa de 10% anual simple, es necesario introducir estos datos en el cuadro, como sigue:

	A	B	C	D
1	M	C	i	t
2		2 000	0.1	4/12
3	2 066.67	0.00	–3.00	–10.00

Esta operación da un resultado de \$2 066.67 en la celda A3, que es, precisamente, el monto que el comerciante debe pagar. Los valores de −3 y de −10 que aparecen en las celdas no son de tomar en cuenta y se producen simplemente como resultado de los cálculos de las fórmulas correspondientes. Por ejemplo, en la fórmula de la tasa de interés, primero se calcula M/C, que arroja un resultado de cero. Después se le resta el uno a este cero y se produce −1 para, finalmente, dividir este valor entre 0.33 (con más decimales en la hoja de Excel), operación que es igual a −3, valor que no tiene sentido en el ejemplo ya que, como se acaba de ilustrar, se calcula para un monto de cero. Algo similar ocurre con el −10 de la celda D3.

Hay dos detalles que es importante tener presente. En primer lugar, cuando se introduce "4/12" en la celda D2, Excel automáticamente hace la operación y muestra "0.33333" en la celda. En segundo término, cuando el cuadro de solución sólo tiene las fórmulas y el renglón 2 está completamente vacío, Excel lee sólo ceros en el renglón y pone el aviso de "#¡DIV/0!" en las celdas C3 y D3 porque se produce la operación inválida de división entre cero, pero, por supuesto, no es importante, porque el hecho es que no hay valores reales en las celdas de ese renglón 2.

Sin embargo, por otra parte, se puede ver que el valor que se busca es fácilmente identificable por su valor mismo y porque está en la celda de la columna que tiene el renglón 2 en blanco (con lo que Excel lee "cero").

En el ejemplo 2.2.2, los datos eran $C = 150\ 000$, $i = 0.8\%$ mensual y $t = 24$ días. Sustituyendo estos valores en el cuadro de Excel se obtiene el resultado del monto que se buscaba y que era de \$150 960 en la celda A3:

	A	B	C	D
1	*M*	*C*	*i*	*t*
2		150 000	0.008	24/30
3	150 960	0.00	−1.25	−125

El ejemplo 2.3.1, de valor presente, con M = \$30 000, t = 18/12 e i = 20% anual, se resuelve de la siguiente manera:

	A	B	C	D
1	*M*	*C*	*i*	*t*
2	30 000		0.2	1.50
3	0.00	23 076.92	#¡DIV/0!	#¡DIV/0!

El valor presente de \$23 076.92 aparece ahora en la correspondiente celda B3, de valor presente.

Ejercicio propuesto

Complementar el cuadro de Excel que se sugiere con dos columnas que permitan encontrar el interés ganado en dinero, I, con las dos posibles formas de calcularlo:

$$I = Cit, \text{ e}$$
$$I = M - C$$

2.12.2 Determinación del tiempo exacto entre dos fechas

Excel es muy útil cuando se desea saber el número exacto de días que transcurren entre dos fechas ya que basta con plantear su simple diferencia (resta). En el ejemplo 2.7.1 se determinó el número de días transcurridos entre el 15 de mayo y el 24 de diciembre de cierto año (observe que puede ser cualquier año, sin que importe si es bisiesto o no, ya que no entra el mes de febrero en los cálculos). Si se anotan estas dos fechas en dos celdas contiguas y en la tercera se anota la diferencia, se obtiene el valor de 223 días que transcurren y que en el ejemplo se calculó en forma un tanto laboriosa manualmente. Las celdas podrían tener la siguiente apariencia:

	A	B	C
1	24 de diciembre de 2005	15 de mayo de 2005	223

En la celda C1 se anota la fórmula "=A1–B1". Ahora, es importante tener presente que, para que esta operación funcione adecuadamente, las celdas A1 y B1 deben tener formato de fecha y la celda C1 debe tener formato de número.

Para ensayar el mecanismo, calcule el número de días que usted ha vivido hasta ahora.

2.12.3 Descuento comercial

Ya se explicó que la fórmula para calcular el descuento comercial es

$$D = \frac{Cdt}{1-dt}$$

y, al igual que se hizo con las variables del interés simple, se pueden insertar en celdas de un libro de Excel las fórmulas para calcular cualquiera de las variables de este tipo de descuento. En el ejemplo 2.8.2 se buscaba determinar el descuento comercial de un pagaré por el cual se recibieron \$166 666.67, con tasa de descuento de 30% anual y vencimiento a cuatro meses. Si se insertan estos valores en las celdas B2, C2 y D2 y se inserta la fórmula del descuento en la celda A3, se obtiene el resultado de \$18 518.52 que ya se calculó en el texto. En el cuadro siguiente se anotan estos datos y las fórmulas correspondientes para calcular cada uno de los valores del descuento comercial:

	A	B	C	D
1	*D*	*C*	*d*	*t*
2		166 666.67	0.30	4/12
3	=(B2*C2*D2)/(1–C2*D2)	=(A2*(1–C2*D2))/(C2*D2)	=A2/(B2*D2 A3*C2)	=A2/(B2*C2+A2*C2)

Los despejes correspondientes son:

Para $C = 166\,666.67$ en la celda B3:

$$D = \frac{Cdt}{1-dt}$$
$$Cdt = D(1-dt)$$
$$C = \frac{D(1-dt)}{dt}$$

La fórmula = (A3*(1–C2*D2))/(C2*D2) = 166 666.67

Para d:

$$D = \frac{Cdt}{1-dt}$$
$$D(1-dt) = Cdt$$
$$D - Ddt = Cdt$$
$$Cdt + Ddt = D$$
$$d(Ct + Dt) = D$$
$$d = \frac{D}{Ct + Dt}$$

En la celda C3, la fórmula = A3/(C2*D2*A3*D2) = 0.3

Finalmente, para t:

$$D = \frac{Cdt}{1-dt}$$
$$D(1-dt) = Cdt$$
$$D - Ddt = Cdt$$
$$Cdt + Ddt = D$$
$$t(Cd + Dd) = D$$
$$t = \frac{D}{Cd + Dd}$$

En la celda D3, la fórmula = A3/(B2*C2+A3*C2) = 0.33.

Éstas son las fórmulas en formato de Excel que están en las celdas B3, C3 y D3 del cuadro anterior. Con ellas se puede encontrar el valor del tiempo que faltaba para el vencimiento del documento que se analiza en el ejemplo 2.8.3, con D = 54.95, d = 0.25 y C = 945.05 y que es el 0.2198 de la celda D3, como se muestra en seguida:

	A	B	C	D
1	*D*	*C*	*d*	*t*
2	54.95	945.05	0.25	4/12
3	0.00	#¡DIV/0!	#¡DIV/0!	0.2198

No se ilustra adicionalmente el descuento justo porque se resuelve como se anota en el texto, con la fórmula del interés simple que se analizó al principio de la sección.

2.13 Resumen

En este capítulo se revisó el importante concepto de *interés simple* que se refiere, básicamente, al aumento del valor del dinero con el transcurso del tiempo.

Se revisaron e ilustraron los conceptos de *capital* o *valor actual*, *monto*, *tasa* y *tipo de interés* y *tiempo* o *plazo*, y se expresó su interrelación en lo que podríamos llamar la fórmula elemental del interés simple

$$M = C\,(1 + it)$$

que, como también se vio, si se conocen tres de sus incógnitas y se despeja la restante, se puede determinar su valor.

Se mencionó, por otro lado, la diferencia que se presenta entre los resultados cuando se hacen los cálculos con tiempo real y con tiempo aproximado o comercial.

Se habló del *descuento*, que es una operación que consiste en anticipar el cobro de un documento.

Por su enorme importancia en las matemáticas financieras, se ilustró cuidadosamente el concepto de las *ecuaciones de valores equivalentes*, a través de las cuales se plantea, con base en una fecha focal determinada, la equivalencia de un conjunto de operaciones de contratación de deudas por un lado y, por el otro, un *conjunto de operaciones de pago*.

Finalmente, se vieron algunas aplicaciones del interés simple a *operaciones como compras a crédito*, *manejo de tarjetas de crédito*, *empeño de artículos varios*, etcétera.

Comprobación del capítulo

Si ha leído el capítulo completo, el lector debe:

- Comprender el concepto de interés simple.
- Identificar situaciones en las que se trate de encontrar el valor de
  - monto
  - valor actual
  - tasa de interés
  - tiempo o plazo.
- Explicar la diferencia entre tiempo real y tiempo aproximado.
- Comprender el concepto de descuento.
- Plantear y resolver ejemplos en los que se aplique la operación de descuento.
- Explicar la diferencia entre descuento real o justo y descuento comercial.
- Plantear y resolver ecuaciones de valores equivalentes.
- Explicar qué es una fecha focal.
- Resolver ejercicios y aplicaciones de interés simple utilizando la hoja de cálculo de Microsoft Excel.

Términos y conceptos importantes

- Capital
- Descuento
- Descuento real o justo y descuento comercial
- Ecuaciones de valores equivalentes
- Fecha focal
- Monto
- Tasa de interés
- Tiempo o plazo
- Tiempo real y tiempo aproximado
- Tipo de interés
- Valor actual

Fórmulas importantes

$$M = C + I \quad (2.1)$$

$$I = Cit \quad (2.2)$$

$$M = C + Cit \quad (2.3)$$

$$M = C(1 + it) \quad (2.4)$$

$$D = Mdt \quad (2.5)$$

Ejercicios complementarios

1. ¿Qué es el interés simple?
2. Explique los siguientes conceptos: monto, capital, interés, valor actual, tasa de interés, tipo de interés, ecuaciones de valores equivalentes.
3. ¿Cuál es el monto a los 10 meses de un capital de $185 000 colocado a 18% simple anual?
4. ¿A qué tasa de interés se invirtió un capital de $475 000 que se convirtió en un monto de $700 625 al cabo de 9 meses y medio?
5. ¿Durante cuánto tiempo estuvo invertido un capital de $850 que se convirtió en un monto de $983 a 27% anual simple?
6. ¿Cuál es el valor actual de $1 350 cobrables dentro de 4 meses con 35% anual simple de interés?
7. ¿Cuál es el monto real de $1 000 invertidos a una tasa de 0.25 simple anual del 14 de agosto al 29 de noviembre?
8. ¿Cuál es el valor actual aproximado o comercial de $1 800 cobrables el 29 de agosto, si la tasa es de 0.38 anual simple y hoy es 2 de febrero?
9. ¿Cuánto produce de interés simple al mes un capital de $2 500 invertido en valores de renta fija que rinden 5.8% anual?
10. ¿Qué tasa de descuento real se aplicó a un pagaré que vencía el 7 de junio con valor nominal de $175 000 y que al descontarlo el 7 de marzo produjo un valor neto de $149 572.65?
11. ¿Cuánto recibiría una persona si descuenta comercialmente un pagaré que vence dentro de 4 meses, que fue contratado hace 2 meses en $1 500 con interés a 31.5% anual, si la tasa de descuento que se aplica es de 30% anual?
12. ¿Cuándo vence un pagaré que se descuenta hoy a una tasa de 16.5% anual simple, que tiene valor de $74 900 a su vencimiento y produce un descuento comercial de $1 888.10?
13. Una persona compra en un almacén:
    - una lavadora de $4 750, paga un enganche de $800 y conviene en pagar el saldo 2 meses después;
    - una estufa de $1 920, sin enganche, para pagarla con un solo abono a los 3 meses, y
    - una licuadora de $363, sin enganche, para pagarla en dos abonos iguales a los 4 y 5 meses.

    Si el almacén cobra 27% simple anual sobre esta clase de operaciones, ¿cuál sería el pago único, realizado un mes después, que saldaría todas las deudas?
14. Cuando una prenda que ha sido pignorada no se desempeña antes de 5 meses, la institución la saca a remate público para su venta, con el fin de recuperar el préstamo otorgado y los intereses. Del dinero que obtiene con la venta descuenta estos dos conceptos y el resto se lo entrega al cliente que empeñó la prenda. Si una persona empeña un anillo de brillantes y recibe $1 950 por concepto de préstamo y no desempeña su joya, y si la institución la vende en remate 5 meses después en $3 000, ¿cuánto le devuelve al cliente si el interés que cobra es de 4% mensual?
15. En la página siguiente aparece el estado de cuenta correspondiente a un ejercicio mensual de un usuario de tarjeta de crédito. Si el cliente no ha realizado otras compras aparte de las que aparecen en dicho estado, y no realiza ningún pago, ¿cuánto le cobrará el banco de intereses en el próximo ejercicio si carga 2.5% sobre el saldo promedio?

Tasa personal anualizada	**24.99%**

CONTADOR PERSONAL

Pago Puntual Consecutivo	0 1 2 3 4 5	6 7 8 9	10 11 12	13
Tasa de Interés	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 2	N 3
NIVEL CUMPLIDO				

SALDO ANTERIOR	2 693.49
SUS PAGOS Y DEPÓSITOS	5 909.36-
SUS COMPRAS Y DISPOSICIONES	12 651.05
COMISIONES	0.00
INTERESES POR CRÉDITO	0.00
IVA POR INT. Y COMIS.	0.00
SALDO ACTUAL	**9 435.18**

PERIODO DEL	**17-JUL-2007 AL 16-AGO-2007**
FECHA DE CORTE	**16-AGO-2007**
LÍMITE DE CRÉDITO	81 500.00
CRÉDITO DISPONIBLE	62 460.10
TASA MENSUAL DE INT. POR CRÉDITO	2.15%

D E T A L L E D E O P E R A C I O N E S

FECHA	CONCEPTO	POBLACIÓN/ RFC	MONEDA EXTRANJERA	PESOS
JUL25	LIVERPOOL PERISU 10 13	MEXICO DF		222.30
JUL25	LIVERPOOL PERISU 10 13	MEXICO DF		421.15
JUL25	SEARS PERISUR 10 12	CIUDAD DE ME		144.13
JUL26	SEARS PERISUR	SRM 4711069N3		159.20
JUL27	REST LA MANSION	ORD 900905T42		675.00
JUL29	FIESTA INN ACAPULCO	PPO 9412076U4		4 131.36
AGO04	CAMPANITA PERISUR 1	ACA 800211FU1		1 326.60
AGO04	EL PALACIO HIERRO PERI	PHI 830429MG6		623.52
AGO04	EL PALACIO HIERRO PERI	PHI 830429MG6		1 410.36
AGO04	EL PALACIO HIERRO PERI	PHI 830429MG6		1 799.00
AGO05	SU ABONO . . . GRACIAS			1 700.00–
AGO05	SU ABONO . . . GRACIAS			1 000.00–
AGO06	ABONO POR CARGOS PARCI			1 410.36–
AGO06	ABONO POR CARGOS PARCI			1 799.00–
AGO16	PALACIO HIERRO 01 12			117.53
AGO16	PALACIO HIERRO 01 12			149.91
AGO16	SUPERCENTER 12 12			359.99
AGO16	MARTI 05 09			1 111.00

Matemáticas en internet. Interés simple

2.1 Introducción y conceptos básicos

- Valor del dinero en el tiempo.
  http://www.enplenitud.com/nota.asp?articuloid=562
- Ejemplo del cálculo del interés simple, como aplicación de una regla de tres simple.
  www.escolar.com/matem/18interes.htm
- Conceptos básicos y ejercicio ilustrativo de interés simple.
  http://www.gestiopolis.com/canales/financiera/articulos/no%205/interesalinteres.htm
- En la sección "Contenido" encontrará ligas que tratan sobre los tipos de interés (simple y compuesto) y algunos ejemplos.
  http://www.sectormatematica.cl/contenidos.htm
- Últimas subastas de Cetes, las tasas de interés mexicanas y las tasas de interés internacionales. Con esta información le será posible plantear problemas con las tasas actualizadas día con día.
  http://www.banamex.com/

2.2 Monto

- Interés simple, casos y problemas 1, 2, 4, 9, 12, 16, 22, 23 y 24.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/

2.3 Valor actual o presente

- Interés simple, casos y problemas 3, 5 y 7.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/

2.4 Interés

- Interés simple, casos y problemas 11, 13 y 15.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/

2.5 Tasas de interés

- Interés simple, casos y problemas 8, 10 y 16.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/

2.6 Plazo o tiempo

- Interés simple, casos y problema 6.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/

2.8 Descuento

- Interés simple, casos y problemas 14, 17, 18, 19, 20, 21 y 25.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/

2.10 Ecuaciones de valores equivalentes

- Interés simple, casos y problemas 9 y 14.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/

CAPÍTULO 3

Interés compuesto

TEMARIO

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

- Explicar los conceptos del valor del dinero en el tiempo
- Distinguir y explicar la diferencia entre monto simple y monto compuesto, entre tasa de interés nominal y tasa de interés efectiva
- Comprender y explicar los conceptos de periodo de capitalización, frecuencia de conversión y tiempo equivalente
- Plantear y resolver ejemplos de cálculos de monto compuesto, valor actual, tasas de interés nominal, efectiva y equivalentes, y plazo
- Plantear y resolver ejemplos de cálculo de monto compuesto, valor actual, tasa de interés nominal, efectiva y equivalentes
- Plantear y resolver ejemplos de ecuaciones de valores equivalentes a interés compuesto
- Resolver ejercicios y aplicaciones de interés compuesto utilizando la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®

3.1 Introducción

El dinero y el tiempo son dos factores que se encuentran estrechamente ligados con la vida de las personas y de los negocios. Cuando se generan excedentes de efectivo, se ahorran durante un periodo determinado a fin de ganar un interés que aumente el capital original disponible; en otras ocasiones, en cambio, se tiene necesidad de recursos financieros durante un tiempo y se debe pagar un interés por su uso.

En periodos cortos por lo general se utiliza, como ya se vio, el interés simple. En periodos largos, sin embargo, se utilizará casi exclusivamente el interés compuesto.

3.2 Conceptos básicos

En el interés simple el capital original sobre el que se calculan los intereses permanece sin variación alguna durante todo el tiempo que dura la operación. En el interés compuesto, en cambio, los intereses que se generan se suman al capital original en periodos establecidos y, a su vez, van a generar un nuevo interés adicional en el siguiente lapso.

En este caso se dice que el interés se *capitaliza* y que se está en presencia de una operación de *interés compuesto*.

En estas operaciones, el capital no es constante a través del tiempo, pues aumenta al final de cada periodo por la adición de los intereses ganados de acuerdo con la tasa convenida.

Esta diferencia puede captarse con claridad por medio del ejemplo siguiente:

EJEMPLO 3.2.1

Suponga que se depositan \$100 000 en una cuenta de ahorros que paga 10% de interés semestral (20% de interés anual). ¿Cuál será el interés ganado al cabo de 6 meses?

$$I = Cit$$
$$I = 100\,000(0.10)(1)$$
$$I = 10\,000$$

Suponga que se depositan otros \$100 000 en una cuenta de valores que paga 20% de interés convertible trimestralmente. ¿Cuál será el interés ganado al cabo de 6 meses? (*Nota*: La tasa de interés nominal es la misma en ambos casos: 5% trimestral = 20% anual).

$$i \text{ trimestral} = \frac{20\% \text{ anual}}{4 \text{ trimestres}} = 5\%$$

$$\begin{aligned}
\text{1er. trimestre } I &= Cit \\
I &= 100\,000(0.05)(1) \\
I &= 5\,000 \\
\text{2o. trimestre } I &= (C + I)it \\
I &= (100\,000 + 5\,000)(0.05)(1) \\
I &= 105\,000\,(0.05)(1) \\
I &= 5\,250 \\
I \text{ total} &= I \text{ 1er. trimestre} + I \text{ 2o. trimestre} \\
I \text{ total} &= 5\,000 + 5\,250 \\
I &= 10\,250
\end{aligned}$$

En este caso, el interés es superior al que se ganó en el anterior, pues al final del 1er. trimestre al capital original se le suma el interés ganado, con lo cual el total del segundo trimestre será superior al del primero.

Por lo tanto, el capital se incrementa por la adición de los intereses al final de cada periodo y éstos, a su vez, se incrementan pues son calculados sobre una base cada vez mayor. La cantidad acumulada al final de la operación se conoce como *monto compuesto*. La diferencia entre el monto compuesto y el capital original es el *interés compuesto*.

3.2.1 Periodo de capitalización

El interés puede ser convertido en capital en forma anual, semestral, trimestral, mensual, etc. A dicho periodo se le da el nombre de *periodo de capitalización*. Al número de veces que el interés se capitaliza durante un año se le denomina *frecuencia de conversión*.

EJEMPLO 3.2.2

¿Cuál es la frecuencia de conversión de un depósito bancario que paga 5% de interés capitalizable trimestralmente?

$$\frac{\text{Un año}}{\text{Un trimestre}} = \frac{12 \text{ meses}}{3 \text{ meses}} = 4$$

La frecuencia de conversión es igual a 4. El periodo de capitalización es trimestral.

3.2.2 Tasa de interés compuesto

Por lo general, la tasa de interés se expresa en forma anual. Además, junto con ella se indica, si es necesario, su periodo de capitalización.

- 28% anual capitalizable mensualmente
- 10% anual capitalizable semestralmente
- 6% anual capitalizable trimestralmente

Si el interés se expresa sin mención alguna respecto de su capitalización, se entiende que ésta es anual.

Es muy importante que, para la solución de cualquier problema de interés compuesto, el interés anual sea convertido a la tasa que corresponda de acuerdo con el periodo de capitalización que se establezca; si el interés se capitaliza mensualmente, el interés anual debe transformarse en interés mensual; si es trimestralmente, a interés trimestral, etcétera.

El periodo de capitalización y la tasa de interés compuesto siempre deben ser equivalentes. Así, en el ejemplo inicial, el interés de 20% anual fue transformado en interés trimestral de 5% para hacerlo equivalente al periodo de capitalización que allí se mencionaba.

En este momento pueden establecerse dos conclusiones:

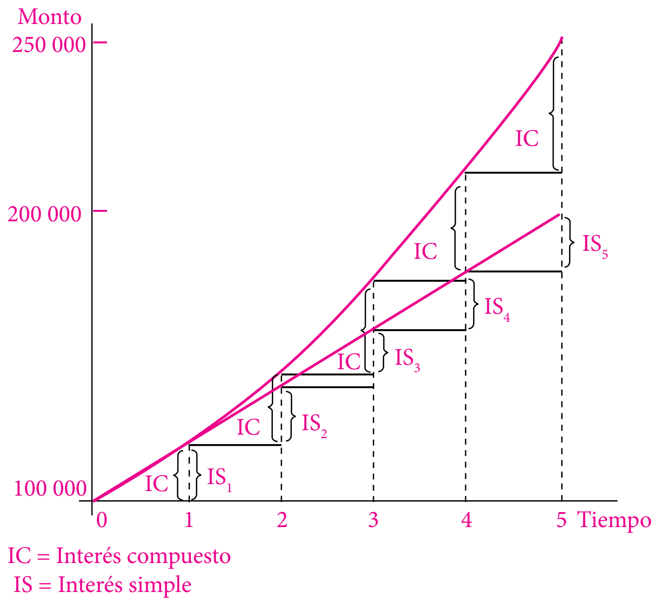
a) El interés compuesto es mayor que el interés simple. Esto se debe a que el primero gana intereses por sí mismo, en tanto que el segundo no.

b) A mayor frecuencia de conversión, mayor será el interés que se obtenga si la tasa anual nominal es igual; así, un depósito bancario que obtenga intereses en forma mensual tendrá mayor rendimiento que uno que los capitalice trimestralmente y éste, a su vez, será mayor que otro que lo haga cada semestre.

En forma más clara se observa el comportamiento del interés simple y el interés compuesto en una gráfica. Considere el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.2.3

Un depósito de $100 000 a 5 años. La tasa de interés es la misma en ambos casos: 20% anual. En el interés simple éste no se capitaliza, en tanto que el interés compuesto lo hace cada año. (Vea la gráfica 3.1).



Gráfica 3.1

Año	Monto a interés simple $M = C(1 + it)$	Monto a interés compuesto $M = C(1 + i)^n$
0	100 000	100 000
1	120 000	120 000
2	140 000	144 000
3	160 000	172 800
4	180 000	207 360
5	200 000	248 832

El monto a interés simple crece en forma aritmética y su gráfica es una línea recta. Sus incrementos son constantes y el interés del quinto año es igual al del primero. Su ecuación es la de una línea recta cuya pendiente o razón de incremento está dada por la tasa de interés.

$$y = b + mx$$
$$M = C + It;\ It = (Ci)t$$
$$M = 100\,000 + 20\,000(t)$$

En cambio, una cantidad que se coloca a interés compuesto crece en forma geométrica y su gráfica corresponde a la de una función exponencial:

$$M = C(1 + i)^n$$
$$M = 100\,000(1 + 0.20)^n$$

Sus incrementos son variables. Como se puede apreciar en la gráfica, cada periodo presenta un incremento mayor al del periodo anterior. Su ecuación es la de una línea curva que asciende a velocidad cada vez mayor.

Ejercicios de las secciones 3.1 y 3.2

1. Cuál es la tasa de interés por periodo de:

   a) 30% anual capitalizable mensualmente?
   b) 16% anual capitalizable trimestralmente?

c) 2% trimestral?
d) 15% anual?
e) 18% anual capitalizable semestralmente?
f) 18% anual capitalizable mensualmente?
g) 0.5% mensual?

2. ¿Cuál es la frecuencia de conversión de los ejemplos del problema anterior?
3. Elabore la gráfica que muestre el crecimiento de una inversión de $ 1000 en un año si se deposita en una cuenta de valores que paga:

a) 10% anual convertible semestralmente.
b) 20% anual convertible semestralmente.
c) 30% anual convertible trimestralmente.
d) 40% anual convertible trimestralmente.
e) 50% anual convertible trimestralmente.
f) 50% anual convertible mensualmente.
g) 60% anual convertible mensualmente.
h) 70% anual convertible mensualmente.
i) 80% anual convertible mensualmente.

3.3 Monto compuesto

El monto compuesto, como ya se ha explicado, es el resultado que se obtiene al sumar al capital original el interés compuesto. Si se dispone de un capital C y se invierte en un banco y se desea conocer el monto M del cual se dispondrá al final del periodo, sólo debe agregársele el interés I ganado.

$$M = C + I \tag{3.1}$$

pero $I = Cit$

cuando $t = 1$, $I = Ci$

por lo que $M = C + Ci$ que factorizando da

$$M = C(1 + i) \tag{3.2}$$

Como puede verse, el monto de un capital al final de un periodo se obtiene multiplicándolo por el factor $(1 + i)$. De esta manera, al final del segundo periodo se tiene que:

$$M = \underbrace{C(1 + i)}_{\text{Capital al iniciar el 2o. periodo}}(1 + i)$$

$$M = C(1 + i)^2$$

Al final del tercer periodo se tiene que

$$M = C(1 + i)^2(1 + i)$$

y así sucesivamente. Esta sucesión de montos forma una progresión geométrica cuyo n-ésimo término es igual a:

$$M = C(1 + i)^n \tag{3.3}$$

Esta ecuación se conoce como fórmula del monto a interés compuesto.

EJEMPLO 3.3.1

Se depositan $50 000 en un banco a una tasa de interés de 18% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál será el monto acumulado en 2 años?

Solución:
Como se estableció previamente con la fórmula (3.3), el monto a interés compuesto se calcula mediante la ecuación

$$M = C(1 + i)^n$$

Se destaca nuevamente que la definición de periodo debe ser la misma para i y para n.

Así, para calcular la tasa de interés mensual, se divide la tasa anual entre la frecuencia de conversión:

$$i = \frac{\text{Tasa de interés anual}}{\text{Frecuencia de conversión}} \tag{3.4}$$

$$i = \frac{0.18}{12} = 0.015 = 1.5\%$$

Para determinar n, se multiplica el lapso en años por la frecuencia de conversión:

$$n = 2(12)$$
$$n = 24$$

$$\text{así, } M = 50\,000\ (1 + 0.015)^{24}$$

En este momento surge una interesante pregunta: ¿cómo evaluar $(1 + 0.015)^{24}$?

Existen cuatro alternativas:

a) Utilizar papel y lápiz y realizar la operación 24 veces. Resulta lenta y poco práctica.
b) Resolver la ecuación utilizando logaritmos.
c) Utilizar las tablas que se encuentran al final del libro; en ellas se encuentra el *factor del monto a interés compuesto* $(1 + i)^n$, para una i y una n determinadas. Esta opción es sencilla, pero en una época de tasas variables como la que se vive, puede darse el caso de que dichas tablas no incluyan la que interesa.
d) Emplear una calculadora electrónica. Éste es el medio más práctico y preciso y, como se mencionó anteriormente, será el que se utilice en los cálculos de este libro.

Factor de monto a interés compuesto = $(1 + 0.015)^{24} = 1.429503$

$$M = 50\,000\ (1.429503)$$
$$M = 71\,475.14$$

En dos años, la inversión de \$50 000 se transformará en un monto de \$71 475.14 por la generación de un interés compuesto de \$21 475.14.

EJEMPLO 3.3.2

Se depositan en una caja de ahorros \$100 000 a una tasa de interés de 4.8% capitalizable mensualmente.

a) ¿Cuál será el monto acumulado a interés compuesto en un periodo de 9 meses?
b) Suponiendo que la caja de ahorros preste ese mismo dinero con una tasa de interés de 30% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál sería el pago que se debe efectuar al cabo de los mismos 9 meses?

Solución:
a) Depósito

Se aplica la fórmula del monto a interés compuesto (3.3)

$$M = C(1 + i)^n$$

Como se vio en el ejemplo 3.3.1, debe determinarse la tasa de interés mensual dividiendo la tasa anual entre la frecuencia de conversión:

$$i = \frac{\text{Tasa de interés anual}}{\text{Frecuencia de conversión}}$$

$$i = \frac{0.048}{12} = 0.004$$

Puesto que el tiempo de inversión está ya expresado en meses, se tienen todos los elementos necesarios para plantear y resolver el ejemplo:

$$C = 100\,000$$
$$i = 0.004$$
$$t = 9$$

Así, se sustituyen los valores en la fórmula (3.3) y se tiene:

$$M = C(1 + i)^n$$
$$M = 100\,000(1 + 0.004)^9$$
$$M = 100\,000\ (1.036581)$$
$$M = 103\,658.10$$

Por lo tanto, un depósito de \$100 000 rendirá \$3 658.10 de interés y acumulará un monto de \$103 658.10 al cabo de 9 meses.

b) Préstamo

Para aplicar la fórmula

$$M = C(1 + i)^n$$

es necesario determinar la tasa de interés, para lo cual se divide la tasa anual entre la frecuencia de conversión:

$$i = \frac{\text{Tasa de interés anual}}{\text{Frecuencia de conversión}}$$

$$i = \frac{0.30}{12} = 0.025$$

Con ello se tienen ya todos los datos necesarios para aplicar dicha fórmula:

$$C = 100\,000$$
$$i = 0.025$$
$$t = 9$$

Se sustituyen los valores en la fórmula (3.3) y se tiene:

$$M = C(1 + i)^n$$
$$M = 100\,000(1 + 0.025)^9$$
$$M = 100\,000\ (1.248863)$$
$$M = 124\,886.30$$

La diferencia que existe entre el monto derivado del préstamo (\$124 886.30) y el monto que debe pagar al ahorrador (\$103 658.10), esto es, la cantidad de \$21 228.20, constituye la utilidad del intermediario financiero, en este caso, de la caja de ahorros.

EJEMPLO 3.3.3

Se obtiene un préstamo bancario de \$1 500 000 a un plazo de un año y con interés de 12% convertible trimestralmente. ¿Cuál es el monto que deberá liquidarse?

SOLUCIÓN:

Se determina primero la tasa de interés por periodo de conversión:

$$i = \frac{0.12}{4} = 0.03$$

El número de periodos de capitalización n es igual a: 1 año × 4 = 4

$$M = C(1 + i)^n$$
$$M = 1\,500\,000\,(1 + 0.03)^4$$
$$M = 1\,500\,000\,(1.125509)$$
$$M = 1\,688\,263.22$$

Deberá liquidarse al banco la cantidad de $1 688 263.22.

3.3.1 Monto compuesto con periodo de interés fraccionario

La fórmula (3.3) se deriva del supuesto de que n es entero. En teoría puede aplicarse también en el caso de que n sea fraccionario, pero para resolverlo sólo puede recurrirse al uso de logaritmos o de la calculadora.

EJEMPLO 3.3.4

Se decide liquidar el préstamo del ejemplo anterior en forma anticipada luego del transcurso de 7 meses y medio. ¿Cuál es la cantidad que debe pagarse?

SOLUCIÓN: 7.5/3 meses = 2.5 trimestres

$$M = 1\ 500\ 000\,(1 + 0.03)^{2.5}$$
$$M = 1\ 500\ 000\,(1.076696)$$
$$M = 1\ 615\ 043.86$$

Una forma práctica de resolverlo es determinar el monto compuesto correspondiente a los periodos completos de conversión y aumentar el interés simple por el periodo fraccionario de conversión a la tasa estipulada.

$$M = \overbrace{C(1 + i)^n}^{\text{I compuesto}}\ \overbrace{(1 + it)}^{\text{I simple}}$$
$$M = 1\ 500\ 000\,(1 + 0.03)^2[1 + (0.03)(0.5)]$$
$$M = 1\ 500\ 000\,(1.060900)(1.015)$$
$$M = 1\ 615\ 220.25$$

La diferencia resultante, según la tasa de interés y del tiempo, puede llegar a ser significativa, por lo que siempre que sea posible se recomienda el empleo de la fórmula (3.3).

EJEMPLO 3.3.5

Se contrata un préstamo bancario de habilitación y avío por 150 000 pesos. El plazo de pago es de 3 años. La tasa de interés es de 20% anual convertible semestralmente.

¿Cuál es la cantidad que deberá liquidarse si se decide cancelarlo en forma anticipada a los 15 meses?

SOLUCIÓN:

Por el método exacto:

$$\frac{\text{Periodo de pago}}{\text{Periodo de capitalización}} = \frac{15 \text{ meses}}{6 \text{ meses}} = 2.5 \text{ semestres}$$

$$M = C(1 + i)^n$$
$$M = 150(1 + 0.10)^{2.5}$$

$$M = 150(1.269059)$$
$$M = 190.358810$$

Deben liquidarse $190 358.81

Nota: La magnitud de las cifras a veces provoca confusiones y errores por el manejo de los ceros. Por esta razón se recomienda, siempre que sea posible, eliminar ceros y manejar cifras en miles o millones de pesos en los procesos de solución de los problemas. Esta práctica se ha adoptado en la redacción del presente texto y se encontrará a lo largo del mismo en varios ejemplos.

Cabe señalar que si bien se utilizan cifras simplificadas en los procesos de solución, el resultado final se expresa en su magnitud original.

Por el método aproximado:

$$M = C(1 + i)^n(1 + it)$$
$$M = 150\,000(1 + 0.10)^2[1 + 0.10(3/6)]$$
$$M = 150\,000(1.10)^2[1 + 0.10(0.50)]$$
$$M = 150\,000(1.10)^2(1.05)$$
$$M = 190\,575.00$$

En este caso la diferencia entre un método y otro importa $216.19.

Ejercicios de la sección 3.3

4. Determine el interés que gana en un año un depósito de $1000 en:
   - *a*) Una cuenta de ahorros que paga 20% de interés anual simple.
   - *b*) Una cuenta de ahorros que paga 10% de interés semestral simple.
   - *c*) Una cuenta de ahorros que paga 20% de interés anual compuesto semestralmente.
   - *d*) Una cuenta de valores que paga 20% de interés anual convertible trimestralmente.
   - *e*) Una cuenta de valores que paga 20% de interés anual pagadero mensualmente.
   - *f*) Una cuenta de valores que paga 20% de interés anual convertible diariamente.
5. Determine el monto acumulado de $50 000 que se depositan en una cuenta de valores que paga 15% anual convertible mensualmente:
   - *a*) Al cabo de un año.
   - *b*) Al cabo de dos años.
   - *c*) Al cabo de tres años.
   - *d*) Al cabo de cinco años.
6. Determine el interés simple y el interés compuesto que ganaría un depósito de $100 000 si la tasa de interés fuese de 5% y el plazo del depósito 5 años. ¿Qué conclusiones puede presentar?
7. Tabule el crecimiento de $1 a 1, 5, 10, 15 y 20 años si los tipos de interés compuesto anual son: 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90%, 100%.
8. Considere que las tasas de interés del ejemplo anterior son tasas anuales de inflación. ¿Qué sucedería con los precios? ¿Qué conclusiones puede emitir?
9. ¿Cuánto dinero debe pagarse a un banco que hizo un préstamo de $300 000 si se reembolsa al año capital e interés y la tasa aplicada es de 24% anual convertible trimestralmente?
10. ¿Qué cantidad debería liquidarse en caso de que el préstamo del ejemplo anterior se pagara al cabo de 10 meses?
11. Una persona deposita su dinero en el banco a plazo de 2 años y a una tasa de 15% convertible semestralmente. Debido a una emergencia, debe retirar su dinero al cabo de 15 meses. ¿Cuál será el monto acumulado que se le entregue si depositó $12 000? Utilice el método exacto y el método aproximado.

12. ¿Cuál será el monto acumulado en una cuenta de valores que paga 1.2% de interés mensual si se hicieran los siguientes movimientos durante el año y se desea conocer su saldo al 31 de diciembre?

Fecha	Importe	Tipo de movimiento
15 de febrero	15 000	Apertura
15 de mayo	3 000	Depósito
15 de julio	1 500	Retiro
15 de septiembre	2 000	Retiro
15 de diciembre	2 500	Depósito

13. La población de un estado ha crecido a una tasa anual de 2.8% durante los últimos 5 años. Si el número actual de habitantes es de 3 825 000, ¿cuál será su población en 5, 10 y 20 años considerando:

a) que la tasa de crecimiento poblacional no cambia?
b) que la población crece a 2.8% los primeros 5 años, 2.5% los siguientes 5 años y 2.0% los últimos años?

14. El ingreso anual por habitante en el estado anterior es de 5 000 dólares. ¿Cuál será su ingreso anual en 5, 10, 15 y 20 años si se considera que el PIB crece a un ritmo de 3.5% anual promedio, y la población crece a 2.8%?

3.4 Tasa nominal, tasa efectiva y tasas equivalentes

Cuando se realiza una operación financiera, se pacta una tasa de interés anual que rige durante el lapso que dure la operación, que se denomina *tasa nominal de interés*.

Sin embargo, si el interés se capitaliza en forma semestral, trimestral o mensual, la cantidad efectivamente pagada o ganada es mayor que si se compone en forma anual. Cuando esto sucede, se puede determinar una *tasa efectiva anual*.

Dos tasas de interés anuales con diferentes periodos de capitalización serán *equivalentes* si al cabo de un año producen el mismo interés compuesto.

EJEMPLO 3.4.1

¿Cuál es la tasa efectiva de interés que se recibe de un depósito bancario de $1 000 pactado a 4.8% de interés anual convertible mensualmente?

Solución:

$$M = 1000\left(1+\frac{0.048}{12}\right)^{12}$$

$$M = 1000(1+0.004)^{12}$$

$$M = 1000(1.049070)$$

$$M = 1\,049.07$$

$$I = M - C$$

$$I = 1\,049.07 - 1000$$

$$I = 49.07$$

$$i = \frac{I}{C}$$

$$i = \frac{49.07}{1000} = 0.049070$$

La tasa efectiva de interés es de 4.91%.

La tasa equivalente a una tasa anual de 4.8% convertible mensualmente es de 4.91% convertible anualmente.

La relación entre ambas tasas puede verse como sigue: sea i la tasa anual efectiva de interés, j la tasa de interés anual nominal y m el número de periodos de capitalización al año.

Se ha establecido que ambas tasas son equivalentes si producen el mismo interés al cabo de un año.

Por lo tanto, $C(1 + i) = C(1 + j/m)^m$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre C, tenemos:

$$(1 + i) = (1 + j/m)^m$$
$$i = (1 + j/m)^m - 1 \qquad \textbf{(3.5)}$$

Retomando el ejemplo anterior:

$$i = (1 + 0.048/12)^{12} - 1$$
$$i = (1 + 0.004)^{12} - 1$$
$$i = (1.049070) - 1$$
$$i = 0.049070$$
$$i = 4.91\%$$

EJEMPLO 3.4.2

¿Cuál es la tasa efectiva que se paga por un préstamo bancario de $250 000 que se pactó a 16% de interés anual convertible trimestralmente?

SOLUCIÓN:

Aplicando directamente la fórmula (3.5) se tiene:

$$i = (1 + j/m)^m - 1$$
$$i = (1 + 0.16/4)^4 - 1$$
$$i = (1 + 0.04)^4 - 1$$
$$i = (1.169859) - 1$$
$$i = 0.169859$$
$$i = 16.98\%$$

EJEMPLO 3.4.3

Determinar la tasa nominal j convertible trimestralmente, que produce un rendimiento de 40% anual.

SOLUCIÓN:

En este caso la tasa de interés efectiva es ya conocida (puede ser la tasa de inflación esperada en el año), y se desea conocer la tasa nominal j convertible trimestralmente que producirá dicho rendimiento. Aplicando nuevamente la ecuación (3.5) se despeja en ella j:

$$i = (1 + j/m)^m - 1$$
$$(1 + i) = (1 + j/m)^m$$
$$\sqrt[m]{(1+i)} = (1 + j/m)$$
$$(1 + i)^{1/m} = (1 + j/m)$$
$$(1 + i)^{1/m} - 1 = j/m$$
$$m[(1 + i)^{1/m} - 1] = j$$

$$j = 4[(1 + 0.40)^{1/4} - 1]$$
$$j = 4[(1.087757) - 1]$$
$$j = 4(0.087757)$$
$$j = 0.3510$$
$$j = 35.10\%$$

La tasa nominal j convertible trimestralmente que produce 40% efectivo es 35.10%.

EJEMPLO 3.4.4

¿Cuál es la tasa nominal j convertible mensualmente equivalente a una tasa de 14% convertible trimestralmente?

Solución:
Puesto que ambas tasas son convertibles en periodos distintos deben igualarse a su plazo anual.

a) Una tasa nominal j convertible mensualmente es igual a una tasa efectiva:

$$i = (1 + j/12)^{12}$$

b) Una tasa nominal de 14% convertible trimestralmente es igual a una tasa anual efectiva:

$$i = (1 + 0.14/4)^4$$

Igualando ambas tasas efectivas se tiene:

$$(1 + j/12)^{12} = (1 + 0.14/4)^4$$
$$(1 + j/12)^{12/12} = (1 + 0.14/4)^{4/12}$$
$$(1 + j/12) = (1 + 0.035)^{1/3}$$
$$j/12 = [(1 + 0.035)^{1/3} - 1]$$
$$j = 12\,[(1 + 0.035)^{1/3} - 1]$$
$$j = 12\,(1.011533 - 1)$$
$$j = 12\,(0.011533)$$
$$j = 0.138398$$

Por lo tanto, una tasa nominal de 13.84% convertible mensualmente es equivalente a una tasa nominal de 14% convertible trimestralmente.

Otra vez puede verse que a mayor frecuencia de conversión se obtiene un rendimiento mayor.

EJEMPLO 3.4.5

¿A qué tasa nominal convertible trimestralmente un capital de \$30 000 crecerá hasta \$100 000 en 5 años?

Solución:
Se aplica la fórmula (3.3) y se tiene:

$$M = C(1 + i)^n$$
$$100\,000 = 30\,000\,(1 + i)^n$$
$$\frac{100\,000}{30\,000} = (1 + i)^n$$

Pero $(1 + i)^n = (1 + j/m)^{mn}$

donde $n = 5$ años y $m = 4$

Así, $(1 + j/4)^{20} = \dfrac{100\,000}{30\,000}$

$$(1 + j/4) = (3.333333)^{1/20}$$
$$j = 4[(3.333333)^{1/20} - 1]$$
$$j = 4(1.062048 - 1)$$
$$j = 0.24819$$

Se requiere una tasa nominal de 24.82% convertible trimestralmente para que un capital de \$30 000 se convierta en un monto de \$100 000 en un plazo de 5 años.

Ejercicios de la sección 3.4

15. Determine la tasa de interés efectiva que se recibe de un depósito bancario si la tasa nominal es de 6% y se convierte:

a) Anualmente
b) Semestralmente
c) Trimestralmente
d) Mensualmente
e) Diariamente

16. Determine la tasa nominal que produce un rendimiento de 10% anual efectivo si el interés se convierte:

a) Anualmente
b) Semestralmente
c) Trimestralmente
d) Mensualmente
e) Diariamente

17. Determine la tasa nominal j convertible trimestralmente que resulte equivalente a una tasa de 15% convertible semestralmente.

18. ¿Qué tasa nominal j convertible mensualmente resulta equivalente a una tasa de 4% convertible trimestralmente?

19. ¿Qué tasa de interés mensual resulta equivalente a una tasa de 12% semestral?

20. ¿Qué tasa de interés trimestral resulta equivalente a una tasa mensual de 2%?

21. ¿Qué tasa de interés anual resulta equivalente a una tasa de 4% trimestral?

22. ¿Qué tasa de interés simple mensual es equivalente a una tasa de interés nominal $j = 18\%$ convertible anualmente si se invierte el dinero durante:

a) un año? *b*) dos años? *c*) tres años?

23. ¿Qué tasa de interés simple anual correspondería a los incisos del problema anterior?

24. Un banco ofrece los siguientes depósitos y tasas de interés:

a) $j_{12} = 9.30$ *b*) $j_4 = 9.50$ *c*) $j_2 = 9.80$

¿Cuál es la mejor alternativa?

25. ¿A qué tasa de inflación anual compuesta mensualmente se triplicarían los precios en:

a) 3 años? *b*) 5 años? *c*) 10 años?

3.5 Valor actual o presente

En ocasiones se conoce cuál es el monto que debe pagarse o que se desea reunir, y se quiere determinar el capital que es necesario invertir en el momento presente a una tasa de interés determinada, para llegar a tener dicho monto; se está entonces en presencia de un problema denominado de *valor actual* o *valor presente*.

El valor actual muestra, como su nombre lo indica, cuál es el valor en un momento determinado de una cantidad que se recibirá o pagará en un tiempo posterior.

Para calcularlo se retorna a la fórmula (3.3):

$$M = C(1 + i)^n$$

en la cual se despeja el capital C,

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} = M(1+i)^{-n} \tag{3.6}$$

Generalizando, puede decirse que si se conocen tres de las cuatro variables involucradas: monto (M), capital (C), tiempo (n) y tasa de interés (i), puede calcularse la cuarta.

EJEMPLO 3.5.1

¿Cuánto debe depositarse en el banco si se desea tener un monto de \$50 000 dentro de 3 años y la tasa de interés es de 20% anual convertible semestralmente?

SOLUCIÓN:
Aplicando la fórmula (3.6):

$$C = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$M = 50\,000$
$i = 10\%$ semestral (20% anual entre 2)
$n = 6$ semestres (3 años × 2)

$$C = \frac{50\,000}{(1+0.10)^6}$$

$$C = \frac{50\,000}{1.771561}$$

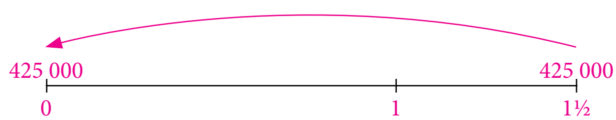
$$C = 28\,223.70$$

Deben depositarse \$28 223.70 a fin de contar con \$50 000 en un plazo de 3 años, si la tasa de interés es de 20% anual convertible semestralmente.

EJEMPLO 3.5.2

Juan Pérez desea adquirir una casa con valor de \$850 000. Le pidieron que entregue 50% de anticipo y 50% en un plazo de un año y medio, al término de la construcción y entrega del inmueble. ¿Cuánto dinero debe depositar en el banco en este momento para poder garantizar la liquidación de su adeudo, si la tasa de interés vigente es de 6% anual capitalizable mensualmente?

SOLUCIÓN:
Juan Pérez paga en este momento \$425 000 (50% de la operación), y debe pagar otro tanto en un plazo de año y medio, como se aprecia en la gráfica 3.2.



Gráfica 3.2

Para calcular la cantidad que debe depositar se utiliza la fórmula (3.6) considerando que:

$$i = \frac{0.06}{12} = 0.005 = 0.5\%$$
$$n = 12 \times 1.5 \text{ años} = 18 \text{ meses}$$
$$C = \frac{M}{(1+i)^n} = M(1+i)^{-n}$$
$$C = 425\,000(1.005)^{-18}$$
$$C = 425\,000(0.914136)$$
$$C = 388\,507.87$$

Para garantizar el pago de su adeudo, Juan debe depositar $388 507.87, los cuales, con la reinversión de los intereses se incrementarán hasta formar el monto de $425 000 en un plazo de año y medio.

Como se ve en estos ejemplos, C es el valor presente o valor actual de M. Esto es, puede considerarse que el capital C y el monto M son dos *valores equivalentes* dada una determinada tasa de interés y un periodo también determinado. En el ejemplo anterior para Juan Pérez resultaría *equivalente* pagar $388 507.87 en este momento o $425 000 dentro de un año y medio, dada una tasa de interés de 6% anual capitalizable mensualmente. Es decir, cualquiera de las dos operaciones de pago le resultaría igual.

Este hecho nos remite el valor del dinero en el tiempo: no es lo mismo tener $100 hoy que tener $100 dentro de un año, pues su valor adquisitivo *no es equivalente*. Este fenómeno es particularmente claro en países en los que la inflación se ha acelerado de manera sustancial, y en los cuales la desvalorización del dinero ocurre casi día a día.

Como consumidor prefiero tener mi dinero hoy y no mañana, mucho menos dentro de un año.

En el campo de los negocios es indispensable considerar esos efectos, pues muchas veces se realizan inversiones en el momento presente que generan flujos de efectivo que se recibirán dentro de uno o más años. El *valor presente* de dichos flujos deberá compararse con la inversión que se está realizando (también a valor presente) y, para lograrlo, se deben *descontar* ambos, inversión e ingresos, a fin de poderlos comparar en forma *equivalente* en el momento presente.

EJEMPLO 3.5.3

La Compañía de Novedades Actuales planea realizar una inversión de $50 000 para producir un artículo de moda que espera le genere ingresos de $80 000 dentro de 2 años. Si se considera una inflación promedio de 25% anual, ¿conviene la inversión?

Solución:

Se comparan los $50 000 que se deben invertir en el momento presente con los $80 000 que se espera recibir en 2 años. Para hacerlo es necesario que ambas cantidades sean *equivalentes*. Se traen a valor presente los $80 000 y así se tiene una misma base de comparación. La tasa de inflación se acumula de la misma forma que el int3rés. Aplicando la fórmula (3.6):

$$C = M(1 + i)^{-n}$$
$$C = 80\,000(1 + 0.25)^{-2}$$
$$C = 80\,000(0.64)$$
$$C = 51\,200$$

Los $80 000 que la empresa recibirá en dos años equivalen a $51 200 descontados de la inflación. Este valor presente de los ingresos se compara con el valor presente de la inversión que es de $50 000 y muestra que efectivamente se logrará una utilidad de $1 200 y que, por lo tanto, conviene invertir.

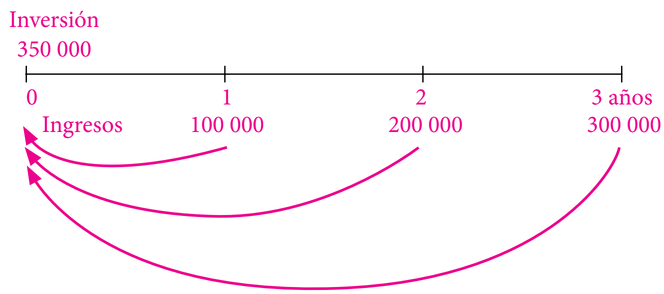
EJEMPLO 3.5.4

Una compañía minera ha descubierto una veta de manganeso en un país latinoamericano y debe decidir la conveniencia o inconveniencia de su explotación. Con el fin de poder beneficiar el mineral es necesario realizar una inversión de \$350 000. Sus analistas financieros estiman que la veta producirá sólo durante 3 años y, de acuerdo con el precio vigente del metal, los ingresos serían los siguientes:

ler. año	100 000
2o. año	200 000
3er. año	300 000

Si la tasa de inflación promedio de los próximos tres años es de 40%, ¿resulta rentable la inversión?

Solución:
Para tener una idea más clara de la operación se puede elaborar una gráfica de tiempo y valor (gráfica 3.3).



Gráfica 3.3

Se traen a valor presente los ingresos que se espera recibir en el futuro, utilizando la tasa de inflación, y se comparan con la inversión inicial.

$$1\text{er. año} = \$100\ 000$$
$$C = M(1+i)^{-1}$$
$$C = 100\ 000(1+0.40)^{-1}$$
$$C = 100\ 000(0.71428571)$$
$$C = 71\ 428.57$$

$$2\text{o. año} = \$200\ 000$$
$$C = M(1+i)^{-2}$$
$$C = 200\ 000(1+0.40)^{-2}$$
$$C = 200\ 000(0.51020408)$$
$$C = 102\ 040.82$$

$$3\text{er. año} = \$300\ 000$$
$$C = M(1+i)^{-3}$$
$$C = 300\ 000(1+0.40)^{-3}$$
$$C = 300\ 000(0.36443149)$$
$$C = 109\ 329.45$$

La suma del valor presente de los ingresos esperados en los próximos años es:

$$71\ 428.57 + 102\ 040.82 + 109\ 329.45 = \$282\ 798.84$$

El valor presente de los ingresos (\$282 798.84) es menor al de la inversión necesaria para su explotación (\$350 000). Por lo tanto, a la compañía no le conviene explotar la veta a menos que el precio del metal se incremente y con él sus ingresos esperados.

3.5.1 Valor actual de deudas que devengan interés

En determinadas ocasiones se pueden encontrar deudas que devengan interés y de las cuales se quiere conocer su valor en un momento anterior a su liquidación.

Para solucionar estos problemas, en primer lugar se debe determinar el monto original de la deuda y, a partir de él, calcular el valor actual.

EJEMPLO 3.5.5

Se otorga un préstamo de \$2 000 000 para liquidar una maquinaria y se firma un documento a plazo de un año con interés de 15%. A fin de recuperar el efectivo en forma inmediata, la empresa vendedora descuenta dicho documento en un banco a una tasa de 2% mensual.

a) ¿Qué cantidad es la que se recibe?
b) ¿Qué tasa de interés efectiva debe pagar la compañía para financiarse?

Solución:

$$M = C(1+i)^n$$
$$M = 2\,000\,000(1+0.15)^1$$
$$M = 2\,000\,000(1.15)$$
$$M = 2\,300\,000$$

El monto nominal de la deuda es de \$2 300 000.

a) Se calcula el valor actual:

$$C = M(1+i)^{-n}$$
$$C = 2\,300\,000(1.02)^{-12}$$
$$C = 2\,300\,000(0.788493)$$
$$C = \$1\,813\,534.30$$

b) Tasa de interés efectiva:

Valor de la maquinaria	=	\$2 000 000.00
Préstamo otorgado por el banco	=	1 813 534.30
Interés pagado por la empresa que vendió la maquinaria	=	186 465.70

Costo para la empresa que vendió la maquinaria:

$$i = \frac{I}{C} = \frac{186\,465.70}{2\,000\,000}$$
$$i = 0.093233 = 9.32\%$$

La tasa de interés efectiva que debe pagar la compañía para financiarse a través de los documentos es de 9.32% anual.

EJEMPLO 3.5.6

Se descuenta en un banco un documento de \$500 000 con vencimiento a 3 meses que devenga 2% de interés mensual. El banco lo descuenta a una tasa de 22% anual. ¿Cuál es la cantidad que se recibe?

Solución:

a) Se calcula el monto original:

$$M = C(1+i)^n$$
$$M = 500(1+0.02)^3$$
$$M = 500(1.061208)$$
$$M = 530\,604$$

b) Se calcula el valor actual:

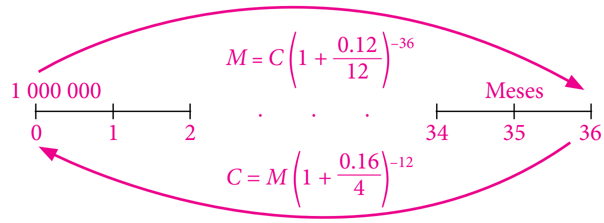
$$C = M(1+i)^{-n}$$
$$C = 530\,604(1+0.22)^{-3/12}$$
$$C = 530\,604(1.22)^{-0.25}$$
$$C = 530\,604(0.951503)$$
$$C = 504\,871.16$$

En este caso, a diferencia del anterior, la tasa de interés cobrada por el banco es menor que la que se cargó en el valor del documento. El acreedor tuvo un beneficio adicional.

EJEMPLO 3.5.7

Un documento por $1 000 000 debe pagarse en 36 meses, lapso durante el cual generará intereses a 12% convertible mensualmente. Se descuenta en el banco y éste carga un interés de 16% convertible trimestralmente. ¿Cuál es la cantidad que se recibe? ¿Cuál fue la utilidad o pérdida que generó la operación?

Solución:
Esta situación involucra dos problemas que deben resolverse en forma separada; para visualizarlo más claramente se recurre a una gráfica de tiempo y valor (vea la gráfica 3.4).



Gráfica 3.4

En primer lugar debe calcularse el monto total de la deuda, dados:

$$C = \$1\,000\,000;\ J_{12} = 12\%;\ i = 1\%\text{ mensual};\ n = 36$$
$$M = (1 + i)^n$$
$$M = 1\,000\,000\,(1 + 0.01)^{36}$$
$$M = 1\,000\,000\,(1.430769)$$
$$M = 1\,430\,769$$

Acto seguido se procede a calcular el valor actual del monto obtenido en función de la tasa de descuento, dados:

$$M = 1\,430\,769;\ J_4 = 16\%;\ i = 4\%;\ n = 12$$
$$C = M(1 + i)^{-n}$$
$$C = 1\,430\,769(1 + 0.04)^{-12}$$
$$C = 1\,430\,769(0.624597)$$
$$C = 893\,654.10$$

La cantidad neta que se recibe del banco asciende a $893 654.10. Hay una pérdida de $106 345.90 en la operación (1 000 000 – 893 654.10).

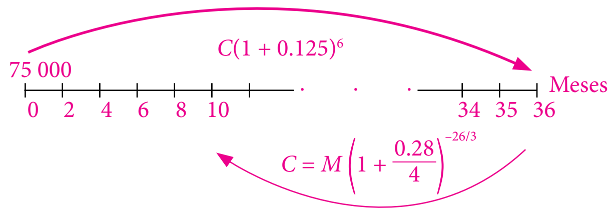
EJEMPLO 3.5.8

En la compra de una maquinaria se firma un documento por $75 000 a pagar en 3 años con una tasa de interés de 12.5% semestral. Luego del transcurso de 10 meses de la firma, se decide descontarlo en el banco y éste carga un interés de 28% convertible trimestralmente. ¿Cuál es la cantidad neta que se recibe?

Solución:
En este caso, al igual que en el anterior, se involucran dos problemas:

a) uno de monto y
b) uno de descuento.

Utilizando una gráfica de tiempo y valor se tiene (vea la gráfica 3.5).



Gráfica 3.5

a) Se determina en primer lugar el monto a pagar:

$$C = 75\,000;\ i = 12.5\%;\ n = 6 \text{ (36 meses entre 6)}$$
$$M = C(1 + i)^n$$
$$M = 75\,000(1 + 0.125)^6$$
$$M = 75\,000(2.027286)$$
$$M = 152\,046.49$$

b) A partir del monto obtenido se procede a descontar de acuerdo con la tasa fijada por el banco:

$$M = 152\,046.49;\ J_4 = 28\%;\ i = 7\%$$
$$n = 26 \text{ meses} = 8.66666667 \text{ trimestres } (26/3)$$

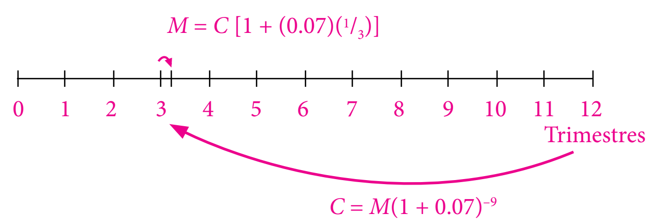
En este caso se presenta, además, el problema de periodos de interés fraccionario y puede resolverse en forma exacta o en forma aproximada.

b1) Exacta:

$$C = M(1 + i)^{-n}$$
$$C = 152\,046.49(1 + 0.07)^{-8.666667}$$
$$C = 152\,046.49(0.556340)$$
$$C = 84\,589.61$$

b2) Aproximada:

Cuando se tienen periodos de interés fraccionario en problemas de interés compuesto se descuenta hasta el periodo completo que incluya aquel que se está buscando y, posteriormente, se adiciona el tiempo faltante utilizando el interés simple. Con base en una gráfica de tiempo y valor (vea la gráfica siguiente).



Gráfica 3.6

$$C = M(1 + i)^{-n}$$
$$C = 152\,046.49(1 + 0.07)^{-9}$$
$$C = 152\,046.49(0.543934)$$
$$C = 82\,703.22$$

El valor actual a 9 meses será de \$82 703.22.
A dicho valor se le acumula el interés simple por un mes para ubicarlo en el tiempo fijado:

$$M = C(1 + it)$$
$$M = 82\,703.22[1 + (0.07)(1/3)]$$
$$M = 82\,703.22(1.023333)$$
$$M = 84\,632.93$$

que es la cantidad que se obtiene con descuento aproximado y la cual, como puede verse, arroja una diferencia de:

$$84\,632.93 - 84\,589.61 = 43.32$$

respecto a la que se obtiene mediante el método exacto.

Ejercicios de la sección 3.5

26. ¿Cuánto dinero debe depositarse en el banco si se desea acumular un monto de $250 000 en un plazo de 2 años, y la tasa de interés es de 9% convertible mensualmente?

27. ¿Qué cantidad de dinero recibe una empresa en calidad de préstamo si ha firmado un documento por $650 000 que incluye capital e intereses a 18% convertible trimestralmente, y tiene vencimiento en 18 meses?

28. ¿Cuál es el valor presente de $1 000 que se cobrarán al cabo de un año si la tasa de interés compuesto trimestralmente es:

a) 10%?
b) 20%?
c) 30%?
d) 50%?
e) 100%?

29. ¿Cuál es el valor presente de $1 000 que se cobrarán en un año si la tasa de interés es de 15% convertible:

a) mensualmente?
b) trimestralmente?
c) semestralmente?
d) anualmente?

30. Una deuda de $50 000 se documenta mediante un pagaré que incluye intereses a razón de 3% trimestral, y que será pagadero al cabo de un año. ¿Qué cantidad puede obtenerse por él si se descuenta al cabo de 4 meses a una tasa de interés de 12% convertible mensualmente?

31. Una distribuidora de automóviles ofrece a sus clientes 10% de descuento en la compra al contado de un automóvil nuevo, o bien, 50% del precio al contado y 50% a 6 meses sin descuento y sin intereses. ¿Qué alternativa debe escogerse si el dinero puede ser invertido a una tasa de interés mensual de:

a) 2%? *b*) 3%? *c*) 4%?

32. Una empresa dedicada al comercio internacional desea incrementar sus operaciones, para lo cual estudia dos proyectos alternativos. Los flujos netos de efectivo presupuestados son:

Proyecto	Inversión requerida	Flujo neto de efectivo al fin de		
		Año 1	Año 2	Año 3
A	80 000	20 000	35 000	60 000
B	75 000	45 000	30 000	25 000

¿Qué alternativa se debe escoger si la compañía puede obtener en otro tipo de inversión rendimientos de:

a) 15%? *b*) 20%?

33. En una operación de exportación una empresa recibe un pagaré por 285 000 dólares a 180 días de plazo que devenga un interés mensual de 1%. A fin de contar con recursos líquidos, la empresa descuenta el documento en su banco y éste lo acepta cargando un interés de 10% anual convertible trimestralmente. ¿Cuál es el importe neto que recibe la empresa?

34. Por la venta de una casa, una compañía inmobiliaria recibe un pagaré por \$140 000 con vencimiento a 5 años que devenga intereses a razón de 10% anual convertible semestralmente. ¿Qué cantidad recibirá la empresa si al cabo de un año descuenta el documento en su banco y éste le cobra 16% de interés anual?

35. Una empresa obtiene un préstamo de habilitación por \$150 000, el cual documenta con un pagaré con vencimiento a 3 años y que estipula intereses trimestrales de 6% liquidables al término de la operación. Al cabo de 3 meses, el banco aceptante negocia el documento y es descontado con un interés de 8% anual convertible semestralmente. ¿Qué importe recibe el banco? Determínelo utilizando el método exacto y el método aproximado.

3.6 Tiempo

Como ya se mencionó, la fórmula (3.3) puede utilizarse para resolver cualquier problema de interés compuesto, pues en ella están involucradas todas las variables que lo determinan: monto, capital, tiempo y tasa de interés; conociendo tres de ellas se despeja y determina la cuarta.

Se verán en seguida dos ejemplos de cómo solucionar problemas en los que se desconoce el tiempo.

EJEMPLO 3.6.1

¿En cuánto tiempo se duplicará una inversión de \$1 000 si se considera una tasa de interés

a) de 36% anual convertible mensualmente, y
b) de 24% anual también convertible mensualmente?

Solución:
Para resolver este tipo de problemas es necesario recurrir al uso de los logaritmos. Con base en la fórmula (3.3) se tiene:

$$M = C(1+i)^n$$

se despeja $(1+i)^n$ y se obtiene:

$M/C = (1+i)^n$ = factor de acumulación del monto a interés compuesto. Aplicando logaritmos:

$$\log \text{factor} = n \log (1+i)$$

$$\frac{\log \text{factor}}{\log (1+i)} = n \tag{3.7}$$

a) Ahora, dado que

$$j_{12} = 0.36$$

el interés mensual es

$$i = 0.03.$$

También, como se quiere encontrar el tiempo en el que se duplica un capital dado

$$\frac{M}{C} = 2 \quad \text{y}$$

$$(1+i)^n = 2$$

De donde
$$n = \frac{\log 2}{\log (1.03)}$$

El logaritmo base 10 del factor 2 es 0.301030 y el logaritmo base 10 de 1.03 es 0.012837:

$$n = \frac{0.301030}{0.012837}$$
$$n = 23.45$$

Se necesitan 23.45 meses para que el capital invertido se duplique dada una tasa de 3% mensual.

b) Si la tasa de interés es de 24% anual, se tiene:

$$M = C(1 + i)^n$$
$$M/C = (1 + i)^n$$
$$\frac{2\,000}{1\,000} = (1+0.02)^n$$
$$2 = (1.02)^n$$
$$\log 2 = n \log 1.02$$
$$\frac{\log 2}{\log 1.02} = n$$
$$n = \frac{0.301030}{0.008600}$$
$$n = 35.00$$

Si la tasa de interés es de 24% anual convertible mensualmente, se necesitarán 35 meses para duplicar el capital.

Debe destacarse que la conclusión anterior es válida sin que importe a cuánto asciende el capital invertido, pues lo que se considera es el factor de acumulación del monto a interés compuesto y no la cantidad invertida en sí.

EJEMPLO 3.6.2

¿En cuánto tiempo reduce \$1.00 su valor adquisitivo a 50% dada una inflación anual de:

a) 50%? *b*) 10%? *c*) 30%? *d*) 100%?

SOLUCIÓN:

a) En forma apriorística hay quienes señalarán que la respuesta al problema anterior (inflación de 50%) es de un año, pero… *¡están equivocados!*

Aplicando la fórmula (3.3) se tiene:

$$M = C(1 + i)^n$$

Se conoce que $M = 1$, pues es la cantidad absoluta de la que se dispondrá en el futuro. Se conoce también que $C = 0.50$, pues es el poder adquisitivo actual del peso que se recibirá en el futuro. La tasa de inflación $i = 0.50$.

$$M/C = (1 + i)^n$$
$$\frac{1.00}{0.50} = (1+0.50)^n$$
$$2 = (1.50)^n$$
$$\log\ 2 = n\ \log\ 1.50$$
$$\frac{\log\ 2}{\log\ 1.50} = n$$
$$n = \frac{0.301030}{0.176091}$$
$$n = 1.71$$

Este resultado indica que el valor adquisitivo de \$1 se verá reducido a \$0.50 en 1.71 años dada una inflación de 50%.

b) Para determinar en el caso de 10% de inflación se sigue el mismo procedimiento:

$$M/C = (1+i)^n$$
$$2 = (1+0.10)^n$$
$$\frac{\log\ 2}{\log\ 1.10} = n$$
$$n = \frac{0.301030}{0.041392}$$
$$n = 7.27$$

Si la inflación disminuye a 10% tomará 7.27 años que la moneda reduzca su valor real a la mitad.

c) Si sube a 30%, se tiene:

$$2 = (1+0.30)^n$$
$$\frac{\log\ 2}{\log\ 1.30} = n$$
$$n = \frac{0.301030}{0.113943}$$
$$n = 2.64$$

Con la inflación de 30% el lapso se reduce a 2.64 años.

d) Si sube a 100%, se tiene:

$$2 = (1+1)^n$$
$$\frac{\log\ 2}{\log\ 2} = n$$
$$n = \frac{0.301030}{0.301030}$$

Si la inflación es de 100%, en sólo un año la moneda reducirá su poder adquisitivo a la mitad.

3.7 Tasa de interés

Para determinar la tasa de interés conociendo las otras variables, se despeja en la fórmula (3.3) y se resuelve.

EJEMPLO 3.7.1

¿A qué tasa de interés se deben depositar \$15 000 para disponer de \$50 000 en un plazo de 5 años? Considere que los intereses se capitalizan:

a) semestralmente *b*) trimestralmente *c*) mensualmente

SOLUCIÓN:

a) Se despeja la fórmula (3.3):

$$M = C(1 + i)^n$$
$$M/C = (1 + i)^n$$
$$\sqrt[n]{M/C} = 1 + i$$
$$\sqrt[n]{M/C} - 1 = i$$
$$i = \sqrt[n]{M/C} - 1 \qquad \textbf{(3.8)}$$
$$n = 5 \text{ años} \times 2 = 10 \text{ semestres}$$
$$\sqrt[10]{\frac{50\,000}{15\,000}} - 1 = i$$
$$\sqrt[10]{3.33333333} - 1 = i$$
$$(3.33333333)^{1/10} - 1 = i$$
$$1.12794487 - 1 = i$$
$$0.12794487 = i$$
$$i = 12.79\%$$

Dada una tasa de 12.79% semestral (25.58% anual nominal), \$15 000 se convertirán en \$50 000 en 5 años.

b) Si el interés se capitaliza en forma trimestral, se tiene:

$$\sqrt[n]{M/C} - 1 = i$$
$$n = 5 \text{ años} \times 4 = 20 \text{ trimestres}$$
$$\sqrt[20]{\frac{50\,000}{15\,000}} - 1 = i$$
$$\sqrt[20]{3.33333333} - 1 = i$$
$$(3.33333333)^{1/20} - 1 = i$$
$$1.06204749 - 1 = i$$
$$i = 0.06204749$$
$$i = 6.20\%$$

Si la frecuencia de conversión se incrementa, la tasa anual nominal requerida disminuye a 24.8% ($0.06204749 \times 4 = 0.24818996$).

c) Si el interés se capitaliza cada mes:

$$i = \sqrt[n]{M/C} - 1$$
$$i = \sqrt[60]{\frac{50\,000}{15\,000}} - 1$$
$$i = \sqrt[60]{3.33333333} - 1$$
$$i = 1.02026889 - 1$$
$$i = 0.02026889$$
$$i = 2.03\%$$

Si la frecuencia de conversión es mensual, la tasa requerida es de 2.03% y la tasa anual disminuye a 24.32%.

Con este ejemplo se demuestra una de las conclusiones que previamente se habían apuntado: a mayor frecuencia de conversión corresponde un mayor interés compuesto. Por lo tanto, para generar una misma cantidad de intereses (\$35 000 en el caso anterior) se requiere una tasa de interés menor cuando la frecuencia de conversión es mayor.

Ejercicios de las secciones 3.6 y 3.7

Tiempo

36. ¿En cuánto tiempo se duplica un capital si la tasa de interés efectiva anual es de:

a) 10%? *c*) 30%? *e*) 50%? *g*) 100%?
b) 20%? *d*) 40%? *f*) 70%?

37. ¿En cuánto tiempo se duplica un capital si la tasa de interés es de 6% y se compone:

a) mensualmente? *c*) semestralmente?
b) trimestralmente? *d*) anualmente?

38. ¿En qué tiempo se reduce a la mitad el valor adquisitivo de la moneda, si la inflación es de:

a) 5%? *b*) 10%? *c*) 20%? *d*) 25%? *e*) 35%? *f*) 50%?

39. Una inversión duplica su valor en 18 meses a una determinada tasa de interés. ¿En cuánto tiempo lo triplicará?

40. Se realiza una inversión de \$50 000 en un banco el día 1 de febrero. ¿En qué fecha valdrá \$55 000 si la tasa de interés es de 15% compuesta mensualmente?

41. Si la tasa de interés es de 12% convertible mensualmente durante el primer semestre del año, y asciende a 15% durante el segundo semestre, ¿en qué fecha valdrá \$55 000 la inversión del caso anterior?

Tasa de interés

42. ¿A qué tasa de interés un capital quintuplica su valor en 10 años?

43. ¿Qué tasa de interés nominal ha ganado un capital de \$20 000 que se ha incrementado a \$50 000 en 3 años, si dicho interés se capitaliza:

a) mensualmente? *c*) semestralmente?
b) trimestralmente? *d*) anualmente?

44. Pablo Pérez depositó \$100 000 en una cuenta bancaria hace 3 años y 9 meses. Actualmente tiene \$208 862, y desea saber cuál es la tasa de interés que ha ganado si la capitalización es trimestral.

45. La población de una ciudad se ha duplicado en 10 años. ¿Cuál ha sido su tasa de crecimiento poblacional?

46. ¿Cuál debe ser la tasa de natalidad de un país para que duplique su población:

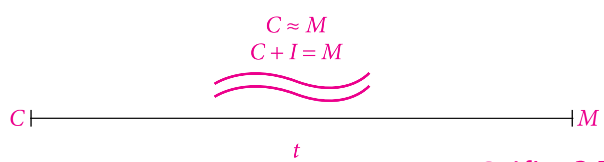
a) cada 30 años? *b*) cada 40 años? *c*) cada 50 años?

3.8 Ecuaciones de valores equivalentes

Como se ha visto a lo largo del capítulo, el dinero tiene un valor distinto en el tiempo; no es lo mismo tener \$1 en este momento que tenerlo dentro de un año pues, dependiendo de la tasa de inflación vigente, éste verá reducido su valor en mayor o menor grado.

Para compensar esa pérdida de valor, al capital original se le agregan intereses a fin de que el monto futuro sea *equivalente* en cuanto a poder adquisitivo al capital actual.

Esta relación de equivalencia se expresa como se muestra en la gráfica 3.7.



Gráfica 3.7

Así, un capital C es equivalente a un monto M, a un plazo t, considerando una tasa de interés i.

Si se tiene un capital de \$100 y una tasa de interés de 10% anual, el monto equivalente a dicho capital será de \$110. Esto es, el poder adquisitivo de \$100 será equivalente al de \$110 dentro de un año.

$$M = C(1+i)^n$$
$$M = 100(1+0.10)^1$$
$$M = 100(1.10)$$
$$M = 110$$

Así, puede decirse que un monto de \$110 dentro de un año es equivalente a un capital C de \$100 el día de hoy, pues

$$C = \frac{M}{(1+i)^n}$$
$$C = \frac{110}{(1+0.10)^1}$$
$$C = \frac{110}{1.10}$$
$$C = 100$$

De la misma forma en que se establece una relación de dos valores en el tiempo, puede establecerse una relación de equivalencia entre dos flujos de efectivo que deben pagarse o recibirse en distintos momentos. La operación que se conforma se llama *ecuación de valores equivalentes*.

Una *ecuación de valores equivalentes* es la que se obtiene al igualar en una fecha de comparación o *fecha focal* dos flujos distintos de efectivo. Observe que se habla de dos *flujos de efectivo* y no de dos cantidades, pues un flujo de efectivo puede estar constituido por una o más cantidades que se pagan o se reciben en distintos momentos del tiempo.

Tome el siguiente ejemplo: ¿Qué cantidad debe pagarse trimestralmente para saldar una deuda de 3 pagos mensuales de \$100, dada una tasa de interés de 2% mensual?

En este caso se tienen dos conjuntos de obligaciones:

a) la cantidad original constituida por los 3 pagos mensuales, y
b) el pago trimestral X con el que se desea sustituir aquélla.

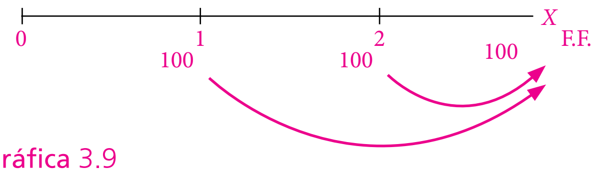
Esto puede observarse en la gráfica 3.8 de tiempo y valor.

Gráfica 3.8

El valor del pago X debe ser equivalente al valor de los 3 pagos de \$100, dada una tasa de interés de 2% y una fecha determinada (fecha focal).

$$\underbrace{\underbrace{X}_{\text{Flujo 1}} = \underbrace{(100+I_1)+(100+I_2)+(100+I_3)}_{\text{Flujo 2}}}_{\text{Ecuación de valores equivalentes}}$$

Para resolver este problema lo primero que debe hacerse es determinar la fecha focal en la cual se van a comparar los flujos de efectivo. En el capítulo anterior se señaló que cuando se trata de interés simple, dos conjuntos de obligaciones que son equivalentes en una fecha pueden no serlo en otra. En el caso de interés compuesto, por el contrario, dos flujos de efectivo que son equivalentes en una fecha lo serán en cualquier otra y, por ello, puede seleccionarse cualquier fecha para efectuar la comparación. A fin de simplificar, conviene tomar el tercer mes. (Vea la gráfica 3.9.)



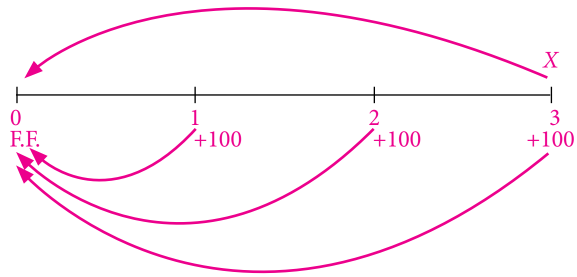
Gráfica 3.9

En esa fecha focal se igualan todos los valores.

$$X = 100(1.02)^2 + 100(1.02)^1 + 100\,(1.02)^0$$
$$X = 104.04 + 102 + 100$$
$$X = 306.04$$

Por lo tanto, un pago de \$306.04 al cabo de 3 meses es equivalente a 3 pagos mensuales de \$100 cada uno.

Se mencionó que puede tomarse cualquier otra fecha y el resultado será el mismo. Para comprobarlo, considere como fecha focal el mes 0 y efectúe la operación. (Vea la gráfica 3.10).



Gráfica 3.10

En este caso, todos los valores deben igualarse en la fecha focal 0 y, para ello, se calcula su valor actual o presente: el pago X deberá descontarse por 3 meses, en tanto que los pagos de \$100 deberán descontarse por 1, 2 y 3 meses.

$$X(1+0.02)^{-3} = 100(1+0.02)^{-1} + 100(1+0.02)^{-2} + 100(1+0.02)^{-3}$$
$$X(0.942322) = 100(0.980392) + 100(0.961169) + 100(0.942322)$$
$$X = \frac{98.039220 + 96.116880 + 94.232230}{0.942322} = \frac{288.388330}{0.942322}$$
$$X = 306.04$$

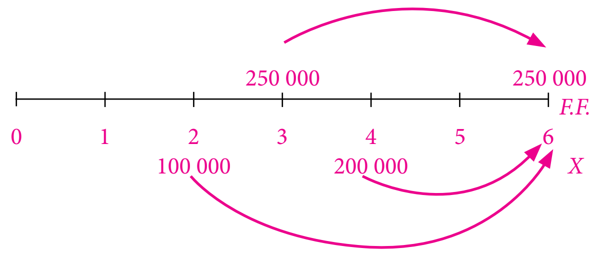
El resultado, como puede observarse, es exactamente el mismo.

EJEMPLO 3.8.1

Una empresa tiene una deuda bancaria de \$500 000 pagadera en dos abonos de \$250 000 cada uno, a 3 y 6 meses. Desea liquidarla en 3 pagos bimestrales; si el primero es de \$100 000 y el segundo es de \$200 000, ¿cuánto importará el tercero considerando una tasa de 36% anual convertible mensualmente?

Solución:

El primer paso para resolver una ecuación de valores equivalente es realizar la gráfica de tiempo y valor para poder plantear el problema (gráfica 3.11).



Gráfica 3.11

Una vez elaborada la gráfica, se procede a determinar la fecha focal (en este caso se seleccionó el mes 6) y a plantear la ecuación en función de tal fecha.

$$\underbrace{250(1+0.03)^3+250}_{\text{Flujo A}}=\underbrace{100(1+0.03)^4+200(1+0.03)^2+X}_{\text{Flujo B}}$$

$$250(1.092727)+250=100(1.125509)+200(1.0609)+X$$

$$273\,182+250\,000=112\,551+212\,180+X$$

$$523\,182=324\,731+X$$

$$X=523\,182-324\,731$$

$$X=198\,451$$

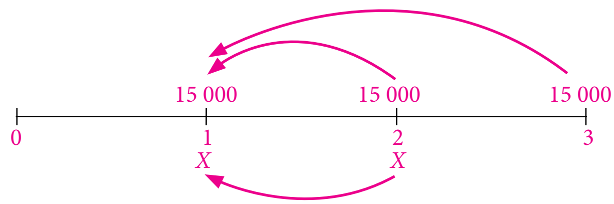
El tercer pago deberá ser de \$198 451.

EJEMPLO 3.8.2

Para comprar un automóvil se suscriben tres documentos de \$15 000 a pagar a 30, 60 y 90 días. Se decide liquidar la deuda con dos pagos iguales a 30 y 60 días considerando una tasa de interés de 1.5% mensual. ¿Cuál es el importe de cada pago?

Solución:

a) Se elabora la gráfica de tiempo y valor. (Vea la gráfica 3.12).



Gráfica 3.12

b) Se determina la fecha focal (en este caso se seleccionó el mes 1).

c) Se plantea la ecuación de valor:

$$\begin{aligned} X+X(1+0.015)^{-1} &= 15\,000+15\,000(1+0.015)^{-1} \\ &\quad +15\,000(1+0.015)^{-2} \\ X+X(0.985221) &= 15\,000+15\,000(0.985221) \\ &\quad +15\,000(0.970661) \\ 1.985221X &= 15\,000+14\,778.32+14\,559.93 \\ X &= \frac{44\,338.26}{1.985221} \\ X &= 22\,334.16 \end{aligned}$$

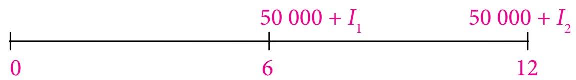
Se deben pagar dos abonos de \$22 334.16 para saldar la deuda.

EJEMPLO 3.8.3

Se decide pagar la compra de una maquinaria con valor de \$100 000 en dos pagos de \$50 000 a 6 meses y un año, más intereses calculados a 24% de interés anual convertible semestralmente. Luego del transcurso de un trimestre se renegocia la compra y se determina pagarla mediante tres pagos trimestrales: el primero por \$30 000, el segundo por \$50 000 y el tercero por la diferencia, considerando en este segundo flujo un interés de 20% convertible trimestralmente. ¿Cuál es el importe del último pago?

SOLUCIÓN:

a) En primer lugar, debe determinarse el importe de los dos primeros pagos, incluidos sus intereses.

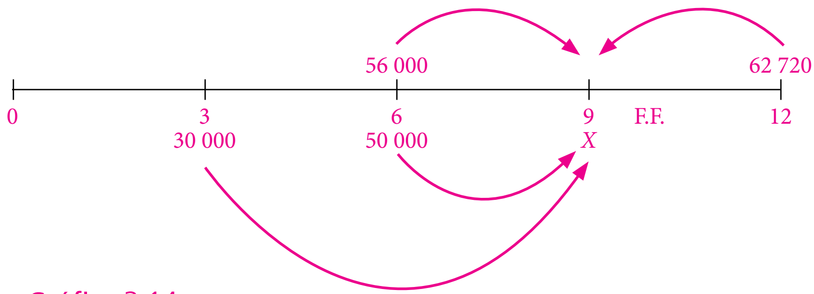


Gráfica 3.13

$$\begin{aligned}\text{Pago 1} &= 50\,000\,(1 + 0.12)^1\\ \text{Pago 1} &= 50\,000(1.12)\\ \text{Pago 1} &= 56\,000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Pago 2} &= 50\,000(1 + 0.12)^2\\ \text{Pago 2} &= 50\,000(1.2544)\\ \text{Pago 2} &= 62\,720\end{aligned}$$

b) Se elabora la gráfica de tiempo y valor.



Gráfica 3.14

c) Se determina la fecha focal.

d) Se plantea la ecuación de valores equivalentes:

$$\begin{aligned} X + 30\,000(1 + 0.05)^2 + 50\,000(1 + 0.05)^1 &= 56\,000(1 + 0.05)^1 + 62\,720(1 + 0.05)^{-1}\\ X + 30\,000(1.1025) + 50\,000(1.05) &= 56\,000(1.05) + 62\,720(0.952381)\\ X + 33\,075 + 52\,500 &= 58\,800 + 59\,733.33\\ X + 85\,575 &= 118\,533.33\\ X &= 118\,533.33 - 85\,575\\ X &= 32\,958.33\end{aligned}$$

La operación se liquida con el pago de \$32 958.33.

3.9 Tiempo equivalente

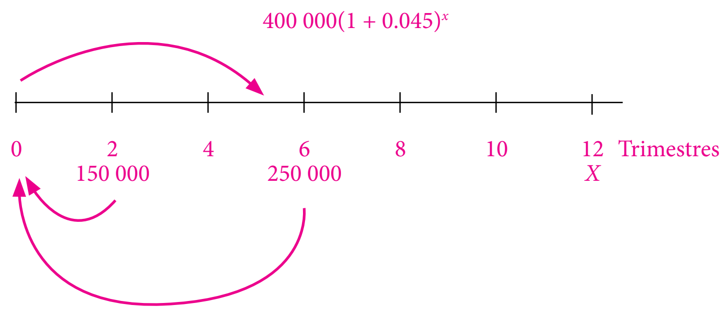
En ocasiones se desea liquidar un conjunto de obligaciones con un pago único igual a la suma de las distintas deudas. La fecha en la cual pueden ser liquidadas con dicho pago único se conoce como *fecha de vencimiento promedio* de las deudas. Al tiempo que falta transcurrir hasta la fecha de vencimiento promedio se le conoce como *tiempo equivalente*.

EJEMPLO 3.9.1

Una compañía adeuda al banco \$150 000 con vencimiento a 2 trimestres y \$250 000 con vencimiento a 6 trimestres. Desea liquidar la deuda con un pago único. ¿Cuál es el tiempo equivalente suponiendo un interés de 4.5% trimestral?

SOLUCIÓN:

a) Se elabora la gráfica de tiempo y valor:



Gráfica 3.15

b) Se plantea la ecuación de valor:

$$(150\,000 + 250\,000)(1 + 0.045)^x = 150\,000(1 + 0.045)^{-2} + 250\,000(1 + 0.045)^{-6}$$
$$(400\,000)(1 + 0.045)^x = 150\,000(0.915730) + 250\,000(0.767896)$$
$$(400\,000)(1.045)^x = 137\,359.49 + 191\,973.93$$
$$400\,000(1.045)^x = 329\,333.43$$
$$(1.045)^x = \frac{329\,333.43}{400\,000}$$
$$(1.045)^x = 0.82333357$$
$$x \log 1.045 = \log 0.82333357$$
$$x(0.01911629) = -0.08442418$$
$$x = \frac{-0.08442418}{0.01911629} = -4.41634752^{*}$$
$$x = 4.4163$$

Este resultado indica que, para liquidar la deuda con un pago único, se deberán entregar \$400 000 transcurridos 4.41 trimestres (aproximadamente un año y 37 días).

EJEMPLO 3.9.2

El perfil de adeudos de un país latinoamericano con la Banca Internacional es el siguiente en millones de dólares (MDD):

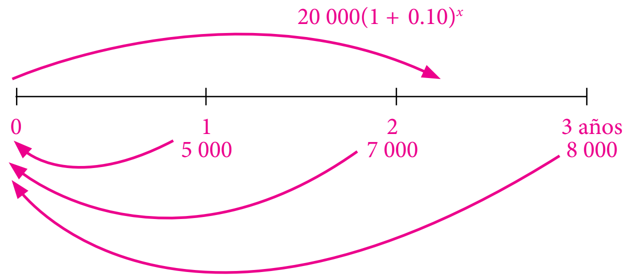
1er. año	5 000 MDD
2o. año	7 000 MDD
3er. año	8 000 MDD
	20 000 MDD

Estos montos incluyen capital e intereses de 10% anual. Si se desea liquidar la deuda con un pago único, ¿cuál será el tiempo equivalente?

* El signo negativo no se toma, ya que se utilizó el cologaritmo de 0.82333357. El logaritmo de 0.82333357 es propiamente −1.9155758234 y 0.9155758234 − 1 = −0.084422418.

Solución:

a) Se elabora la gráfica de tiempo y valor:



Gráfica 3.16

b) Se plantea la ecuación de valor:

$$(5\,000 + 7\,000 + 8\,000)(1 + 0.10)^x = 5\,000(1 + 0.10)^{-1} + 7\,000(1 + 0.10)^{-2} + 8\,000(1 + 0.10)^{-3}$$
$$(20\,000)(1 + 0.10)^x = 5\,000(0.90909091) + 7\,000(0.82644630) + 8\,000(0.75131480)$$
$$(20\,000)(1.10)^x = 4\,545.45 + 5\,785.12 + 6\,010.52$$
$$20\,000(1.10)^x = 16\,341.09$$
$$(1.10)^x = \frac{16\,341.09}{20\,000}$$
$$(1.10)^x = 0.8170548$$

c) Se resuelve por logaritmos naturales:

$$x \ln 1.10 = \ln 0.8170545$$
$$x(0.09531018) = -0.20204948$$
$$x = \frac{-0.20204948}{0.09531018} = -2.11990996$$
$$x = 2.12$$

Este resultado indica que, para liquidar la deuda con un pago único, se deberán entregar 20 000 MDD transcurridos 2.12 años (2 años y 43 días, aproximadamente).

Ejercicios de las secciones 3.8 y 3.9

Ecuaciones de valores equivalentes

47. En la compra de un televisor con valor de \$3 000.00 se pagan \$1 500 al contado y se firma un documento por la diferencia a pagar en 6 meses con un interés de 2% mensual. ¿Cuál es el importe del documento?

48. El comprador del caso anterior decide pagar el saldo con dos abonos iguales a 3 y 6 meses. ¿Cuál es el importe de dichos pagos si se considera un interés de 6% trimestral?

49. Un documento con valor de \$180 000 debe liquidarse en un plazo de 3 años y medio. Determine los valores equivalentes si la deuda se liquida:

a) en un año *b*) en 4 años

Considere una tasa de interés de 22% capitalizable trimestralmente.

50. Se compra un terreno campestre. Se pagan \$50 000 de enganche y se firman dos documentos por igual cantidad a pagar en 1 y 2 años. ¿Qué suma debe entregarse para liquidar la compra al cabo de un año si la tasa de interés es:

a) 15%? *b*) 30%? *c*) 40%? *d*) 50%? *e*) 60%?

51. Una persona contrae una deuda que debe liquidar mediante un pago de \$30 000 a 6 meses y otro de \$50 000 en un año y medio. ¿Qué cantidad debe pagar para liquidar la deuda en un solo pago

a) en este momento? *b*) en un año? *c*) en un año y medio?

La tasa de interés vigente es de 20% convertible mensualmente.

52. Una empresa vende una maquinaria en \$35 000. Le pagan \$15 000 al contado y le firman dos documentos por \$10 000 cada uno, con vencimiento a 6 y 12 meses. ¿Qué cantidad liquidará la deuda al cabo de 6 meses si se aplica un interés de 30% convertible mensualmente?

53. María debe \$15 000 a pagar en un año. Abona \$2 000 al cabo de 3 meses y \$3 000 a los 6 meses. ¿Qué cantidad debe entregar a los 9 meses para liquidar la deuda si se considera un interés de 1.5% mensual?

54. Andrés solicita un préstamo de 158 000 dólares para la compra de una casa. Ofrece pagar 20 000 en un año, 30 000 en 2 años y el saldo a 3 años.

¿Qué cantidad debe pagar para liquidar la deuda si la tasa de interés es de:

a) $J_4 = 8\%$? *b*) $J_4 = 12\%$? *c*) $J_4 = 15\%$?

3.10 Aplicaciones

En la práctica comercial y financiera cotidiana encontramos una gran cantidad de operaciones a las que se aplica el monto a interés compuesto, así como el valor actual a interés compuesto.

3.10.1 Monto a interés compuesto

La aplicación más común del monto a interés compuesto es la determinación del monto que se obtendrá cuando se realiza un depósito de dinero en una institución financiera por el cual se recibe un interés que se capitaliza en forma periódica (diaria, mensual, trimestral, etc.). Los instrumentos financieros de este tipo son los pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento, que se ilustran a continuación, comparándolos con los Certificados de Depósito (Cedes).

Cedes y pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento

Los Certificados de Depósito (Cedes) son instrumentos financieros a través de los cuales se pueden realizar inversiones desde 63 hasta 378 días, y en los cuales los intereses devengados se pagan al inversionista en forma mensual. Su mecánica de operación es la siguiente:

Certificado de depósito

Inversión	C			
Tiempo	0	1	2	3
Intereses		I	I	I
Reembolso de capital				C

Pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento

Inversión	C			
Tiempo	0	1	2	3
Intereses				I
Reembolso de capital				C

EJEMPLO 3.10.1

Se depositan $100 000 en un certificado de depósito a 3 meses que paga un interés de 6% anual convertible mensualmente. Determine el interés mensual y el monto que recibirá el inversionista al cabo de los tres meses, si los intereses ganados no son reinvertidos.

Solución:
Dado que los intereses se pagan mensualmente y no se reinvierten, se está en presencia de un problema de interés simple, ya que el capital permanece sin cambio a lo largo de toda la vida de la inversión. El interés mensual se calcula aplicando la fórmula

$$I = Cit$$

Por lo tanto, se tiene:

$$I = Cit$$
$$I = 100\,000(0.06/12)(1)$$
$$I = 100\,000(0.005)(1)$$
$$I = 500$$

Así, el interés mensual que se recibe es de $500 y el monto del principal que se restituye al cabo de los tres meses es de $100 000, cantidad que se invirtió.

EJEMPLO 3.10.2

Se depositan $100 000 en un pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento a 3 meses que paga un interés de 6% anual convertible mensualmente. Determine el interés mensual y el monto que recibirá el inversionista al cabo de los tres meses.

Solución:
En este caso, como el nombre del instrumento lo indica, los intereses se pagan al vencimiento, generando un monto compuesto. El pago mensual de intereses es 0 y el monto al cabo de los tres meses se determina recurriendo a la fórmula de interés compuesto:

$$M = C(1 + i)^n$$
$$M = 100\,000(1 + (0.06/12))^3$$
$$M = 100\,000(1 + 0.005)^3$$
$$M = 100\,000(1.015075125)$$
$$M = 101\,507.51$$

El inversionista recibirá $101 507.51 al cabo de tres meses. Existe un diferencial de interés de 7.51 entre el pagado en forma mensual en el Cede del ejemplo 3.10.1 y el recibido en el ejemplo 3.10.2, producto de la reinversión mensual de los intereses ganados.

Las principales diferencias que existen entre los Cedes y los pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento son:

- Estos últimos se invierten a partir de 1 día de plazo; en Cedes a partir de 2 meses.
- En los pagarés, los rendimientos se reciben al vencimiento de la inversión; en Cedes, los intereses son liquidados cada mes al inversionista.

3.10.2 Valor actual a interés compuesto

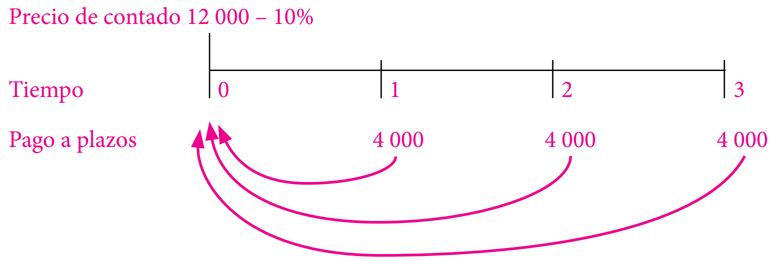
Las operaciones financieras donde se utiliza con mayor frecuencia este tipo de aplicación se relacionan con descuentos por pronto pago, donde debe compararse un flujo de pagos futuro con un pago presente.

EJEMPLO 3.10.3

Una tienda de departamentos ofrece 10% de descuento o 3 meses sin intereses en la compra de sus artículos en el departamento de computación. Se desea adquirir una computadora que tiene un valor de $12 000. Si se tiene el dinero para adquirirla al contado, ¿cuál alternativa es la más adecuada, suponiendo que la tasa de interés del mercado es de 12% anual convertible mensualmente?

Solución:

En este caso es necesario comparar el valor actual de tres pagos futuros de $4 000 cada uno, a uno, dos y tres meses, con un pago en el momento presente equivalente a 90% del precio de lista de $12 000. El problema se ilustra a continuación.



Determinación del pago de contado:

$$C = M(1 - dt)$$
$$C = 12\,000(1 - 0.10(1))$$
$$C = 12\,000(1 - 0.10)$$
$$C = 12\,000(0.90)$$
$$C = 10\,800$$

Determinación del valor presente de los pagos mensuales

Para determinar el valor presente de los pagos mensuales es necesario sumar el valor presente del pago al fin del mes 1, más el valor presente del pago al fin del mes 2, más el valor presente del pago al fin del mes 3. Para determinar cada uno de estos valores se aplica la fórmula (3.6) que se vio en el texto:

$$C = M(1+i)^{-n}$$

El primer pago se realiza al final del primer mes, por lo que habrá que determinar su valor actual, descontando los intereses generados en un periodo:

$$C = 4\,000(1+0.01)^{-1}$$
$$C = 4\,000(1.01)^{-1}$$
$$C = 4\,000(0.990099)$$
$$C = 3\,960.3960$$

El segundo pago se realiza al final del segundo mes, por lo que habrá que determinar su valor actual, descontando los intereses generados en dos periodos:

$$C = 4\,000(1+0.01)^{-2}$$
$$C = 4\,000(1.01)^{-2}$$
$$C = 4\,000(0.980296)$$
$$C = 3\,921.1842$$

El tercer pago se realiza al final del tercer mes, por lo que habrá que determinar su valor actual, descontando los intereses generados en tres periodos:

$$C = 4\,000(1+0.01)^{-3}$$
$$C = 4\,000(1.01)^{-3}$$
$$C = 4\,000(0.970590)$$
$$C = 3\,882.3606$$

La suma de los valores actuales es, por lo tanto,

$$C = 3\,960.40 + 3\,921.18 + 3\,882.36 = 11\,763.94$$

Por lo tanto, es más conveniente adquirir el bien al contado que aprovechar los pagos "sin intereses", puesto que su valor actual es superior por 963.94 pesos respecto al que se obtiene pagando al contado.

3.10.3 Valor actual neto

Para realizar la evaluación de un proyecto de inversión, las herramientas que se utilizan con más frecuencia son:

- Tiempo simple de recuperación
- Tiempo ajustado de recuperación
- Valor actual neto (VAN) o valor presente neto (VPN), y
- Tasa interna de rendimiento.

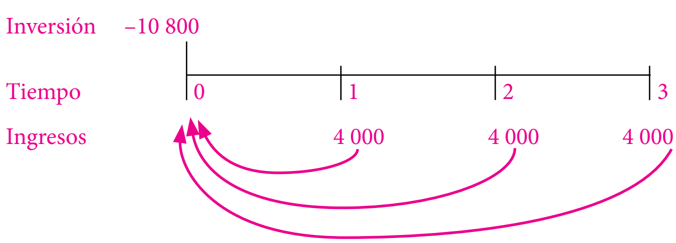
En este capítulo se explicará cómo puede determinarse el valor actual neto de un proyecto mientras que en el siguiente se abundará sobre este tema y se ilustrará la *tasa interna de rendimiento* (TIR).

El valor actual neto de un proyecto de inversión es el valor actual de todos los flujos de efectivo relacionados con el proyecto. En otras palabras, es el valor presente de todos sus costos (egresos) y sus ingresos, desde su principio y hasta su terminación. Esta cuestión se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.10.4

Determine el valor actual neto de un proyecto de inversión que requiere un desembolso inmediato de $10 800 y genera flujos de $4 000 mensuales durante tres meses, suponiendo que la tasa de interés del mercado fuese: *a*) 12%, *b*) 36%, *c*) 72%.

a) Como puede apreciarse, el ejemplo anterior puede analizarse desde el punto de vista de la tienda departamental como un proyecto de inversión, pues invierte $10 800 (el dinero que podría recibir si vendiera el producto al contado), a cambio de un flujo esperado de tres pagos mensuales iguales de $4 000 cada uno. El proyecto se ilustra a continuación.



La inversión se representa con un flujo negativo (–10 800), en tanto que los ingresos se representan con signo positivo (+4 000).

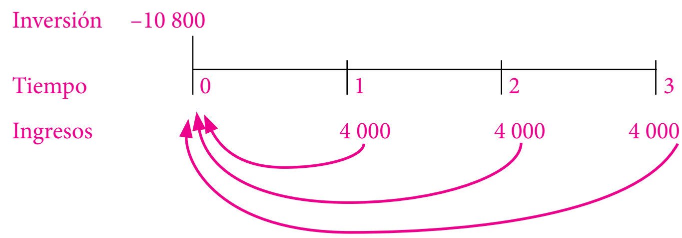
Como ya quedó establecido, una tasa de 12% anual convertible mensualmente, el proyecto de inversión resulta altamente rentable para la tienda, puesto que los $10 800 que invierte le generan un flujo de ingresos cuyo valor actual neto importa \$11763.94. El valor actual neto del proyecto es de \$963.94 (\$11763.94 – \$10 800).

Este resultado indica que la empresa está incrementando su valor en \$963.94.

b) Sin embargo, este valor actual neto depende de la tasa de interés que se encuentre vigente en el mercado. Así, suponiendo que dicha tasa fuese de 36%, ¿cuál sería el valor actual neto del proyecto?

Solución:

Siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó en el ejemplo anterior se tiene:



La tasa de interés de mercado es de 36% anual, lo que equivale a 3% mensual.

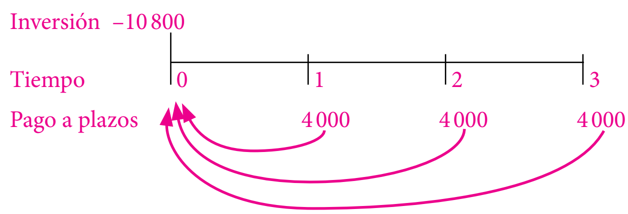
$$
\begin{aligned}
VAN &= VAF_0 + VAF_1 + VAF_2 + VAF_3\\
VAN &= -10\,800(1+0.03)^0 + 4\,000(1+0.03)^{-1} + 4\,000(1+0.03)^{-2} + 4\,000(1+0.03)^{-3}\\
VAN &= -10\,800(1.0000) + 4\,000(0.970873) + 4\,000(0.942596) + 4\,000(0.915142)\\
VAN &= -10\,800 + 3\,883.49 + 3\,770.38 + 3\,660.57\\
VAN &= 514.44
\end{aligned}
$$

El valor actual neto del proyecto es de \$514.44 a una tasa de interés de 36% anual, convertible mensualmente. Ello quiere decir que si la empresa puede conseguir fondos para financiar su proyecto a una tasa de 36%, tendría una utilidad de \$514.44.

c) Si la tasa del mercado fuese de 72%, ¿cuál sería el valor actual neto del proyecto?

Solución:

Siguiendo el mismo procedimiento utilizado en los incisos anteriores, se tiene:



La tasa de interés de mercado es de 72% anual, lo que equivale a 6% mensual.

$$
\begin{aligned}
VAN &= VAF_0 + VAF_1 + VAF_2 + VAF_3\\
VAN &= -10\,800(1+0.06)^0 + 4\,000(1+0.06)^{-1} + 4\,000(1+0.06)^{-2} + 4\,000(1+0.06)^{-3}\\
VAN &= -10\,800(1.0000) + 4\,000(0.943396) + 4\,000(0.889996) + 4\,000(0.839619)\\
VAN &= -10\,800 + 3\,773.58 + 3\,559.98 + 3\,358.48\\
VAN &= -107.96
\end{aligned}
$$

El valor actual neto del proyecto si la tasa de interés fuese de 72% es negativo (−107.96). Si la tasa de interés del mercado fuese de 72% no le convendría a la tienda invertir en ese proyecto, pues recibiría un valor menor al que invertiría. Como puede observarse de los números anteriores, la tienda departamental carga una tasa de interés cercana a 70% a todos aquellos clientes que deciden aprovechar sus pagos "sin intereses".

3.11 Uso de Excel®

En esta sección se resuelven los ejercicios del capítulo utilizando funciones de Excel diseñadas para simplificar el cálculo de una serie de pagos periódicos, conocidos como anualidades, pero que pueden aplicarse para resolver problemas de interés compuesto, en combinación con las capacidades normales de cálculo de esta hoja de trabajo. Las funciones que se aplican a ejercicios de interés compuesto son:

- Monto a interés compuesto o valor futuro (VF).
- Capital o valor actual (VA).
- Valor actual neto (VNA).
- Tasa interna de rendimiento (TIR).

En las subsecciones siguientes se revisan aplicaciones de cada una de ellas.

3.11.1 Conceptos básicos (sección 3.2)

En el ejemplo 3.2.3 se muestra la determinación del monto a interés simple y el monto a interés compuesto de un depósito de \$100 000 a 5 años considerando en ambos casos una tasa de interés de 20% anual. Este ejemplo puede resolverse mediante la utilización de las capacidades normales de la hoja de cálculo Excel® como se muestra a continuación:

	A	B	C
1	**Año**	***Monto a interés simple***	***Monto a interés compuesto***
2		***M= C(1 + it)***	***M = C(1+i)^n***
3	i	0.20	*20%*
4	0	100 000	100 000
5		=($B$4*(1+$B$3*A5))	=($C$4*(1+$C$3)^A5)
6	1	120 000	120 000
7	2	140 000	144 000
8	3	160 000	172 800
9	4	180 000	207 360
10	5	200 000	248 832

La fórmula aplicable al interés simple se muestra en la celda B5, mientras que la fórmula aplicable al interés compuesto se presenta en la celda C5. En el primer caso se utiliza la siguiente fórmula:

=($B$4*(1+$B$3*A5))

donde $B$4 indica la celda que contiene el capital que se invierte (100 000). Se utilizan los signos de "$" antes de la letra B y del número 4 para indicar que se desea mantener constante tanto la columna como la fila a que se hace referencia, sin que importe si la fórmula es copiada a celdas de columnas o filas diferentes.

La celda $B$3 contiene la tasa de interés aplicable, escrita como tanto por uno. Puede igualmente escribirse como tanto por ciento, tal como se muestra en la columna C3. Ambos valores son equivalentes.

La celda A5 contiene el periodo transcurrido. En este caso es igual a 1. Esta celda es la única a la que no se le incluyeron signos de "$", puesto que se requiere que cambie al ser copiada en distintas filas, para indicar el número de periodos transcurridos (1, 2, 3… etcétera).

Para calcular el monto a interés compuesto se utiliza la siguiente fórmula:

=($C$4*(1+$C$3)^A5)

En este caso $C$4 indica la celda que contiene el capital que se invierte (100 000). La celda $C$3 contiene la tasa de interés aplicable, escrita como tanto por ciento y la celda A5 contiene el periodo transcurrido, que es igual a 1, como en el caso del monto a interés simple. En la fórmula del interés simple se utiliza el signo de multiplicación señalado por el asterisco **(*)** para indicar la operación definida por las literales ***it***, en tanto que en el caso del interés compuesto se utiliza el signo de exponenciación indicado por el acento circunflejo **(^)**, para indicar que el valor **(1 +** ***i*****)** se elevará a la potencia que corresponda al número de periodos que se mantiene un dinero invertido.

3.11.2 Monto compuesto (VF) (sección 3.3)

La fórmula de Excel para calcular el monto compuesto de una anualidad, o valor futuro (VF), que se utilizará en esta sección para calcular el monto a interés compuesto de un pago único es:

VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

en donde:

Tasa: es la tasa de interés por periodo expresada como tanto por uno.
Nper: es el número total de periodos de pago.
Pago: es el pago que se efectúa cada periodo.
Va: es el capital o valor actual total de una serie de pagos futuros.

Tasa, Nper y Pago son los tres valores que se requieren para calcular el monto a interés compuesto; sin embargo, dado que en el caso que nos ocupa se trata de un solo pago o depósito, y no de un conjunto de pagos periódicos, el valor **"Pago"** debe omitirse y será necesario capturar el importe del pago o depósito en el lugar del capital o valor actual **(Va)**, pues Excel permite la posibilidad de calcular el monto de la anualidad si se conoce tal valor actual **(Va)**. Cabe remarcar que el valor del **"Pago"** deberá omitirse o indicar 0, pues de lo contrario Excel calculará el monto de tantos pagos como periodos de acumulación existan, lo cual arrojará, evidentemente, un resultado falso. Esta situación se ilustra más adelante.

Tipo: se puede anotar (es un valor optativo, no obligatorio) un número 0 o 1 e indica cuándo vencen los pagos. Si se anota 0 se calcula el monto de un pago vencido; como es un parámetro optativo, si se omite, el monto se calcula para un pago vencido. Si se anota 1, se calcula como un pago anticipado. Para efectos de la determinación del monto a interés compuesto, puede omitirse, ya que el cálculo se realiza a partir del capital o valor actual y no a partir de un pago anticipado o vencido, por lo que se obtendrá idéntico resultado así se anote un 1 o un 0.

El ejemplo 3.3.1 se refiere a un depósito de \$50 000 por un periodo de dos años a una tasa de interés de 18% capitalizable mensualmente. Entonces, si se introduce

=VF(0.18/12,2*12,,–50000)

en alguna celda de una hoja de trabajo de Excel, se obtiene como resultado \$71 475.14, que es igual a los \$71 475.14 que se obtuvieron en el texto.

Las opciones para la solución de este ejemplo en la hoja de Excel se ilustran a continuación:

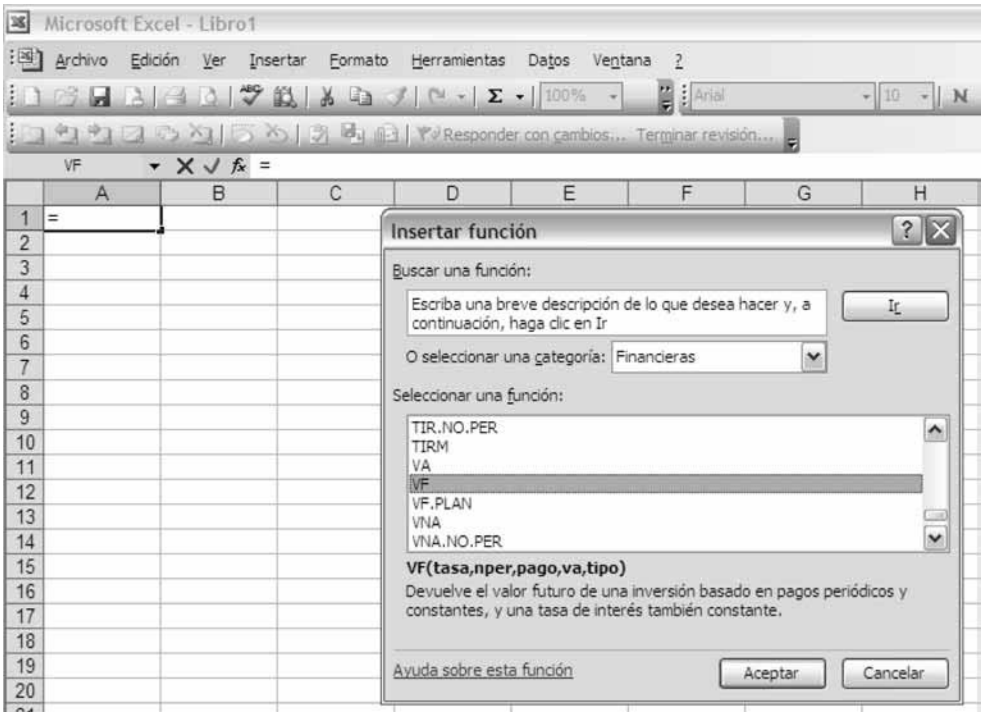
	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Función Excel***
2			=VF(tasa,nper,pago,va,tipo)	=VF(tasa,nper,pago,va,tipo)
3			=VF(0.18/12,2*12,0,-50000,0)	=VF(0.18/12,2*12,,-50000,)
4	Tasa	0.18/12	71 475.14	71 475.14
5	Nper	2*12		
6	Pago	-		
7	Capital (Va)	50 000		
8	Tipo	0		

Es importante hacer las siguientes observaciones:

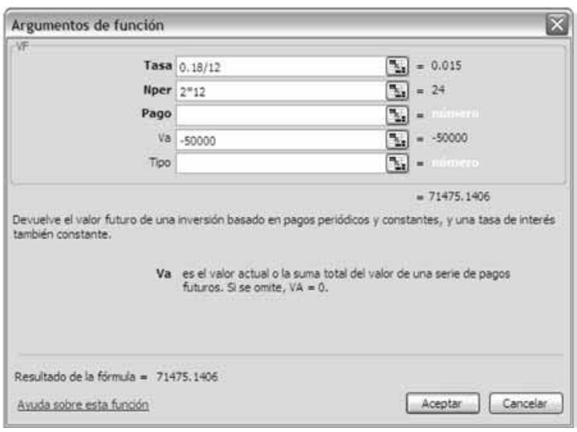
- La tasa se expresa como tanto por uno (0.18), por lo cual, en razón de que el ejemplo señala que se trata de una tasa anual capitalizable mensualmente, deberá dividirse entre 12 para determinar la tasa mensual aplicable (0.18/12).
- En el número de periodos (nper) se indica el número de periodos de capitalización que se tienen. Para ello se multiplica el número de años (2), por la frecuencia de conversión anual (12), con lo cual se tiene la cifra que aparece en la fórmula (2*12).
- El pago, como ya se indicó, es 0. Este dato puede omitirse sin que el resultado se altere, como se observa en la fórmula de la columna D. (Note que, en la fórmula Excel que se ilustra en la celda D3, hay una doble coma después del número 2*12, lo cual indica que se omitió el valor de la renta mensual).
- En el capital o valor actual (Va) se anotó "–50 000", una cantidad negativa, porque Excel considera salidas de capital (cantidades negativas) a los pagos o depósitos. Aunque esto no parece tener mucho sentido en estos ejemplos, es un procedimiento estándar en Excel y se aprecia mejor

su utilidad en las funciones como la de la Tasa Interna de Rendimiento (TIR), en la cual se consideran flujos de efectivo tanto de entrada (+) como de salida (–). Se ven ejemplos de esta función de Excel en la sección 4.9 de "Aplicaciones".

La función de Excel puede insertarse también desde el menú **Insertar/función**. En ella se selecciona la categoría **"Financieras"** y en la lista que aparece se selecciona la función que se requiera. En este caso, por ejemplo, la función **"VF"**:



Una vez que se selecciona la función VF, aparece una ventana en la cual se pueden capturar los datos relativos a la Tasa, Número de periodos (Nper), Pago y Valor actual (Va). En la parte inferior derecha de los recuadros aparece el resultado de acuerdo con los datos insertados = 71 475.1406. Al oprimir el botón de Aceptar, la fórmula así integrada aparecerá en la celda de la hoja de Excel.



Es importante observar que esta forma de utilizar la fórmula del valor futuro, o monto de Excel, equivale a aplicar la fórmula del monto a interés compuesto de una cantidad (fórmula 3.3), o

$$M = C(1 + i)^n = 50\,000(1.015)^{24} = \$71\,475.14$$

la cual puede, de igual manera, utilizarse en Excel ya sea haciendo referencia a datos capturados en celdas previamente definidas o bien capturando dichos datos directamente en la fórmula, como se ilustra a continuación:

	A	B	C
1	**Datos**		***Monto a interés compuesto***
2			***M = C(1+i)^n***
3			=(B7*(1+B4)^B5)
4	Tasa	0.18/12	71 475.14
5	Nper	2*12	
6	Pago	-	=(50000*(1+0.015)^24)
7	Capital (Va)	50 000	71 475.14
8	Tipo	0	
9			

En el ejemplo 3.3.2 se determina el monto de un depósito de $100 000 y el monto de un préstamo por la misma cantidad en una caja de ahorros, ambos a un plazo de nueve meses, considerando las distintas tasas que se aplican a operaciones pasivas (depósitos de ahorradores) y a operaciones activas (préstamos de la caja de ahorros). La solución que proporciona Excel se ilustra a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel depósito***	***Función Excel préstamo***
2			=VF(tasa,nper,pago,va,tipo)	=VF(tasa,nper,pago,va,tipo)
3			=VF(0.048/12,9,,-100000,)	=VF(0.30/12,9,,-100000,)
4	Tasa depósito	0.048/12	03 658.14	124 886.30
5	Tasa préstamo	0.30/12		
6	Nper	9		
7	Pago	-		
8	Capital (Va)	10 000		
9	Tipo	0		
10				

que son prácticamente los mismos resultados que se presentaron en el texto (las pequeñas diferencias de centavos se deben a redondeos).

En el ejemplo 3.3.3 se solicita el monto de un préstamo bancario de $1 500 000 que debe liquidarse en el plazo de un año, con interés de 12% convertible trimestralmente. Sustituyendo directamente en una celda de la hoja de cálculo los datos de la fórmula (3.3), se tiene:

	A	B	C
1	**Datos**		***Monto a interés compuesto***
2			***M = C(1+i)^n***
3			=(B7*(1+B4)^B5)
4	Tasa	0.12/4	1 688 263.22
5	Nper	1*4	
6	Pago	-	=(1500000*(1+0.03)^4)
7	Capital (Va)	1 500 000.	1 688 263.22
8			

que es exactamente el resultado que se tiene en el texto.

En el ejemplo 3.3.4 se determina el pago que se debe efectuar para liquidar el préstamo anterior, bajo el supuesto de que se paga en forma anticipada al transcurrir siete meses y medio después de que se otorgó. Las opciones de solución se ilustran a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Monto a interés compuesto (exacto)***	***Monto a interés compuesto (aproximado)***
2			***M = C(1+i)^n***	***M = (C(1+i)^n)*(1+it)***
3			=(B7*(1+B4)^B5)	
4	Tasa	0.12/4	1 615 043,86	
5	Nper	2,50		
6	Pago	-	=(1500000*(1+0.03)^2.5)	=(1500000*(1+0.03)^2)(1+0.03*0.
7	Capital (Va)	1 500 000,	1 615 043,86	1 615 220,25

los resultados son idénticos a los que se presentaron en el texto.

El ejemplo 3.3.5 es similar al anterior, pues se pide determinar el monto que se debe erogar para liquidar un préstamo de habilitación y avío de \$150 000 que se contrató a una tasa de 20% anual convertible semestralmente y que se liquida al cabo de 15 meses (2.5 semestres).

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Monto a interés compuesto (Exacto)***	***Monto a interés compuesto (Aproximado)***
2			***M = C(1+i)^n***	***M = (C(1+i)^n)*(1+it)***
3			=(B7*(1+B4)^B5)	
4	Tasa	0.20/2	190 358.81	
5	Nper	2.50		
6	Pago	-	=(150000*(1+0.10)^2.5)	=(150000*(1+0.10)^2)(1+0.10*0.5))
7	Capital (Va)	150 000.	190 358.81	190 575.00

3.11.3 Tasa nominal, tasa efectiva y tasas equivalentes (sección 3.4)

En el ejemplo 3.4.1 se busca la tasa efectiva de interés que se recibe de un depósito bancario pactado a 4.8% de interés anual convertible mensualmente. Para determinarla se debe calcular el monto que se acumula al cabo del tiempo pactado y se compara el interés ganado con el capital original aportado.

En Excel se determina como se ilustra a continuación:

	A	B	C
1	**Datos**		***Monto a interés compuesto***
2			***M = C(1+i)^n***
3			=(B7*(1+B4)^B5)
4	Tasa	0.048/12	1 049.07
5	Nper	12	
6	Pago	-	=(1000*(1+0.048/12)^12)
7	Capital (Va)	1 000.00	1 049.07

El interés ganado es \$49.07, y al compararlo con el capital original aportado permite determinar la tasa efectiva de 4.91% que aparece en el texto.

La relación que se establece entre la tasa efectiva y la tasa nominal que se presenta en la segunda parte del ejemplo y que se muestra con la ecuación (3.5):

$$i = (1 + j/m)^m - 1$$

puede resolverse en Excel como se ilustra a continuación:

	A	B	C
1	**Datos**		***Tasas equivalentes***
2			$i = (1+\frac{j}{m})^m - 1$
3			=((1+(B4/B5))^B5)-1
4	*Tasa nominal (j)*	0.048	0.049070
5	*Nper (m)*	12	
6			=((1+(0.048/12))^12)-1
7			4.91%

En el ejemplo 3.4.2 se tiene que $j = 0.16$ y $m = 4$. Para efectos de determinar la tasa efectiva resulta irrelevante el dato del capital del préstamo. La solución en Excel es la siguiente:

	A	B	C
1	**Datos**		***Tasas equivalentes***
2			$i = (1+\frac{j}{m})^m - 1$
3			=((1+(B4/B5))^B5)-1
4	*Tasa nominal (j)*	0.16	0.169859
5	*Nper (m)*	4	
6			=((1+(0.16/4))^4)-1
7			16.99%

En el ejemplo 3.4.3 se pide determinar la tasa nominal (j) convertible trimestralmente dada una tasa de interés efectiva (i) de 40% anual. Para ello se despeja la fórmula (3.5), la cual queda así:

$$j = m[(1+i)^{1/m} - 1]$$

El planteamiento en Excel es el siguiente:

	A	B	C
1	**Datos**		***Tasas equivalentes***
2			$j = m[(1+i)^{1/m} - 1]$
3			=B5*((1+B4)^(1/B4)-1)
4	*Tasa efectiva (i)*	0.40	35.10%
5	*Nper (m)*	4	
6			=4*((1+0.4)^(1/4)-1)
7			35.10%

3.11.4 Valor actual o presente (sección 3.5)

La fórmula para calcular el valor actual con Excel es:

VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)

donde:

Tasa: es la tasa de interés por periodo.
Nper: es el número total de periodos de pago.
Pago: es el pago que se efectúa cada periodo.
Vf: es el monto o valor futuro total de una serie de pagos futuros.

Tasa, Nper y Pago son los tres valores que se requieren para calcular el valor actual de una anualidad; sin embargo, Excel permite la posibilidad de calcular el valor actual de la anualidad si se conoce el monto (Vf); por ello, si se anota el valor Vf de un pago único se puede obtener su Valor actual (Va). Ya se ilustró esta situación en el caso del cálculo del monto y se ilustra para el caso del valor actual más adelante.

Tipo: Al igual que para calcular el monto o valor futuro, se puede anotar (es un valor optativo, no obligatorio) un número 0 o 1 que indica cuándo vencen los pagos. Dado que en este caso se está capturando el Valor futuro (Vf) y no el importe de los pagos periódicos, resulta irrelevante este dato. Su aplicación se estudiará en el capítulo 4 (anualidades vencidas), así como en el capítulo 5 (anualidades anticipadas).

En el ejemplo 3.5.1 se pregunta cuál es el capital que debe depositarse en un banco si se desea tener \$50 000 en tres años y la tasa de interés es de 20% anual convertible semestralmente. La fórmula aplicable es la (3.6):

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} = M(1+i)^{-n}$$

Entonces, en Excel el resultado se puede obtener mediante tres vías, como se muestra a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel Valor Actual***	***Valor actual a interés compuesto***
2			=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)	***C=M(1+i)^-n***
3			=VA(0.20/2,3*2,,-50000,)	=(B7*(1+B4)^-B5)
4	Tasa	0.20/2	28 223.70	28 223.70
5	Nper	3*2		
6	Pago	-		=(50000*(1+0.10)^-6)
7	Monto (Valor futuro)	50 000.00		28 223.70
8				

que produce el resultado de \$28 223.70 que aparece en el texto.

En el ejemplo 3.5.2 se busca el valor actual de un pago de \$425 000 que debe realizarse en el plazo de año y medio considerando que se puede obtener un interés de 6% anual convertible mensualmente. Se tiene entonces que:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel Valor Actual***	***Valor actual a interés compuesto***
2			=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)	***C=M(1+i)^-n***
3			=VA(0.06/12,1.5*12,,-425000,)	=(B7*(1+B4)^-B5)
4	Tasa	0.06/12	388 507.87	388 507.87
5	Nper	1.5*12		
6	Pago	-		=(425000*(1+0.06/12)^-18)
7	Monto (Valor futuro)	425 000.00		388 507.87
8				

El ejemplo 3.5.3 ilustra el caso de la determinación del valor presente de un flujo de $80 000 que se espera recibir en el plazo de dos años con una tasa inflacionaria de 25%. En Excel puede resolverse mediante la función de Valor actual (Va), o bien a través de la integración directa de los valores mediante fórmulas como se ilustra a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel Valor Actual***	***Valor actual a interés compuesto***
2			=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)	***C=M(1+i)^-n***
3			=VA(0.25,2,,-80000,)	=(B7*(1+B4)^-B5)
4	Tasa	0.25	51 200.00	51 200.00
5	Nper	2		
6	Pago	-		=(80000*(1+0.25)^-2)
7	Monto (Valor futuro)	80 000.00		51 200.00
8				

Cualquiera de las alternativas produce el resultado ya reportado en el texto.

En el ejemplo 3.5.4 se expone el caso de una compañía minera que ha descubierto una veta de manganeso y debe decidir la conveniencia o inconveniencia de su explotación. En este caso se deberán traer a valor actual los flujos de 100 000, 200 000 y 300 000 que se recibirán al final de los años 1, 2 y 3 respectivamente, y realizar la suma de dichos valores actuales. El resultado que se obtiene es prácticamente el mismo que se muestra en el texto.

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel Valor Actual***	***Valor actual a interés compuesto***
2				
3	**Valor actual de ingresos año 1: 100 000**			
4			=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)	***C = M(1+i)^-n***
5			=VA(0.40,1,,-100000,)	=(B7*(1+B4)^-B5)
6	Tasa	0.40	71 428.57	71 428.57
7	Nper	1		
8	Pago	-		=(100000*(1+0.40)^-1)
9	Monto (Valor futuro)	100 000		71 428.57
9				
10				
11	**Valor actual de ingresos año 2: 200 000**			
12			=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)	***C = M(1+i)^-n***
13			=VA(0.40,2,,-200000,)	=(B17*(1+B14)^-B15)
14	Tasa	0.40	102 040.82	102 040.82
15	Nper	2		
16	Pago			=(200000*(1+0.40)^-2)
17	Monto (Valor futuro)	200 000		102 040.82
18				
19	**Valor actual de ingresos año 3: 300 000**			
20			=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)	***C = M(1+i)^-n***
21			=VA(0.40,3,,-300000,)	=(B25*(1+B2)^-B23)
22	Tasa	0.40	109 329.45	109 329.45
23	Nper	3		
24	Pago			=(300000*(1+0.40)^-3)
25	Monto (Valor futuro)	300 000		109 329.45
26				
27				
28		**Valor futuro**	**Valor actual**	
29	Ingresos año 1	100 000.	71 428.57	
30	Ingresos año 2	200 000.	102 040.82	
31	Ingresos año 3	200 000.	109 329.45	
32	Total de ingresos	500 000.	282 798.83	

3.11.5 Valor actual de deudas que devengan interés

En el caso de deudas que devengan interés, se debe determinar primero un monto a interés compuesto y posteriormente determinar un valor actual a partir de él.

En el ejemplo 3.5.5 se presenta el caso de un préstamo de 2 000 000 por el que se firma un documento a plazo de un año con interés de 15% global. A fin de recuperar el efectivo, la empresa vendedora descuenta el documento en un banco a una tasa de 2% mensual. Se pide determinar el importe neto que recibe la vendedora y la tasa de interés efectiva que debe pagar por el financiamiento.

El planteamiento en Excel es el siguiente:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel Valor futuro***	***Función Excel Valor Actual***
2			=Vf(tasa,nper,pago,va,tipo)	=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)
3	**Monto (Valor futuro)**		=VF(0.15,1,,-2000000,)	=VA(0.02,12,,-2300000,)
4	Tasa interés	0.15	2 300 000.00	1 813 534.30
5	Nper interés	1		
6	Valor actual	2 000 000.00		
7	**Capital (Valor actual)**			
8	Tasa descuento	0.02		
9	Nper descuento	12		
10	Pago	-		
11	Monto (Valor futuro)	2 300 000.00		

Estos datos son los mismos que se tienen en el texto y que sirven de base para determinar la tasa de interés efectiva de 9.32%

El ejemplo 3.5.6 se refiere a un documento con un valor nominal de $500 000 con vencimiento a 3 meses que devenga 2% de interés mensual y que es descontado a una tasa de 22% anual.

El planteamiento en Excel es el siguiente:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel Valor futuro***	***Función Excel Valor Actual***
2			=Vf(tasa,nper,pago,va,tipo)	=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)
3	**Monto (Valor futuro)**		=VF(0.02,3,,-500000,)	=VA(0.22,1/4,,-530604,)
4	Tasa interés	0.02	530 604.00	504 871.16
5	Nper interés	3		
6	Valor actual	500 000.00		
7	**Capital (Valor actual)**			
8	Tasa descuento	0.22		
9	Nper descuento	1/4		
10	Pago	-		
11	Monto (Valor futuro)	530 604.00		

Los valores que se obtienen son idénticos a los que se muestran en el cuerpo del capítulo.

El ejemplo 3.5.7 presenta el caso de un documento de $1 000 000 que debe pagarse en 36 meses y que genera intereses a 12% anual convertible mensualmente. Se pide calcular la cantidad que se recibiría si se descuenta a una tasa de 16% anual convertible trimestralmente.

La solución en Excel es la siguiente:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel Valor futuro***	***Función Excel Valor Actual***
2			=Vf(tasa,nper,pago,va,tipo)	=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)
3	**Monto (Valor futuro)**		=VF(0.12/12,36,,-1000000,)	=VA(0.16/4,12,,-1430768.78,
4	Tasa interés	0.12/12	1 430 768.78	893 653.96
5	Nper interés	36		
6	Valor actual	1 000 000.00		
7	**Capital (Valor actual)**			
8	Tasa descuento	0.16/4		
9	Nper descuento	12		
10	Pago	-		
11	Monto (Valor futuro)	1 430 768.78		

Las diferencias de centavos se deben a los redondeos.

En el ejemplo 3.5.8 se presenta el caso de la compra de una maquinaria por la que se firma un documento de $75 000 pagaderos en 3 años con una tasa de interés de 12.5% semestral. Se descuenta el documento a los 10 meses de su firma y el banco carga un interés de 28% convertible trimestralmente. Se pide determinar la cantidad que se recibe.

La solución en Excel es la siguiente:

	A	B	C	D
1	**Método exacto**			
2				
3	**Datos**		***Función Excel Valor futuro***	***Función Excel Valor Actual***
4			=Vf(tasa,nper,pago,va,tipo)	=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)
5	**Monto (Valor futuro)**		=VF(0.125,6,,-75000,)	=VA(0.28/4,8.666667,,-152046.49,)
6	Tasa interés	0.125	152 046.49	84 589.60
7	Nper interés	6		
8	Valor actual	75 000.00		
9	**Capital (Valor actual)**			
10	Tasa descuento	0.28		
11	Nper descuento	8.666667		
12	Pago	-		
13	Monto (Valor futuro)	152 046.49		
14				
15	**Método aproximado**			
16				
17	**Datos**		***Función Excel Valor futuro***	***Función Excel Valor Actual (se descuentan 27 meses)***
18			=Vf(tasa,nper,pago,va,tipo)	=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)
19	**Monto (Valor futuro)**		=VF(0.125,6,,-75000,)	=VA(0.28/4,9,,-152046.49,)
20	Tasa interés	0.125	152 046.49	82 703.22
21	Nper interés	6		
22	Valor actual	75 000.00		**Acumulación por un mes a interés simple**
23	**Capital (Valor actual)**			***M=C(1+it)***
24	Tasa descuento	0.28		=82703.22*(1+(0.28/12)*1)
25	Nper descuento	8.666667		84 632.96
26	Pago	1		
27	Monto (Valor futuro)	152 046.49		
28				

3.11.6 Tiempo (sección 3.6)

Para calcular el tiempo se utiliza la fórmula (3.3) del monto a interés compuesto, pues a partir de ella se puede despejar cualquier incógnita. Para solucionar estos problemas es necesario utilizar logaritmos.

En el ejemplo 3.6.1 se pide calcular el tiempo en el que se duplicará una inversión de $1 000 000 con tasas de interés de 36% y de 24% anual convertibles mensualmente.

A partir de la fórmula (3.3)

$$M = C(1+i)^n$$

se despeja la incógnita n con lo cual se obtiene la fórmula (3.7)

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1+i)}$$

El planteamiento del problema en Excel se presenta como se muestra en la figura siguiente:

	A	B	C
1	**Datos**		***Tiempo***
2			$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1+i)}$
3	*Monto (M)*	2 000 000.	=LOG((B3/B4),10)/LOG((1+B5),10)
4	*Capital (C)*	1 000 000.	23.45
5	*interés (i)*	0.03	
6			
7	*Monto (M)*	2 000 000.	=LOG((B7/B8),10)/LOG((1+B9),10)
8	*Capital (C)*	1 000 000.	35.00
9	*interés (i)*	0.02	

El ejemplo 3.6.2 pide se determine el tiempo en el cual \$1 reduce su valor adquisitivo a 50% dada una inflación de

a) 50%, *b*) 10%, *c*) 30%, *d*) 100%.

	A	B	C
1	**Datos**		***Tiempo***
2			$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1+i)}$.
3	*Monto (M)*	1.00	=LOG((B3/B4),10)/LOG((1+B5),10)
4	*Capital (C)*	0.50	1.71
5	*interés (i)*	50%	
6			
7	*Monto (M)*	1.00	=LOG((B7/B8),10)/LOG((1+B9),10)
8	*Capital (C)*	0.50	7.27
9	*interés (i)*	10%	
10			
11	*Monto (M)*	1.00	=LOG((B11/B12),10)/LOG((1+B13),10)
12	*Capital (C)*	0.50	2.64
13	*interés (i)*	30%	
14			
15	*Monto (M)*	1.00	=LOG((B15/B16),10)/LOG((1+B17),10)
16	*Capital (C)*	0.50	1.00
17	*interés (i)*	100%	

3.11.7 Tasa de interés (sección 3.7)

Para calcular la tasa de interés se parte también de la fórmula (3.3) del monto a interés compuesto, en la que se despeja la incógnita (i) con lo cual se obtiene la fórmula (3.8):

$$M = C(1+i)^n \tag{3.3}$$

$$i = \sqrt[n]{M/C} - 1 = (M/C)^{1/n} - 1 \tag{3.8}$$

En el ejemplo 3.7.1 se pregunta cuál es la tasa de interés a la que se deben depositar \$15 000 para acumular \$50 000 en un plazo de 5 años, con intereses que se capitalizan

a) semestralmente, *b*) trimestralmente, y *c*) mensualmente.

	A	B	C
1	**Datos**		***Tasa de interés***
2			$i = \sqrt[n]{M/C} - 1 = (M/C)^{1/n} - 1$
3	Semestral		
4	*Monto (M)*	50 000.00	=((B4/B5)^(1/B6))-1
5	*Capital (C)*	15 000.00	12.79%
6	*Tiempo (n)*	10	
7			
8	Trimestral		
9	*Monto (M)*	50 000.00	=((B9/B10)^(1/B11))-1
10	*Capital (C)*	15 000.00	6.20%
11	*Tiempo (n)*	20	
12			
13	Mensual		
14	*Monto (M)*	50 000.00	=((B14/B15)^(1/B16))-1
15	*Capital (C)*	15 000.00	2.03%
16	*Tiempo (n)*	60	
17			

3.12 Resumen

En este capítulo se introdujo el concepto de interés compuesto, fundamental para el manejo de operaciones financieras a mediano y largo plazos.

En el *interés compuesto* los intereses generados por un capital se suman periódicamente a él en lapsos previamente establecidos a los que se denomina *periodos de capitalización*. A su vez, el *interés capitalizado* genera un nuevo interés, y así el crecimiento que se produce es exponencial, a diferencia del interés simple, que guarda un comportamiento lineal.

El *monto compuesto* será el que se obtenga al añadir al capital original el interés compuesto generado, y se determinará utilizando la fórmula

$$M = C(1 + i)^n$$

donde i = tasa de interés por periodo
y n = número de periodos de capitalización.

Cuando se trabaja con interés compuesto, es de importancia fundamental que la tasa de interés que se maneje sea exactamente la del periodo de capitalización establecido.

Las tasas de interés se expresan comúnmente en forma anual que indica, cuando es necesario, sus periodos de capitalización. La tasa así expresada recibe el nombre de *tasa nominal* $= J_m$, donde J es la tasa nominal anual y m es el número de veces que se capitaliza durante el año (frecuencia de conversión), y debe distinguirse de la *tasa efectiva* por periodo, i, que expresa el interés efectivo generado (puede ser mensual, semestral, anual, etc.). Se dice que dos tasas son *equivalentes* cuando producen el mismo interés efectivo en un periodo determinado.

Las ecuaciones de valores equivalentes, que se presentaron en el capítulo 2, se aplicaron en éste a la resolución de problemas en los que es necesario igualar dos flujos de efectivo (ingresos y egresos) utilizando interés compuesto. A diferencia del interés simple, se demostró que el resultado será el mismo sin importar la fecha focal que se seleccione para igualar los flujos.

Al final, se estudió el concepto de tiempo equivalente y se indicó que especifica la fecha en la cual pueden ser liquidadas con un pago único dos o más deudas.

Comprobación del capítulo

Si ha leído el capítulo completo, el lector debe:

- Comprender el concepto de interés compuesto.
- Diferenciar al interés compuesto del interés simple.
- Comprender los conceptos de: periodo de capitalización, frecuencia de conversión, tasa de interés compuesto y monto compuesto.
- Calcular el monto compuesto de un capital.
- Comprender los conceptos de tasa nominal, tasa efectiva y tasas equivalentes.
- Calcular las tasas anteriores.
- Determinar el valor actual o presente de un monto compuesto.
- Determinar la tasa de interés en problemas que involucren interés compuesto.
- Calcular el tiempo en problemas de interés compuesto.
- Comprender el concepto de ecuación de valor y resolver ejercicios que impliquen su uso.
- Resolver ejemplos de tiempo equivalente.
- Resolver ejercicios y aplicaciones de interés compuesto utilizando la hoja de cálculo de Excel.

Términos y conceptos importantes

- Ecuaciones de valores equivalentes
- Frecuencia de conversión
- Gráficas de tiempo y valor
- Interés compuesto $= I$
- Monto compuesto $= M$
- Periodo de capitalización
- Tasa de interés por periodo $= i$
- Tasa efectiva anual $= e$
- Tasa nominal $= J_m$
- Tasas equivalentes
- Tiempo equivalente
- Valor actual o capital $= C$

Fórmulas importantes

$$M = C + I \tag{3.1}$$

$$M = C(1 + i)^n \tag{3.3}$$

$$i = (1 + j/m)^m - 1 \tag{3.5}$$

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} = M(1+i)^{-n} \tag{3.6}$$

$$n = \frac{\log \text{(factor monto a interés compuesto)}}{\log (1 + i)} \tag{3.7}$$

$$i = \sqrt[n]{M/C} - 1 \tag{3.8}$$

Ejercicios complementarios

1. Se invierten $20 000 en una cuenta bancaria. Determine el monto compuesto al cabo de 5 años, si la tasa promedio de interés convertible mensualmente es de:
   a) 15% *b)* 25% *c)* 38% *d)* 54%
2. ¿Cuál es el monto de una inversión de $100 000 al cabo de un año, si se deposita en una cuenta bancaria que paga 30% de interés convertible:
   a) anualmente? *c)* trimestralmente?
   b) semestralmente? *d)* mensualmente?
3. Los precios de la canasta básica de alimentación se han incrementado a una tasa anual de 25% durante 3 años. Si el precio actual es de $765, ¿cuál era su valor hace 3 años?
4. Se desea formar un fondo de $250 000 al cabo de 2 años. ¿Qué cantidad debe depositarse hoy si el banco paga un interés de:
   a) 10% convertible mensualmente?
   b) 20% convertible semestralmente?
   c) 23% anual?
5. Los salarios mínimos se han incrementado a una tasa de 13% anual promedio durante los últimos 4 años. Si continuara dicha tendencia, ¿en qué tiempo se triplicará su valor nominal?
6. El precio de las casas y terrenos se ha duplicado en 3 años. ¿Cuál es la tasa de interés anual que ha ganado?
7. Un país posee cinco refinerías para proveerse de combustible. Su producción actual es de 1 000 000 barriles diarios y trabajan a 80% de su capacidad. Si el crecimiento promedio del consumo ha sido de 4% anual, ¿en qué tiempo requerirá dicho país poner en operación una nueva refinería?
8. ¿Cuál es la tasa nominal convertible mensualmente equivalente a:
   a) una tasa de 11% anual?
   b) una tasa de 18% anual convertible semestralmente?
   c) una tasa de 32% anual convertible trimestralmente?
9. Una deuda de $400 000 debe liquidarse con dos pagos iguales a 60 y 120 días. ¿Cuál es el importe de dichos pagos si la tasa de interés anual es de 26% con capitalización bimestral?
10. En qué tiempo puede ser liquidada con un pago único una deuda de $27 500 pagaderos en un año, y $38 450 pagaderos en dos años, si la tasa de interés es de:
    a) 10% anual? *c)* 30% anual?
    b) 20% anual? *d)* 50% anual?
11. Determine el periodo de capitalización y la frecuencia de conversión de:
    a) una inversión en certificados de la Tesorería de la Federación con vencimientos cada 91 días.
    b) una inversión en cuenta de ahorros que paga intereses de 20% anual semestralmente.
    c) una inversión en pagarés liquidables cada 28 días.
12. ¿Cuál es la tasa de interés por periodo de capitalización de las siguientes inversiones:
    a) 6% capitalizable mensualmente?
    b) 18% capitalizable trimestralmente?
    c) 22% capitalizable anualmente?
    d) 22% capitalizable semestralmente?
13. Un banco ofrece las siguientes alternativas de inversión:
    a) Depósitos a plazo fijo de un año 12.0%
    b) Depósitos a plazo fijo capitalizable mensualmente 11.5%
    c) Depósitos a plazo fijo con intereses capitalizables trimestralmente 11.6%
    d) Depósitos a plazo fijo con interés capitalizable semestralmente 11.8%

    Si se desea invertir $50 000, ¿cuál es la mejor alternativa?
14. ¿Cuál será el monto de los $50 000 del ejercicio anterior, si se depositan durante 10 años en:
    a) una cuenta de valores a 22% capitalizable mensualmente?
    b) una cuenta de valores a 27.5% capitalizable mensualmente?
    c) una cuenta de valores a 30% capitalizable mensualmente?

d) una cuenta de valores a 35% capitalizable mensualmente?
e) una cuenta de valores a 40% capitalizable mensualmente?

15. *a*) ¿Cuál será el monto de una cuenta de ahorros en la que se depositan \$50 000 durante 10 años, si la tasa de interés es de 8% capitalizable semestralmente?
b) ¿Cuál será el monto en 15 años?
c) ¿En 20 años?

16. Una persona desea formar un fondo de ahorros para su vejez. Deposita \$10 000 en una cuenta que paga 12% anual convertible mensualmente. ¿Cuál será el monto de que disponga al cabo de 25 años?

17. Las ventas al menudeo se han incrementado a razón de 3% anual. Si en el año se vendieron 100 000 unidades, ¿cuáles son las ventas estimadas para dentro de 5 años si se mantiene el ritmo de crecimiento?

18. En una ciudad el crecimiento del número de automóviles ha sido de 6% anual promedio durante los últimos 5 años. De continuar la tendencia, ¿cuál será el número de automóviles que circularán dentro de 10 años, si actualmente existen dos millones de vehículos?

19. Una persona deposita \$5 000 en una cuenta de ahorros que paga 10% de interés anual convertible semestralmente. ¿Cuál será el importe reunido después de 28 meses? Calcule por el método exacto y por el aproximado.

20. Determine la tasa efectiva de interés anual equivalente a:

a) 20% capitalizable semestralmente.
b) 20% capitalizable mensualmente.
c) 30% capitalizable mensualmente.
d) 40% capitalizable mensualmente.
e) 50% capitalizable trimestralmente.
f) 50% capitalizable mensualmente.
g) 60% capitalizable trimestralmente.
h) 60% capitalizable mensualmente.
i) 60% capitalizable semanalmente.

21. Determine la tasa nominal de interés J_m equivalente a una tasa efectiva de:

a) $i = 15\%$ $m = 1$
b) $i = 15\%$ $m = 2$
c) $i = 15\%$ $m = 4$
d) $i = 15\%$ $m = 12$
e) $i = 26\%$ $m = 12$
f) $i = 12\%$ $m = 4$
g) $i = 35\%$ $m = 12$
h) $i = 9\%$ $m = 4$

22. Determine:

a) La tasa nominal de interés J_4 equivalente a $J_{12} = 14\%$.
b) La tasa nominal de interés J_4 equivalente a $J_{12} = 18\%$.
c) La tasa nominal de interés J_4 equivalente a $J_2 = 10\%$.
d) La tasa nominal de interés J_6 equivalente a $J_4 = 8\%$.
e) La tasa nominal de interés J_{12} equivalente a $J_4 = 12\%$.
f) La tasa nominal de interés J_{12} equivalente a $J_4 = 15\%$.
g) La tasa nominal de interés J_{12} equivalente a $J_{12} = 20\%$.
h) La tasa nominal de interés J_{12} equivalente a $J_4 = 24\%$.

23. Determine la tasa efectiva de interés equivalente a una tasa nominal de 18% compuesta:

a) anualmente.
b) semestralmente.
c) cuatrimestralmente.
d) trimestralmente.
e) bimestralmente.
f) anualmente.
g) mensualmente.
h) semanalmente.

¿Cuál es la diferencia entre la tasa efectiva con capitalización anual y la tasa efectiva semanal?

24. Una firma de venta de automóviles ofrece dos planes de pago: al contado \$135 000; a plazos: \$40 000 de enganche y dos pagos de \$52 500 a 3 y 6 meses. ¿Qué alternativa es más conveniente si la tasa de interés es de:

a) $J_4 = 10\%$?
b) $J_4 = 20\%$?
c) $J_4 = 30\%$?
d) $J_4 = 40\%$?
e) Indique el valor actual de los pagos a plazos.

25. Alejandra obtuvo un préstamo de \$4 300 y acuerda liquidarlo mediante tres pagos a 1, 2 y 3 meses, con un interés de 2% mensual. El segundo pago será el doble del primero y, el tercero, el doble del segundo. ¿Cuál es el importe de los pagos?

26. Determine las tasas efectivas de interés equivalente a tasas nominales J de 16% y 20% compuestas:

a) anualmente.
b) semestralmente.
c) cuatrimestralmente.
d) trimestralmente.
e) bimestralmente.
f) anualmente.
g) mensualmente.
h) semanalmente.

¿Cuál es la diferencia entre las tasas efectivas con capitalización anual y las que se capitalizan mensualmente?

27. ¿A qué tasa de interés nominal convertible mensualmente debe invertirse un capital para que éste se duplique en:

a) 5 años?
b) 4 años?
c) 3 años?
d) 2 años?
e) 1 año?

28. ¿Qué alternativa de inversión es más rentable:
a) un depósito a 6 meses con tasa de interés de 7.5% convertible semestralmente, o uno con tasa de 7.25% convertible mensualmente?
b) un depósito a 12 meses con tasa de interés de 10% convertible anualmente, o uno con tasa de 9.5% convertible mensualmente?

29. ¿Cuál es la tasa de interés simple equivalente a una tasa de 14% convertible:

a) mensualmente.
b) trimestralmente.
c) semestralmente.
d) anualmente.

si invierte un capital durante 3 años?

30. Encuentre el valor actual de \$10 000 que se recibirán dentro de:

a) 1 año.
b) 2 años.
c) 3 años.
d) 5 años.
e) 10 años.

si la tasa de interés es de 30% anual.

31. Encuentre el valor actual de $10 000 que se recibirán dentro de cinco años, si la tasa de interés anual es:

a) 10%. *d*) 40%. *f*) 75%.
b) 20%. *e*) 50%. *g*) 100%.
c) 30%.

32. Encuentre el valor actual de $10 000 que se recibirán dentro de tres años si la tasa de interés es de 15% compuesta:

a) anualmente. *e*) bimestralmente.
b) semestralmente. *f*) mensualmente.
c) cuatrimestralmente. *g*) diariamente.
d) trimestralmente.
si invierte un capital durante 3 años.

33. Determine el valor actual de:

a) $10 000 pagaderos en 6 meses a 18% convertible mensualmente;
b) $50 000 pagaderos en 3 años a 20% convertible trimestralmente;
c) $120 000 pagaderos en 18 meses a 22% convertible trimestralmente;
d) $400 000 pagaderos en 2 años a 40% convertible trimestralmente.

34. ¿Cuánto dinero debe depositar una persona en un banco para reunir $100 000 dentro de 2 años, si la tasa de interés vigente es de:

a) 6% convertible mensualmente?
b) 10% convertible trimestralmente?
c) 12% convertible semestralmente?
d) 14% convertible anualmente?
e) ¿Qué alternativa es la más conveniente?

35. ¿Qué cantidad se debe pagar hoy por una deuda a 36 meses, si la tasa de interés es de 17% anual capitalizable trimestralmente y el monto es de $44 850?
36. Un documento de $180 000 a plazo de 24 meses es descontado en el banco a una tasa de 22% convertible trimestralmente. ¿Cuál es la cantidad que se recibe?
37. Un banco descuenta un documento de $48 000 con vencimiento a 20 meses aplicando una tasa de interés de 14% convertible mensualmente. A su vez, el banco redescuenta el documento en una institución financiera que le carga 12% de interés convertible trimestralmente. ¿Cuál es su utilidad en la operación? Aplique el método exacto para el periodo fraccionario de interés.
38. Determine el valor actual de una deuda de $200 000 a pagar en 3 años y 4 meses, si la tasa de interés vigente es de 19% convertible trimestralmente. Utilice ambos métodos para determinar el resultado.
39. Se desea descontar un pagaré con valor de $175 000 en 105 días. El banco carga una tasa de 16.5% convertible mensualmente. Determine el capital utilizando ambos métodos.

Matemáticas en internet. Interés compuesto

En internet es posible encontrar numerosos recursos para complementar la información que se proporciona en este texto, así como aplicaciones, simuladores y calculadoras para resolver ciertos tipos de problemas de los que aquí se incluyen. A continuación se proporcionan algunos vínculos de utilidad, que se encontraban activos al momento de su redacción.

3.2 Conceptos básicos

- Matemáticas financieras para toma de decisiones empresariales.
  http://www.eumed.net/libros/2006b/cag3/2b.htm
- Conceptos básicos y problemas ilustrativos de interés compuesto.
  http://www.gestiopolis.com/canales/financiera/articulos/no%205/interesalinteres.htm
- Conceptos básicos de interés compuesto, deducción de las fórmulas de interés compuesto y monto.
  http://www.aulafacil.com/CursoMatematicasFinancieras/Finanza4.htm
- En la sección "Contenido", encontrarás una liga que trata sobre los tipos de interés (simple y compuesto) y algunos ejemplos.
  http://www.sectormatematica.cl/contenidos.htm
- Video en el que se explican las diferencias entre el interés simple y el interés compuesto.
  http://youtu.be/TPH4vON4jfE
- Video en el cual se presentan los fundamentos del valor presente y el valor futuro a interés compuesto.
  http://youtu.be/pKD8cmh7nvo

3.3 Monto

- Ejercicio número 3.
  http://www.aulafacil.com/CursoMatematicasFinancieras/Finanza6.htm
- Interés compuesto, casos y problemas 1, 2, 4, 5 y 17.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/
- Introducción al interés compuesto. Explicación de la integración de la fórmula del monto.

http://www.disfrutalasmatematicas.com/dinero/interes-compuesto.html

- Video en el cual se muestra la forma de calcular el monto a interés compuesto.
  http://youtu.be/lIQzn0Z551c

3.4 Tasa nominal, tasa efectiva y tasas equivalentes

- Conceptos de tasa efectiva y tasa nominal, así como ejercicios ilustrativos de su cálculo.
  http://www.gestiopolis.com/canales/financiera/articulos/no%205/interesalinteres.htm
- Ejercicio número 2. Conversión de una tasa anual a tasas equivalentes en diferentes periodos.
  http://www.aulafacil.com/CursoMatematicasFinancieras/Finanza6.htm
- Interés compuesto, casos y problemas 16 y 17.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/
- Video en el cual se ilustra el cálculo de la tasa de interés efectiva a partir de una tasa de interés nominal.
  http://youtu.be/_ikVdqIydVs

3.5 Valor actual o presente

- Definición de valor presente a interés compuesto.
  http://www.eco-finanzas.com/diccionario/V/VALOR_PRESENTE.htm
- Calculadora financiera que permite introducir la combinación de datos como valor presente, valor futuro, tasa de interés (compuesta), pagos y periodos y obtener como resultado una de estas variables que sea desconocida.
  http://www.finanzas2000eu.com.co/finanzas2000eu/calculos.html
- Interés compuesto, casos y problemas 6, 9, 11, 12, 13, 14 y 18.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/
- Video en el cual se presentan los fundamentos del valor presente y el valor futuro a interés compuesto.
  http://youtu.be/pKD8cmh7nvo

3.6 Tiempo

- Fórmulas principales de interés compuesto.
  http://www.matematicas-financieras.com/Capitalizacion-Compuesta--I-P4.htmhttp://www.matematicas-financieras.com/Capitalizacion-Compuesta--I-P4.htm
- Interés compuesto, casos y problemas 3 y 10.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/
- Cálculo en Excel del valor de las variables que intervienen en el interés compuesto.
  http://youtu.be/9V0k_Hq9dhA

3.7 Tasa de interés

- Ejercicios de interés compuesto.
  http://usuarios.lycos.es/matematic/segunda.htm#eje
- Video en el cual se explica la forma de calcular la tasa de interés a interés compuesto.
  http://youtu.be/RlP6dyUHpig
- Conceptos básicos y problemas de interés compuesto.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/

3.8 Ecuaciones de valores equivalentes

- Diapositivas en las cuales se presentan el concepto de ecuaciones de valores equivalentes así como algunos ejemplos del tema.
  http://www.slideshare.net/tmateo14/ecuaciones-de-valores-equivalentes
- Presentación del concepto de ecuaciones de valores equivalentes y un ejemplo ilustrativo.
  http://marcelrzm.comxa.com/MateFin/34EcuacionesDValoresEquivalentes.pdf

3.9 Aplicaciones

- Página del INEGI que incluye vínculos a los documentos metodológicos para el cálculo del Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC) y del Índice Nacional de Precios al Productor (INPP), así como una útil calculadora que permite determinar la inflación acumulada en México entre dos fechas, así como la inflación mensual promedio en el mismo periodo.
  http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/inp/Default.aspx

CAPÍTULO

4

Anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas

TEMARIO

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

- Identificar, definir y explicar los diferentes tipos de anualidades
- Plantear e identificar situaciones en las que se apliquen las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas (ASCVI)
- Interpretar planteamientos de anualidades de este tipo
- Plantear y resolver problemas con este tipo de anualidades y encontrar el monto, el valor actual, el interés, el plazo o la tasa de interés, según sea el caso
- Resolver ejercicios y aplicaciones de anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas mediante el empleo de la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®

4.1 Introducción y terminología

En general, *se denomina anualidad a un conjunto de pagos iguales realizados a intervalos iguales*. Se conserva el nombre de anualidad por estar ya muy arraigado en el tema, aunque no siempre se refieran a periodos anuales de pago. Algunos ejemplos de anualidades son:

- Los pagos mensuales por renta.
- El cobro quincenal o semanal de sueldos.
- Los abonos mensuales a una cuenta de crédito.
- Los pagos anuales de primas de pólizas de seguro de vida.

Se conoce como *intervalo* o *periodo de pago* al tiempo que transcurre entre un pago y otro, y se denomina *plazo* de una anualidad al tiempo que pasa entre el inicio del primer periodo de pago y el final del último. *Renta* es el nombre que se da al pago periódico que se hace. También hay ocasiones en las que se habla de anualidades que, o no tienen pagos iguales, o no se realizan todos los pagos en intervalos iguales. Estas aplicaciones se manejan en forma especial, como se verá más adelante.

4.2 Tipos de anualidades

La variación de los elementos que intervienen en las anualidades hace que existan diferentes tipos de ellas. Por ello, conviene clasificarlas de acuerdo con diversos criterios:

Criterio	Tipos de anualidades
a) Tiempo	Ciertas contingentes
b) Intereses	Simples generales
c) Pagos	Vencidas anticipadas
d) Iniciación	Inmediatas diferidas

a) **Tiempo**. Este criterio de clasificación se refiere a las fechas de iniciación y de terminación de las anualidades:
- *Anualidad cierta*. Sus fechas son fijas y se estipulan de antemano. Por ejemplo, al realizar una compra a crédito se fija tanto la fecha en que se debe hacer el primer pago, como la fecha para efectuar el último.
- *Anualidad contingente*. La fecha del primer pago, la fecha del último pago, o ambas, no se fijan de antemano; depende de algún hecho que se sabe que ocurrirá, pero no se sabe cuándo. Un caso común de este tipo de anualidades son las rentas vitalicias que se otorgan a un cónyuge tras la muerte del otro. El inicio de la renta se produce al morir el cónyuge, pues se sabe que éste morirá, pero no se sabe cuándo.

b) **Intereses**. En este caso:
- *Anualidad simple*. Cuando el periodo de pago coincide con el de capitalización de los intereses. Es el tipo que será analizado en este capítulo. Un ejemplo muy simple sería el pago de una renta *mensual X* con intereses de 1.8% *mensuales*.
- *Anualidad general*. A diferencia de la anterior, el periodo de pago no coincide con el periodo de capitalización: el pago de una renta *semestral* con intereses de 30% *anuales*.

c) **Pagos**. De acuerdo con los pagos:
- *Anualidad vencida*. También se le conoce como anualidad ordinaria y, como su primer nombre lo indica, se trata de casos en los que los pagos se efectúan a su *vencimiento*, es decir, al final de cada periodo de pago.
- *Anualidad anticipada*. Es aquella en la que los pagos se realizan al principio de cada periodo.

d) **Iniciación**. De acuerdo con el momento en que se inicia:

- *Anualidad inmediata*. Es el caso más común. La realización de los cobros o pagos tiene lugar en el periodo que sigue *inmediatamente* a la formalización del trato: hoy se compra a crédito un artículo que se va a pagar en mensualidades, la primera de las cuales debe realizarse en ese momento o un mes después de adquirida la mercancía (anticipada o vencida).
- *Anualidad diferida*. Se pospone la realización de los cobros o pagos: se adquiere hoy un artículo a crédito, para pagar con abonos mensuales, el primero de los cuales debe efectuarse *6 meses después* de adquirida la mercancía.

De acuerdo con las anteriores clasificaciones se pueden distinguir diversos tipos de anualidades:

- Anualidades
  - Simples
    - Ciertas
      - Vencidas
        - Inmediatas
        - Diferidas
      - Anticipadas
        - Inmediatas
        - Diferidas
    - Contingentes
      - Vencidas
        - Inmediatas
        - Diferidas
      - Anticipadas
        - Inmediatas
        - Diferidas
  - Generales
    - Ciertas
      - Vencidas
        - Inmediatas
        - Diferidas
      - Anticipadas
        - Inmediatas
        - Diferidas
    - Contingentes
      - Vencidas
        - Inmediatas
        - Diferidas
      - Anticipadas
        - Inmediatas
        - Diferidas

De estos 16 tipos de anualidades, el más común es el de las *simples*, *ciertas*, *vencidas* e *inmediatas* que, por esta razón, se analizará en primer lugar en la sección siguiente. En capítulos posteriores se revisan los otros tipos.

4.3 Monto

Dada su importancia, vale la pena destacar las características de este tipo de anualidades:

- *Simples:* el periodo de pago coincide con el de capitalización.
- *Ciertas:* las fechas de los pagos son conocidas y fijadas con anticipación.
- *Vencidas:* los pagos se realizan al final de los correspondientes periodos.
- *Inmediatas:* los pagos se comienzan a hacer desde el mismo periodo en el que se realiza la operación.

Los elementos que intervienen en este tipo de anualidades son:

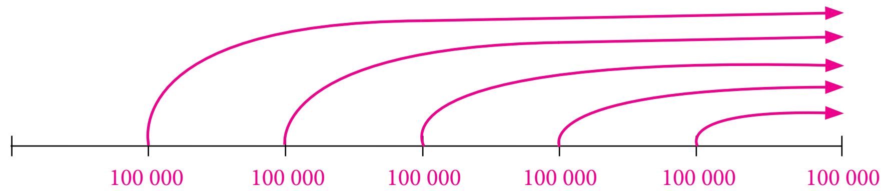
R = La renta o pago por periodo.
C = El valor actual o capital de la anualidad. Es el valor total de los pagos en el momento presente.
M = El valor en el momento de su vencimiento, o monto. Es el valor de todos los pagos al final de la operación.

Para ilustrar la deducción de la fórmula del monto de una anualidad se utilizará un ejemplo (a partir de aquí, y en el resto del capítulo, el término anualidad se referirá a las simples, ciertas, vencidas e inmediatas).

EJEMPLO 4.3.1

¿Qué cantidad se acumularía en un semestre si se depositaran \$100 000 al finalizar cada mes en una cuenta de inversiones que rinde 6% anual convertible mensualmente?

SOLUCIÓN:
Primero, se representa la situación en un diagrama de tiempo y valor:



Gráfica 4.1

El interés por periodo, i, es 0.06/12 = 0.005, y el monto de la anualidad debe ser igual a la suma de los montos de cada uno de los depósitos al final del semestre. Así se muestra mediante curvas en el diagrama, donde el último depósito no aumenta por interés puesto que se deposita en el sexto mes.

En términos del monto a interés compuesto ya conocido, el planteamiento sería:

$$M = 100\,000(1.005)^5 + 100\,000(1.005)^4 + 100\,000(1.005)^3 + 100\,000\,(1.005)^2 + 100\,000(1.005) + 100\,000$$

o, invirtiendo el orden,

$$M = 100\,000 + 100\,000(1.005) + 100\,000(1.005)^2 + 100\,000(1.005)^3 + 100\,000(1.005)^4 + 100\,000(1.005)^5$$
$$M = 100\,000 + 100\,000\,(1.005) + 100\,000(1.010025) + 100\,000(1.015075125) + 100\,000\,(1.020150501) + 100\,000(1.025251253)$$
$$M = 100\,000 + 100\,500 + 101\,002.50 + 101\,507.51 + 102\,015.05 + 102\,525.13$$
$$M = \$607\,550.19$$

En este planteamiento con el orden invertido se puede ver que el monto es una progresión geométrica. Y, de lo que se vio en el capítulo 1, tenemos que:

$t_1 = 100\,000$, el primer término
$r = 1.005$, la razón = $1 + i$
$n = 6$, el número de términos

De la fórmula (1.15) que se vio en el capítulo 1, sobre la suma de los términos de una progresión geométrica:

$$S = t_1\frac{(1-r^n)}{1-r} = \frac{t_1 - t_1 r^n}{1-r}$$

Sustituimos los términos de anualidades:

$$M = \frac{R - R(1+i)^n}{1-(1+i)}$$
$$= \frac{R[1-(1+i)^n]}{1-1-i} = \frac{R[1-(1+i)^n]}{-i} = R\frac{1-(1+i)^n}{-i}$$

Multiplicando tanto el numerador como el denominador de la fracción por −1, se obtiene:

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad \textbf{(4.1)}$$

que es la versión de esta fórmula que comúnmente se utiliza.

Al aplicarla para resolver el ejemplo anterior:

$$M = 100\,000\frac{(1.005)^6 - 1}{0.005} = 100\,000(6.075501879) = 607\,550.19$$

resultado que es igual al que se obtuvo antes.

EJEMPLO 4.3.2

¿Cuál es el monto de \$20 000 semestrales depositados durante 4 años y medio en una cuenta bancaria que rinde 12% capitalizable semestralmente?

SOLUCIÓN:

$$R = 20\,000$$
$$i = 0.12/2 = 0.06$$
$$n = 4.5(2) = 9$$

$$M = 20\,000\frac{(1.06)^9 - 1}{0.06} = 20\,000\frac{0.68947896}{0.06} = 20\,000(11.49131598)$$

$$M = 229\,826.32$$

EJEMPLO 4.3.3

El doctor González deposita \$100 al mes de haber nacido su hijo. Continúa haciendo depósitos mensuales por esa cantidad hasta que el hijo cumple 18 años para, en ese día, entregarle lo acumulado como herencia. Si durante los primeros 6 años de vida del hijo la cuenta pagó 9% anual convertible mensualmente, y durante los 12 años restantes pagó 1% mensual, ¿cuánto recibió el hijo a los 18 años?

SOLUCIÓN:

$R = 100$
$n = 18(12) = 216$
$i = 0.09/12 = 0.0075$ en los primeros 6 años
$i = 0.01$ en los últimos 12

Primero se calcula lo que se acumuló durante los primeros 6 años con un interés mensual de 0.75%:

$$M = 100\frac{(1.0075)^{72} - 1}{0.0075} = 100(95.0070) = 9\,500.70$$

Esta suma es la que se acumuló hasta el final del sexto año. Para determinar el resto, es necesario construir un diagrama de tiempo:

Gráfica 4.2

El total acumulado al final sería igual al valor de \$9 500.70 en el mes 216 más el monto de las anualidades 72 a 216:

$$9\,500.70(1.01)^{144} + 100\frac{(1.01)^{144} - 1}{0.01}$$

$$9\,500.70(4.190616) + 100(319.061559) =$$
$$39\,813.79 + 31\,906.16 = 71\,719.95$$

4.4 Valor actual

EJEMPLO 4.4.1

¿Cuál es el valor actual de una renta trimestral de \$4 500 depositada al final de cada uno de siete trimestres, si la tasa de interés es de 9% trimestral?

SOLUCIÓN:

$$C = ?$$
$$R = 4\,500$$
$$i = 0.09$$
$$n = 7$$

Gráfica 4.3

Éste es el caso inverso del monto. El *valor actual* de la anualidad sería la suma de los *valores actuales* de las siete rentas, o:

$$C = 4\,500(1.09)^{-1} + 4\,500(1.09)^{-2} + 4\,500(1.09)^{-3} + 4\,500(1.09)^{-4} + 4\,500(1.09)^{-5} + 4\,500(1.09)^{-6} + 4\,500(1.09)^{-7}$$
$$C = 4\,500(0.91743119) + 4\,500(0.84167999) + 4\,500(0.77218348) + 4\,500(0.70842521) + 4\,500(0.64993139) + 4\,500(0.59626733) + 4\,500(0.54703424)$$
$$C = 4\,128.44 + 3\,787.56 + 3\,474.83 + 3\,187.91 + 2\,924.69 + 2\,683.20 + 2\,461.65$$
$$C = 22\,648.28$$

Y, al igual que antes, puede verse que esa suma de términos es una progresión geométrica con:

$$t_1 = 4\,500(1.09)^{-1} = R(1+i)^{-1}$$
$$n = 7$$
$$r = (1.09)^{-1} = (1+i)^{-1}$$
$$S = \frac{t_1 - t_1 r^n}{1-r} = \frac{4\,500(1.09)^{-1} - 4\,500(1.09)^{-1}(1.09)^{-7}}{1-(1.09)^{-1}}$$
$$S = 22\,648.28$$

Y la correspondiente fórmula:

$$C = \frac{R(1+i)^{-1} - R(1+i)^{-1}[(1+i)^{-1}]^n}{1-(1+i)^{-1}} =$$

$$C = \frac{R(1+i)^{-1} - R(1+i)^{-1}(1+i)^{-n}}{1-\dfrac{1}{(1+i)}}$$

$$C = \frac{R(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{\dfrac{1}{1+i}}$$

$$C = \frac{(1+i)R(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = A \qquad (4.2)$$

que es la fórmula más común del valor actual de las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas.

Utilizando esta fórmula para resolver el mismo ejemplo 4.4.1:

$$C = 4\,500\frac{1-(1.09)^{-7}}{0.09} = 4\ 500(5.03295284)$$

$$C = 22\ 648.28$$

EJEMPLO 4.4.2

¿Cuál es el valor en efectivo de una anualidad de $1 000, que se pagan al final de cada 3 meses durante 5 años, suponiendo un interés anual de 16% convertible trimestralmente?

Solución:

$$R = 1\ 000$$

$$n = 5(4) = 20(5 \text{ por } 4 \text{ trimestres cada año})$$

$$i = 0.16/4 = 0.04$$

$$C = 1\ 000\frac{1-(1.04)^{-20}}{0.04}$$

$$C = 1\ 000(13.590326)$$

$$C = \$13\ 590.33$$

EJEMPLO 4.4.3

¿Qué es más conveniente para comprar un automóvil:

a) Pagar $260 000 al contado o
b) $130 000 de enganche y $12 000 al final de cada uno de los 12 meses siguientes, si el interés se calcula a razón de 18% convertible mensualmente?

Solución:

Para resolver este problema debe compararse el precio al contado con la suma del enganche y el valor actual de los abonos mensuales en el plan de crédito:

$$C_b = 130\ 000 + 12\ 000\frac{1-(0.18/12)^{-12}}{0.18/12}$$

$$C_b = 130\ 000 + 12\ 000\frac{1-(1.015)^{-12}}{0.015}$$

$$C_b = 130\ 000 + 12\ 000(10.907505)$$

$$C_b = 130\ 000 + 130\ 890.06$$

$$C_b = 260\ 890.06$$

que es el valor actual total de la operación a crédito. Como el valor a crédito es mayor, conviene más comprar al contado.

EJEMPLO 4.4.4

Encuentre el importe pagado en valor actual por un aparato electrónico, por el cual se entregó un enganche de $1 400, se hicieron 7 pagos mensuales vencidos por $160 y un último pago al final del octavo mes por $230 si se considera un interés de 27% anual con capitalización mensual.

Solución:

El importe es igual a:

a) Enganche

+

b) El valor actual de la anualidad con renta de 160

+

c) El valor actual del pago final

Si $i = 0.27/12 = 0.0225$, entonces

$$C = 1\ 400 + 160\left[\frac{1-(1.0225)^{-7}}{0.0225}\right] + 230(1.0225)^{-8}$$

$$C = 1\ 400 + 160(6.410246) + 230(0.836938)$$

$$C = 1\ 400 + 1\ 025.64 + 192.50$$

$$C = \$2\ 618.14$$

EJEMPLO 4.4.5

¿Cuál es el valor actual de un refrigerador adquirido mediante 52 abonos semanales "chiquititos", vencidos, de $240? Considere un interés anual de 15% convertible semanalmente.

Solución:

Interés semanal: $i = 0.15/52 = 0.002885$

$$n = 52$$

$$C = 240\frac{1-(1+0.002885)^{-52}}{0.002885}$$

$$C = 240\frac{0.139123}{0.002885}$$

$$C = 240(48.222987)$$

$$C = 11\ 573.52$$

EJEMPLO 4.4.6

¿Cuál es el valor actual del refrigerador del ejemplo anterior si se realiza un pago inmediato y 51 abonos semanales? El pago semanal y la tasa de interés son los mismos que se enuncian en ese problema.

Solución:

El importe es igual a:

a) El pago inmediato (enganche)

+

b) El valor actual de una anualidad de 51 pagos semanales

Si $i = 0.15/52 = 0.002885$, $n = 51$ y $R = \$240$

entonces:

$$C = 240 + 240\frac{1-(1+0.002885)^{-51}}{0.002885}$$

$$C = 240 + 240\frac{1-0.863360}{0.002885}$$

$$C = 240 + 240\frac{0.136640}{0.002885}$$

$$C = 240 + 240(47.362111)$$
$$C = 240 + 11\ 366.91$$
$$C = 11\ 606.91$$

Este valor es ligeramente superior al del ejemplo anterior en razón del primer pago que se realiza en forma inmediata.

Ejercicios de las secciones 4.1 a 4.4

De los planteamientos 1 a 5, diga a qué tipo de anualidad pertenecen y por qué:

1. Una mina en explotación tiene una producción anual de 600 000 dólares y se calcula que se agotará en 5 años. ¿Cuál es el valor actual de la producción si el rendimiento del dinero es de 11% anual?
2. El pago de la renta de una casa habitación.
3. Una persona adquiere en septiembre un televisor a crédito y acepta liquidar su precio mediante pagos entregados al principio de cada uno de 12 bimestres, comenzando en enero del año siguiente y con intereses de 20% anual efectivo.
4. Una pensión por jubilación que asigna cierta cantidad trimestral.
5. Se vende un camión en mensualidades que deben liquidarse cada primer día de mes, a partir del próximo mes, con intereses de 12% anual con capitalización quincenal.
6. Calcule el monto y el valor actual de las siguientes anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas:

   a) $20 000 semestrales durante 4 años y medio a 10% capitalizable semestralmente.
   b) $40 000 anuales durante 6 años a una tasa anual de 14%.
   c) $500 mensuales durante 7 años y 5 meses, a una tasa anual de 8% capitalizable mensualmente.

7. El señor López deposita $150 000 cada fin de año en una cuenta de ahorros que abona 4% de interés. ¿Cuánto habrá ahorrado al hacer el cuarto depósito?
8. Calcule el valor actual de un terreno, con un interés de 15% con capitalización mensual, si se vendió con las siguientes condiciones:

   - $40 000 de enganche.
   - Mensualidades vencidas por $ 2 250 durante 4.25 años.
   - Un pago final de $25 000 un mes después de la última mensualidad.

9. Si se calculan los intereses a una tasa de 22% convertible trimestralmente, ¿qué pago único de inmediato es equivalente a 15 pagos trimestrales de $800 si el primero de ellos se hace dentro de 3 meses?
10. En la compra de un automóvil nuevo que cuesta $145 000 al licenciado Ugalde le reciben su automóvil usado en $55 000. ¿Le convendría pagar el resto en 36 mensualidades vencidas de $3 500 si lo más que se desea pagar de interés es 2% mensual?
11. ¿Qué cantidad se debería depositar el 31 de enero del año 1 para poder hacer 15 retiros mensuales de $5 000 a partir del último día de febrero de ese año, si la cuenta en que se deposita paga 9% de interés convertible cada mes?
12. Si un taxi rinde $3 850 mensuales vencidos y se considera que esa cantidad es constante por tiempo indefinido, pues incluye gastos, depreciación, mantenimiento, etc. ¿Qué cantidad máxima deberá invertirse en el vehículo si se desea obtener un rendimiento de 30% anual efectivo sobre la inversión por un periodo de 3 años?

4.5 Renta

Se conoce como *renta* al pago periódico que se realiza a intervalos iguales.

EJEMPLO 4.5.1

Una persona adquiere hoy a crédito una computadora cuyo precio es de $19 750 y conviene en pagarla con 4 mensualidades vencidas. ¿Cuánto tendrá que pagar cada mes si se le cobran 1.8% mensual de interés?

Solución:
Se puede ver que los datos con que se cuenta son:

$$A = C = 19\,750$$
$$R = ?$$
$$i = 1.8\%$$
$$n = 4$$

y despejando en la fórmula (4.2) que se vio en la sección anterior:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$R = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{19\,750(0.018)}{1-(1.018)^{-4}} = \frac{355.50}{0.068873}$$

$$R = \$5\,161.67$$

EJEMPLO 4.5.2

¿Cuánto debe invertir el señor Juárez al final de cada mes durante los próximos 7 años en un fondo que paga 13.5% convertible mensualmente con el objeto de acumular $100 000 al realizar el último depósito?

Solución:

$$R = ?$$
$$M = 100\,000$$
$$i = 0.135/12 = 0.01125$$
$$n = 12(7) = 84$$

$$100\,000 = R\frac{(1.01125)^{84}-1}{0.01125} = R(138.602198)$$

$$R = \frac{100\,000}{138.602198} = \$721.49$$

EJEMPLO 4.5.3

Una persona debe pagar $3 000 al final de cada año, durante varios años. ¿Cuánto tendría que pagar a fines de cada mes para sustituir el pago anual, si se considera un interés de 25% anual convertible mensualmente?

Solución:
Se puede considerar que la renta de cada año es un monto y que el pago mensual es la renta de cada anualidad:

$$R = ?$$
$$i = 0.25/12 = 0.020833$$
$$M = 3\,000$$
$$n = 12$$

$$3\,000 = R\frac{(1.020833)^{12} - 1}{0.020833} = R(13.475114)$$

$$R = \frac{3\,000}{13.475137} = \$222.63$$

4.6 Plazo

El plazo o tiempo de una anualidad se calcula por medio del número de periodos de pago n.

EJEMPLO 4.6.1

¿Cuántos pagos de \$607.96 al final de mes tendría que hacer el comprador de una lavadora que cuesta \$8 500, si da \$2 550 de enganche y acuerda pagar 24% de interés capitalizable mensualmente sobre el saldo?

Solución:

$$n = ?$$
$$R = 607.96$$
$$C = 8\,500 - 2\,550 = 5\,950$$
$$i = 0.24/12 = 0.02$$

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$5\,950 = 607.96\frac{1-(1.02)^{-n}}{0.02}$$

$$\frac{5\,950(0.02)}{607.96} = 1-(1.02)^{-n}$$

$$0.195736 - 1 = -(1.02)^{-n}$$

$$(1.02)^{-n} = 0.80426343$$

$$\frac{1}{(1.02)^{n}} = 0.80426343$$

$$(1.02)^{n} = \frac{1}{0.80426343} = 1.24337370$$

$$n \log 1.02 = \log 1.24337369$$

$$n = \frac{\log 1.24337369}{\log 1.02} = \frac{0.09460167}{0.00860017}$$

$$n = 11$$

Muchas veces, a diferencia del ejemplo anterior, el número de periodos no es entero.

EJEMPLO 4.6.2

¿Cuántos pagos bimestrales vencidos de \$1 550 se tendrían que hacer para saldar una deuda, pagadera hoy, de \$8 000 cuyo interés es de 2.75% bimestral?

SOLUCIÓN:

$$R = 1\,550$$
$$C = 8\,000$$
$$i = 2.75\%$$
$$n = ?$$

$$8\,000 = 1\,550\frac{1-(1.0275)^{-n}}{0.0275}$$

$$\frac{8\,000(0.0275)}{1\,550} = 1-(1.0275)^{-n} = 0.14193548$$

$$-(1.0275)^{-n} = 0.14193548 - 1 = -0.85806451$$
$$(1.0275)^{-n} = 0.85806451$$
$$-n \log 1.0275 = \log 0.85806451$$

$$-n = \frac{\log 0.85806451}{\log 1.0275}$$

$$n = -\frac{\log 0.85806451}{\log 1.0275} = -\frac{-0.06648006}{0.01178183}$$

$$n = -(-5.642592)$$
$$n = 5.642592$$

Antes de continuar con la solución, conviene observar las distintas formas en que se resolvieron este ejemplo y el anterior para evitar confusiones. En el ejemplo 4.6.1 se convirtió la expresión $(1.02)^{-n}$ en

$$n = \frac{1}{1.02^n},$$

que es equivalente.

En este ejemplo, 4.6.2, se despeja la n directamente de $(1.0275)^{-n}$ para obtener $-n \log(1.0275)$.

Estos dos procedimientos son válidos y arrojan los mismos resultados. Se invita al lector a resolver estos dos ejemplos con el otro método para verificar esta afirmación.

Volviendo al resultado que se obtuvo aquí,

$$n = 5.642592$$

Cuando el número de pagos o periodos es fraccionario, se pueden hacer dos cosas, ejemplificando con el resultado obtenido:

a) hacer cinco pagos de \$1 550 y un sexto pago menor
b) realizar cuatro pagos de \$1 550 y un pago final mayor

A saber:

a) Al cabo del quinto pago, el valor de todos los abonos (a su valor futuro) sería:

$$1\,550\frac{(1.0275)^5-1}{0.0275} = 8\,188.13$$

mientras que el valor del adeudo después de 5 bimestres sería:

$$8\,000(1.0275)^5 = 9\,162.19$$

Por lo tanto, el valor del adeudo final del quinto bimestre, inmediatamente después de efectuar el pago correspondiente sería:

$$9\,162.19 - 8\,188.13 = 974.06$$

El valor de esta cantidad un mes después sería:

$$974.06(1.0275) = 1\,000.84$$

cantidad que debería pagarse al cabo del sexto bimestre.

b) Si se hicieran cuatro pagos de \$1 550, su monto en el momento de hacer el cuarto pago sería:

$$1\,550\frac{(1.0275)^4-1}{0.0275}=6\,460.47$$

y el valor del adeudo:

$$8\,000(1.0275)^4=8\,916.97$$

El saldo al cuarto bimestre sería:

$$8\,916.97-6\,460.47=\$2\,456.50$$

Y al término del quinto bimestre sería necesario pagar:

$$2\,456.50(1.0275)=2\,524.05$$

para saldar completamente la deuda.

EJEMPLO 4.6.3

Con referencia al ejemplo anterior, observe que en *a*) y *b*) se encontró el pago final que es necesario hacer mediante la determinación del valor futuro (monto) tanto de los pagos como del adeudo.

En este ejemplo se mostrará que se obtienen los mismos resultados si se calculan sus correspondientes valores actuales. Para ilustrar esto se utilizará el caso *a*) en el que se decide hacer 5 pagos completos y un pago final menor.

El valor actual de los 5 pagos completos es:

$$1\,550\frac{1-(1+0.0275)^{-5}}{0.0275}=1\,550(4.612582)=7\,149.50$$

Y dado que el valor actual de la deuda es de \$8 000, el saldo de la operación, a su valor actual, es:

$$8\,000-7\,149.50=850.50$$

Saldo que, llevado a su valor después de 6 bimestres (que es cuando hay que hacer el último pago) es:

$$850.50(1.0275)^6=850.50(1.176768)=1\,000.84,$$

que es la misma respuesta que se obtuvo en el ejemplo anterior.

EJEMPLO 4.6.4

¿Cuántos pagos mensuales de \$45 000 serían necesarios para liquidar una deuda de \$2 000 000, contraída hoy con intereses de 30% anual convertible mensualmente?

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} C &= 2\,000\,000\\ R &= 45\,000\\ i &= 0.30/12=0.0250\\ n &= ?\end{aligned}$$

Los intereses que genera la deuda cada mes son:

$$\begin{aligned} &I=Ci\\ &I=2\,000\,000(0.0250)=50\,000\end{aligned}$$

La deuda no puede pagarse con mensualidades de \$45 000 porque lo que genera por concepto de intereses es superior. Por esto, para reducir el adeudo sería necesario pagar mensualidades por cantidades *superiores* a \$50 000.

EJEMPLO 4.6.5

Una persona desea acumular \$300 000. Para reunir esa cantidad decide hacer depósitos trimestrales vencidos en un fondo de inversiones que rinde 12% anual convertible trimestralmente. Si deposita \$5 000 cada fin de trimestre, ¿dentro de cuánto tiempo habrá acumulado la cantidad que desea?

SOLUCIÓN:
Observe que, como se trata de una cantidad (\$300 000) realizable a futuro, se está hablando de monto:

$$M = 300\,000$$
$$R = 5\,000$$
$$i = 0.12/4 = 0.03$$
$$n = ?$$

$$300\,000 = 5\,000\frac{(1.03)^n - 1}{0.03}$$

$$\frac{300\,000(0.03)}{5\,000} + 1 = (1.03)^n$$

$$2.8 = (1.03)^n$$
$$n \log 1.03 = \log 2.8$$
$$n = \frac{\log 2.8}{\log 1.03} = \frac{0.447158}{0.012837}$$
$$n = 34.83 \text{ trimestres, o sea}$$
$$34.83(3) = 104.5 \approx 105 \text{ meses}$$

Esa persona podría contar con los \$300 000 aproximadamente dentro de ocho años y nueve meses.

4.7 Tasa de interés

Para terminar este tema, se verán algunos ejemplos en los cuales lo que se busca es determinar la tasa de interés que se paga.

EJEMPLO 4.7.1

Lucero de la Mañana debe pagar hoy \$350 000. Como no tiene esa cantidad disponible, platica con su acreedor y acuerda pagarle mediante 6 abonos mensuales de \$62 000, el primero de ellos dentro de un mes. ¿Qué tasa de interés va a pagar?

SOLUCIÓN:

$$R = \$62\,000$$
$$C = \$350\,000$$
$$n = 6$$
$$i = ?$$

$$350\,000 = 62\,000\frac{1-(1+i)^{-6}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-6}}{i} = \frac{350\,000}{62\,000} = 5.645161$$

Como no es posible despejar i, se tiene que seguir un procedimiento de aproximación de dos pasos para encontrar su valor:

1. Ensayar valores de i en la expresión donde se encuentra:

$$i = \left(\frac{1-(1+i)^{-6}}{i} \right)$$

para encontrar dos valores de ella que estén cercanos a 5.645161, uno mayor y otro menor.

2. Interpolar entre los dos valores encontrados en el paso anterior para determinar el valor de i. Entonces, en primer lugar se ensayan los valores para

$$\frac{1-(1+i)^{-6}}{i}.$$

$$\text{Si } i = 0.02, \text{ entonces } \frac{1-(1+i)^{-6}}{i} = \frac{1-(1.02)^{-6}}{0.02} = 5.601431$$

que es bastante cercano al valor de 5.645161 que se busca. Se continúan ensayando valores para aproximar más. Cabe destacar que al disminuir la tasa de interés se incrementa el valor presente, y viceversa, al incrementarse la tasa de interés, disminuye el valor presente.

$$\text{Si } i = 0.017, \text{ entonces } \frac{1-(1.017)^{-6}}{0.017} = 5.658585$$

Este valor es mayor que el que se busca; ahora uno un poco menor, para lo cual se incrementa la tasa de interés.

$$\text{Si } i = 0.018, \text{ entonces } \frac{1-(1+.018)^{-6}}{0.018} = 5.639435$$

$$\text{Si } i = 0.0175, \text{ entonces } \frac{1-(1+0.0175)^{-6}}{0.0175} = 5.648998$$

Ahora ya se tienen dos valores muy cercanos al valor deseado, uno mayor y otro menor. El segundo paso es interpolar entre estos dos valores para determinar en forma más exacta la tasa de interés que se necesita.

El razonamiento es el siguiente:

- Se necesita encontrar el valor de i que haga que

$$\frac{1-(1+i)^{-6}}{i}$$

- sea igual a 5.645161, porque esta i es la que hace que se cumplan las condiciones planteadas en el ejemplo y es, por lo tanto, la i que se busca.
- Ya se determinó en el paso anterior que:

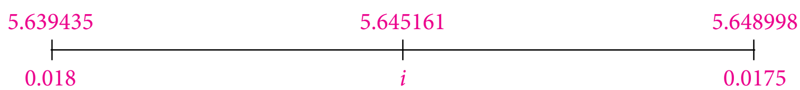
$$\text{si } i = 0.0175, \text{ entonces } \frac{1-(1.0175)^{-6}}{0.0175} = 5.648998$$

y que

$$\text{si } i = 0.018, \text{ entonces } \frac{1-(1.018)^{-6}}{0.018} = 5.639435\,.$$

De donde se concluye que la tasa i que se busca está entre 0.018 y 0.0175.

Para ilustrar el procedimiento se muestran las condiciones descritas en los párrafos anteriores mediante un diagrama:



Gráfica 4.4

Lo que se hará a partir de este diagrama para encontrar un valor más preciso de *i* es plantear una proporción y, para comprender mejor este procedimiento, se repasarán las relaciones existentes entre las cantidades que aparecen en el esquema anterior.

Puede calcularse:

5.648998 – 5.639435 = 0.009563 es la "distancia total" entre estas dos cantidades; 5.645161 – 5.639435 = 0.005726 es también la "distancia" que hay entre estas dos cantidades.

Y

$$\frac{5.645161-5.639435}{5.648998-5.639435}=\frac{0.005726}{0.009563}=0.59876608$$

lo que significa que 0.005726 (el numerador) representa aproximadamente 59.9% de la distancia total, y como esta proporción debe ser cierta también para la "distancia total" entre las tasas, entonces la tasa que se busca (vea la gráfica 4.4) debe ser igual a 0.018 *menos* 59.7% de la "distancia total" entre las tasas:

$$0.018 - 0.598766(0.018 - 0.0175) = 0.017700$$

Se puede verificar que esta tasa da una mejor aproximación del factor:

$$\frac{1-(1.0177)^{-6}}{0.0177}=5.645169$$

que es prácticamente igual al valor que se busca.

Por ello, entonces, la respuesta del ejemplo es que la persona pagará 1.77% mensual.

El procedimiento de interpolación se puede resumir de la siguiente manera:

$$\frac{5.645161-5.639435}{5.648998-5.639435}=\frac{i-0.018}{0.0175-0.018}$$

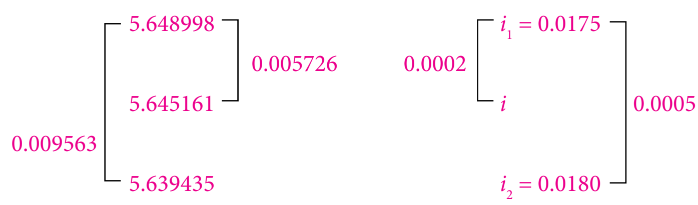
$$\frac{0.005726}{0.009563}=\frac{i-0.018}{-0.0005}$$

En esta expresión, 0.0005 es la "distancia total" entre las tasas, y lo que se hizo entonces fue igualar la proporción de distancias:

$$0.59876608=\frac{i-0.018}{-0.0005}$$

$$i - 0.018 = -0.0005(0.59876608)$$
$$i = 0.018 - (0.000299)$$
$$i = 0.017701$$

Este proceso de interpolación se puede visualizar gráficamente de la siguiente manera:



EJEMPLO 4.7.2

Dos almacenes, *A* y *B*, venden el mismo modelo de lavadora, al mismo precio de \$6 000.

A la vende a \$600 mensuales durante 12 meses, y *B*, mediante un pago de \$8 640 dentro de un año. Determine cuál es el plan más conveniente comparando las tasas anuales efectivas de las dos alternativas.

Solución:

a) Almacén *A*:

$$C = 6\,000$$
$$n = 12$$
$$i = ?$$
$$R = 600$$

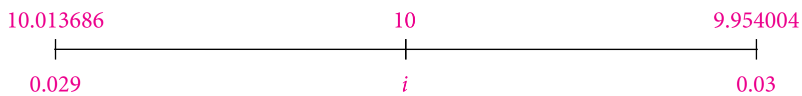
$$6\,000 = 600\frac{1-(1+i)^{-12}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-12}}{i} = \frac{6\,000}{600} = 10$$

Ensayando valores:

$$\text{Si } \; i = 0.05: \frac{1-(1.05)^{-12}}{0.05} = 8.863251$$
$$i = 0.06: \frac{1-(1.06)^{-12}}{0.06} = 8.383844$$
$$i = 0.04: \frac{1-(1.04)^{-12}}{0.04} = 9.385074$$
$$i = 0.03: \frac{1-(1.03)^{-12}}{0.03} = 9.954004$$
$$i = 0.025: \frac{1-(1.025)^{-12}}{0.025} = 10.257765$$
$$i = 0.029: \frac{1-(1.029)^{-12}}{0.029} = 10.013686$$

y,



Gráfica 4.5

$$\frac{10.013686-10}{10.013686-9.954004} = \frac{0.029-i}{0.029-0.030}$$
$$0.229315 = \frac{0.029-i}{-0.001}$$
$$-0.000229 = 0.029 - i$$
$$i = 0.029 + 0.000229$$
$$i = 0.029229$$

Ésta es la tasa efectiva mensual. La tasa efectiva anual es:

$$(1.029229)^{12} - 1 = 0.413006 = 41.30\%$$

b) Almacén *B*:

$$M = 8\,640$$
$$C = 6\,000$$
$$n = 1 \text{ año}$$
$$M = C(1 + i)$$
$$8\,640 = 6\,000(1 + i)$$
$$1 + i = \frac{8\,640}{6\,000} = 1.44$$
$$i = 1.44 - 1 = 0.44 = 44\%$$

Por ello, es más conveniente el plan del almacén *A*.

EJEMPLO 4.7.3

¿A qué tasa nominal convertible semestralmente se acumulan \$500 000 en el momento de realizar el último de 15 depósitos semestrales de \$10 000?

Solución:

$$M = 500\ 000$$
$$R = 10\ 000$$
$$n = 15$$
$$i = ?$$

$$500\ 000 = 10\ 000 \frac{(1+i)^{15} - 1}{i}$$

$$\frac{(1+i)^{15} - 1}{i} = \frac{500\ 000}{10\ 000} = 50$$

Al ensayar valores de i (altos, ya que es semestral):

$$i = 0.15 \qquad \frac{(1.15)^{15} - 1}{0.15} = 47.580411$$

$$i = 0.16 \qquad \frac{(1.16)^{15} - 1}{0.16} = 51.659505$$

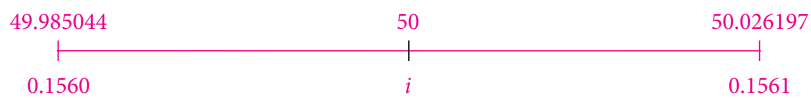
Afinando la aproximación:

$$i = 0.157 \qquad \frac{(1.157)^{15} - 1}{0.157} = 50.398200$$

$$i = 0.1560 \qquad \frac{(1.156)^{15} - 1}{0.156} = 49.985044$$

$$i = 0.1561 \qquad \frac{(1.1561)^{15} - 1}{0.1561} = 50.026197$$

Para interpolar:



Gráfica 4.6

$$\frac{50 - 49.985044}{50.026197 - 49.985044} = \frac{i - 0.1560}{0.1561 - 0.1560}$$

$$\frac{0.014956}{0.041153} = \frac{i - 0.1560}{0.0001}$$

$$0.363424(0.0001) = i - 0.1560$$
$$i = 0.1560 + 0.000036$$
$$i = 0.156036$$

Comprobando el resultado anterior:

$$\frac{(1.156036)^{15} - 1}{0.156036} = 49.99985 \text{ o, aproximando, } 50.$$

Por lo tanto, se requiere una tasa de $0.156036(2) = 0.312072$, 31.21% aproximadamente (nominal anual), para hacer que el monto de 15 pagos semestrales de \$10 000 sea \$500 000.

Ejercicios de las secciones 4.5 a 4.7

13. Una empresa contrata una deuda de $100 000 con un banco. Si éste carga a este tipo de préstamos 22% anual convertible mensualmente, ¿cuánto tendría que pagar mensualmente la empresa para saldar su deuda dentro de 15 meses?
14. El señor Luna adquirió una casa en condominio y acordó pagar, aparte de cierta cantidad mensual, anualidades de $95 000. Si acaba de realizar el trato hoy mismo, de manera que debe liquidar la primera anualidad exactamente dentro de un año, y decide hacer depósitos trimestrales en un fondo de inversión que paga 1% trimestral, ¿de cuánto tendrían que ser sus depósitos para poder acumular a fin de año la cantidad que necesita?
15. Una persona contrató una deuda que le obliga a pagar $150 000 el 1 de enero de cada uno de varios años. Como ahora se da cuenta de que le sería más fácil pagar mediante abonos trimestrales vencidos, ¿de cuánto tendrían que ser los pagos en el nuevo plan, si se considera un interés de 8% convertible trimestralmente?
16. Hoy es 15 de marzo. Dentro de 3 años, el 15 de noviembre, el primogénito del señor Mendoza cumplirá la mayoría de edad y desea regalarle una motocicleta que calcula costará en ese tiempo (dentro de 3 años) unos $80 000. Para adquirirla decide ahorrar una cantidad mensual en un instrumento bancario que rinde 0.35% mensual. Si la tasa de rendimiento no cambiara en ese tiempo, ¿cuánto tendría que ahorrar el padre cada mes para poder adquirir la motocicleta?
17. Para saldar un préstamo de $785 000 contratado hoy, el deudor acuerda hacer 5 pagos semestrales iguales y vencidos y, finalmente, un pago único de $300 000, 2 años después de realizado el último pago semestral. ¿De cuánto deberá ser cada uno de los pagos iguales, si el interés es de 25% capitalizable semestralmente?
18. El 12 de abril de este año, la señorita Soto deposita $20 000 en una cuenta bancaria que paga 0.5% bimestral de interés. Si comienza a hacer depósitos bimestrales iguales a partir del 12 de junio y acumula $130 238 inmediatamente después de realizar el depósito del 12 de diciembre del año siguiente, ¿de cuánto fueron sus depósitos?
19. La señora Jiménez desea vender un comedor que posee y que considera vale $35 000. Hay dos compradores interesados que le hacen ciertas propuestas:

    a) El comprador *A* ofrece pagarle 12 mensualidades vencidas de $3 100
    b) *B* ofrece pagarle 18 mensualidades vencidas de $2 250

    Con intereses a razón de 14.4% anuales convertibles mensualmente. ¿Cuál oferta le conviene más?
20. ¿En cuánto tiempo se acumularán $200 000 mediante depósitos bimestrales vencidos de $5 000 si se invierten a una tasa de 7% anual convertible bimestralmente?
21. Una deuda de $850 contraída hoy se va a liquidar mediante pagos trimestrales iguales y vencidos de $185. Si el interés es de 3.9% trimestral, calcule el número de pagos completos y el valor del pago final menor que se deben efectuar para saldar el compromiso.
22. Para pagar una deuda de $525 000 contraída hoy, se deben abonar mensualidades de $15 000 comenzando dentro de un mes. Si el interés que se cobra es de 27% capitalizable cada mes, determine el número de pagos iguales y el valor del pago final mayor que saldan la deuda.
23. El 12 de septiembre la doctora Gudiño adquiere un automóvil usado en $118 000. Acuerda pagarle al vendedor mensualidades vencidas de $4 148.53. Si se considera un interés de 16% anual convertible con la misma periodicidad que los pagos, ¿cuándo terminará de pagar?
24. Como beneficiario de un plan de jubilación, el señor Domínguez puede recibir $160 000 de inmediato o $40 000 ahora y el resto en pagos de $6 000 cada 3 meses. Si la compañía paga un interés de 6% anual convertible cada 3 meses:

    a) ¿Cuántos pagos completos recibirá el señor Domínguez?
    b) ¿Con qué cantidad adicional al último pago completo le liquidarán el total de su jubilación?

c) ¿Con qué pago final realizado 3 meses después del último pago de $6 000 le liquidarán el total?

25. Si un trabajador ahorra $100 mensuales en una cuenta de ahorros que paga 8% anual convertible mensualmente:

a) ¿En qué tiempo reunirá $1 000?

b) Si desea reunir esa cantidad en un periodo exacto de meses, ¿cuántos depósitos completos de $100 debe hacer, y de qué cantidad (mayor de $100) debe ser el último depósito para que al realizarlo haya reunido la cantidad precisa de $1 000?

26. El 8 de enero se pagó el último abono mensual vencido de $829.14. Con este abono se liquidó totalmente una deuda que ascendía a $7 500. Si la operación se pactó a 22.4% anual de interés convertible mensualmente:

a) ¿Cuándo se hizo el primer pago mensual?
b) ¿A qué plazo se pactó la operación?

27. ¿A qué interés se deben hacer depósitos semestrales de $1 000 para acumular $8 000 en 3 años?

28. Una deuda de $5 000, contraída hoy, se pagará mediante 5 abonos mensuales vencidos de $1 076.23. ¿A qué tasa nominal anual se debe pactar la operación?

29. Una persona adquirió, mediante 24 abonos quincenales de $280, un televisor que al contado costaba $5 250:

a) ¿Qué tasa nominal anual pagó?
b) ¿Qué tasa efectiva quincenal pagó?
c) Qué tasa efectiva anual pagó?

30. Un automóvil cuesta $238 150. Se vende con 50% de enganche y 6 mensualidades de $20 971.90. ¿Qué interés efectivo mensual se cobra?

31. En dos almacenes se vende el mismo modelo de cocina integral, con igual precio al contado: $ 9 995. Las condiciones del crédito son:

- El almacén “La Ganga” la vende mediante 8 mensualidades de $1 395.
- El almacén “La Bagatela” la vende a 12 mensualidades de $995.

a) ¿En qué almacén es más conveniente comprar la cocina?
b) ¿Qué diferencia existe entre las tasas mensuales efectivas que se aplican en los dos casos?

32. Ana Isabel desea adquirir una computadora, y para tomar la mejor decisión compara las alternativas que existen en el mercado:

a) La empresa “Rompeprecios” ofrece la computadora “Compacta” a sólo $22 995 u 8 pagos de $3 245.
b) La casa “Club de Precios” ofrece la misma computadora “Compacta” a $23 700 al contado o mediante 6 pagos de $3 950 sin intereses.

Si la tasa de interés del mercado es de 15%, ¿cuál alternativa es la mejor para Ana Isabel?

33. Juan Carlos está planeando sus próximas vacaciones. Encuentra la promoción de un banco que ofrece viajes todo incluido a destinos de playa mediante un enganche de $998.55 y 48 pagos semanales de $182.

a) ¿Cuál es el valor presente del viaje si el banco le carga un interés de 1.2% semanal?
b) ¿Cuánto debería ahorrar durante 48 semanas en una cuenta que paga 10% de interés anual convertible semanalmente si deseara pagar el viaje al contado y éste le costara $5 900?
c) ¿Qué le sugeriría usted a Juan Carlos?

4.8 Aplicaciones

Son muy abundantes las aplicaciones de las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas. Tal como se vio en algunos de los ejemplos de este capítulo, una aplicación harto común son los planes de compra de toda clase de bienes a crédito (automóviles, bienes raíces, aparatos electrodomésticos, etcétera).

Además, existen aplicaciones que son muy útiles en el tema de finanzas corporativas, en especial las que se utilizan en el tema de evaluación de proyectos de inversión. Cuando se analiza un proyecto de inversión, se realizan investigaciones de mercado, estudios técnicos y de riesgo, además de estudios económicos, en los que se incluyen análisis financieros que tienen relación con el rendimiento o utilidad que se espera obtener con el proyecto. Los tres métodos de evaluación financiera de proyectos de inversión que más comúnmente aparecen en los textos que tratan este tema[1] son el del valor actual neto (VAN), también conocido como valor presente neto (VPN), la tasa interna de retorno o tasa interna de rendimiento (TIR) y el periodo de recuperación.

Por lo general, esta evaluación financiera de proyectos de inversión se hace con base en los flujos de efectivo asociados al proyecto que se pueden agrupar en cuatro categorías básicas:

- Inversión inicial neta.
- Flujos de efectivo futuros, producto de la operación del proyecto.
- Flujos de efectivo no operativos como, por ejemplo, los que se requieren para una reparación importante.
- Valor neto de recuperación, que es el valor al que se pueden vender, al término del proyecto, los activos de valor considerable que pudiera haber sido necesario adquirir como parte del proyecto.

A continuación se explican varios ejemplos de los tres métodos de evaluación de proyectos de inversión.

4.8.1 Valor actual neto

El valor actual neto de un proyecto de inversión es el valor actual de todos los flujos de efectivo relacionados con el proyecto. En otras palabras, es el valor presente de todos sus costos (egresos) y sus ingresos, desde su principio y hasta su terminación. Esta situación se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4.8.1

Suponga que se planea comprar un edificio para remodelarlo y venderlo para obtener una utilidad. Su precio es de $4 200 000 y se requeriría invertir $3 000 000 más para renovarlo, durante los seis meses siguientes, a razón de $500 000 cada mes. Al cabo de los seis meses se calcula que se le podría vender en $9 100 000. ¿Es ésta una inversión atractiva desde el punto de vista financiero? Se ilustra en seguida cómo se contesta esta pregunta utilizando el criterio del valor actual neto.

Para calcular el VAN se utiliza una tasa que se conoce como el *costo de capital*,[2] cuya determinación puede ser complicada, pero, si se utiliza como costo del capital simplemente la tasa de

[1] Vea, por ejemplo, Emery, Douglas R., *Administración financiera corporativa*, Prentice Hall, México, 2000; Gallagher, Timothy J., *Administración financiera*, Colombia, 2001; o Ross, Stephen A., Westerfield, Randolph W., y Jaffe, Jeffrey F., *Finanzas corporativas*, Irwin, España, 1995; Brealey, Scott y Brigham, Eugene F., *Fundamentos de administración financiera*, 12a. ed., McGraw–Hill/Interamericana de México, 2001.

[2] El costo del capital corresponde a la retribución que reciben los inversionistas por proveer recursos financieros a la empresa, es decir, el pago que obtienen tanto acreedores (proveedores, bancos, acreedores bursátiles, acreedores diversos), como accionistas. Los acreedores reciben intereses a cambio de proveer fondos a la empresa en forma de deuda; los accionistas reciben dividendos a cambio del capital que aportan en su empresa.

Ahora bien, para evaluar el costo del capital, es necesario determinar el precio de los recursos financieros aportados, el cual se mide en términos de tasa. El costo del capital sería entonces la tasa que se paga por los recursos financieros aportados a la empresa. Sin embargo, hay dos tipos de recursos (deuda y capital propio), cada uno con su tasa. El costo del capital sería por lo tanto similar al promedio de los costos de la deuda (intereses) y del capital propio (dividendos), es decir, similar al promedio ponderado de ambas tasas.

interés que se tendría que pagar si se obtiene dinero en préstamo de algún banco, se podría fijar ese costo de capital en, por ejemplo, 18% anual, capitalizable mensualmente. Con esos elementos, el valor actual neto de este proyecto de inversión se calcula como sigue:

$$VAN = \underbrace{-4\,200\,000}_{\boxed{\text{Costo de compra}}} \underbrace{-\,500\,000\frac{1-(1.015)^{-6}}{0.015}}_{\boxed{\text{Valor actual de desembolsos mensuales}}} \underbrace{+\,9\,100\,000(1.015)^{-6}}_{\boxed{\text{Valor actual de venta del inmueble}}}$$

En la expresión anterior, el primer término del lado derecho es el costo de compra del edificio, el segundo es el valor actual de los seis desembolsos mensuales para remodelarlo (bajo el supuesto de que se realizan al final de cada mes) y, finalmente, el tercer término es el valor actual del efectivo que se obtiene con la venta del inmueble. Observe los signos negativos de los desembolsos y el signo positivo de los ingresos y que todas las cantidades están dadas a valor presente.

Este valor actual neto es:

$$VAN = -4\,200\,000 - 500\,000\frac{1-0.914542}{0.015} + 9100\,000(0.9145422) =$$
$$= -4\,200\,000 - 2\,848\,593.5 + 8\,322\,333.95 = \$1\,273\,740.37$$

Por lo tanto, como el valor presente neto es positivo, el proyecto es atractivo en términos financieros. En otras palabras, si en las condiciones de mercado prevalecientes se puede considerar razonable un costo de capital de 18% anual convertible mensualmente, conviene realizar este proyecto de inversión y, si no hay alteraciones a lo estimado, se podría esperar obtener una utilidad neta de $1 273 740.37, a valor actual. Esto es, si el inversionista pidiera prestado todo el dinero que requiere para adquirir y remodelar el inmueble, al venderlo podría liquidar el capital que obtuvo en préstamo y los intereses correspondientes, pero además le quedaría dicha ganancia a valor actual.

Es necesario resaltar que el criterio para decidir si se emprende o no el proyecto debe basarse en el carácter del VAN, es decir, si es positivo o negativo.

El criterio para decidir si se lleva a cabo o no un proyecto, de acuerdo con el valor actual neto es el siguiente:

Valor actual neto	Decisión
Positivo	Llevar a cabo el proyecto
Negativo	No llevar a cabo el proyecto

4.8.2 Tasa interna de rendimiento (TIR)

La TIR es la tasa a la cual el valor actual de los ingresos del proyecto es igual al valor actual de los egresos. El criterio para tomar decisiones con base en este método es emprender el proyecto cuando la TIR sea superior al costo de capital, que es, expresado en forma sencilla, un promedio ponderado de los costos de todos los fondos con los que opera una organización, principalmente capital y deuda.

EJEMPLO 4.8.2

Con el mismo ejemplo anterior, el planteamiento sería como sigue:

$$\underbrace{\underbrace{4\,200\,000}_{\text{Costo de compra}} + \underbrace{500\,000\frac{1-(1+TIR)^{-6}}{TIR}}_{\text{Valor actual de desembolsos mensuales}}}_{\text{Egresos}} = \underbrace{\underbrace{9\,100\,000(1+TIR)^{-6}}_{\text{Valor actual de venta del inmueble}}}_{\text{Ingresos}}$$

Del lado izquierdo se encuentran los egresos y del lado derecho los ingresos. Por su parte, la TIR se encuentra cuando se resuelve esta ecuación, empezando por simplificarla hasta donde sea posible:

$$91(1+TIR)^{-6} - 5\frac{1-(1+TIR)^{-6}}{TIR} = 42$$

Se puede resolver esta ecuación mediante ensayo y error, con una calculadora mediante interpolación, como se ilustró en la sección 4.7, para encontrar su valor de 0.05172837, que es la tasa interna de rendimiento mensual, ya que los flujos de efectivo están planteados en meses. La TIR anual sería:

$$TIR = 1.051728^{12} - 1 = 0.831, \text{ u } 83.16\%$$

Como esta tasa es (considerablemente) superior al costo de capital, entonces, de acuerdo con el criterio de la TIR, el proyecto se debe llevar a cabo.

Sin embargo, debido a que el método manual de ensayo y error (con calculadora) es muy laborioso, se reserva la resolución para la sección siguiente, en donde se ilustra el procedimiento para resolverlo mediante la función de Excel que se denomina, precisamente, TIR, que lo simplifica de manera considerable.

En este punto, vale la pena hacer notar que estos dos primeros métodos que se ejemplificaron pueden ser equivalentes en algunos casos, como cuando se trata de proyectos independientes, en los que la selección de un proyecto no depende de la selección de otros proyectos y son también equivalentes en casos de proyectos convencionales en los que existen desembolsos iniciales en efectivo y una serie de flujos futuros (de ingresos y egresos), también en efectivo, como en el ejemplo que se presentó antes.

Sin embargo, cuando los proyectos que se evalúan no son independientes, sino que uno depende del otro, estos dos criterios de evaluación no son equivalentes. Tampoco se les puede aplicar indistintamente a casos en los que se evalúan proyectos de distinto tamaño o proyectos cuyos flujos de efectivo son considerablemente diferentes, por ejemplo, cuando uno de ellos ofrece flujos de ingresos sólo hacia el final del proyecto y el otro los promete durante toda la vida del plan, porque en estos casos intervienen también cuestiones relacionadas con las necesidades de flujo de caja de la empresa, entre otras.

Los detalles de estas consideraciones escapan del alcance de este texto por lo que, para ahondar en ellos, se sugiere consultar algunas de las obras mencionadas en la nota de pie de la página 139 o en algún otro relacionado con el tema.

4.8.3 Periodo de recuperación de la inversión

El periodo de recuperación de la inversión puede ser simple o ajustado. El primero se calcula simplemente sumando todos los flujos de efectivo esperados (sin tomar en cuenta el tiempo en el que se realizan o, en otras palabras, sin considerar las diferencias de valor en diferentes tiempos), progresivamente, hasta que la suma iguale al desembolso inicial. *La diferencia entre este momento y el momento en el que se inicia el proyecto es lo que se conoce como periodo de recuperación de la inversión.*

Este método puede ser de utilidad como información adicional para evaluar algunos proyectos específicos pero, como no toma en cuenta el valor del dinero en el tiempo, carece de interés en este texto de matemáticas financieras, por lo que se deja su análisis hasta aquí.

Por su parte, el *periodo de recuperación de la inversión ajustado* sí toma en cuenta el valor del dinero en el tiempo. Para determinarlo, se calcula el valor actual de cada uno de los flujos de ingresos esperados en el futuro y se suman progresivamente hasta que la suma iguale el desembolso inicial. Dado que toma en cuenta la pérdida del valor que sufre el dinero por el transcurso del tiempo, proporciona una medida más acertada del riesgo involucrado en un proyecto de inversión. Se ilustra su aplicación en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.8.3

De regreso al proyecto de inversión en un edificio por el cual se pagan $4 200 000, se invierten $500 000 al final de cada uno de seis meses para, finalmente, venderlo en $9100 000, también seis meses después, el periodo de recuperación es, claramente, seis meses, que es cuando se supone que se realiza la venta y, con ella, se recibe el pago.

Por otro lado, vale la pena hacer hincapié en que, en ocasiones, los flujos de efectivo pueden no estar conformados por cantidades que constituyan anualidades, como en los $500 000 mensuales, durante 6 meses, que se manejaron en los dos ejemplos anteriores. Por ello, se ilustra otro caso común en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.8.4

Este ejemplo está adaptado de un texto sobre proyectos de inversión.[3] Se evalúa un proyecto que implica una inversión inicial total de $360 millones de pesos, suma que incluye, entre otros conceptos, terreno, construcción, equipo, maquinaria y mobiliario. Se han estimado flujos anuales de ingresos de $160, $143, $170, $162, $154 y $147 millones de pesos, los cuales se determinaron restándole a los ingresos por ventas los costos de producción, los gastos fijos y los impuestos, y a los que, por otro lado, se les sumaron las depreciaciones. Es necesario determinar la decisión que se debe tomar mediante los tres métodos de evaluación de proyectos de inversión que se han expuesto y utilizando 20% anual de costo de capital.

Solución:

I. De acuerdo con el método del periodo de recuperación

Como se invirtieron inicialmente $360 millones en el proyecto, es necesario determinar cuándo se recupera esta cantidad, a su valor actual, es decir, a la misma fecha (periodo) en la que se hizo el desembolso. Para hacer esta operación paso por paso, al final del primer año se tendría un ingreso de $160 (millones; en lo sucesivo, se ahorra la mención de los millones para abreviar la exposición), los cuales, a valor actual, serían:

$$VA1 = 160(1.2)^{-1} = \$133.33$$

Con esa cantidad, evidentemente, no se cubre el desembolso inicial. Ahora, al final del segundo año se obtiene un ingreso de $143 que, a valor actual, son:

$$VA2 = 143(1.2)^{-2} = \$99.31$$

con lo que se tiene un acumulado de valor actual de ingresos de $133.33 + 99.31 = $232.64, monto aún inferior a la cantidad que inicialmente se invirtió en el proyecto. A continuación, con los ingresos del tercer año, se tiene un nuevo valor actual de:

$$VA3 = 170(1.2)^{-3} = \$98.38$$

[3] Baca Urbina, Gabriel, *Evaluación de proyectos*, 3a. ed., McGraw-Hill, México, 1995, p. 198.

Ahora se tiene un total de ingresos del proyecto a valor actual de 133.33 + 99.31 + 98.38 = \$331.02, el cual tampoco es suficiente para recuperar la inversión inicial. Sin embargo, se observa que ya es una cantidad cercana a la inversión realizada para arrancar el proyecto (360) y se sabe que, si se suma el valor actual de los ingresos del cuarto año, $VA4 = 162(1.2)^{-4} = \$78.13$, se logrará un total de \$331.02 + \$78.13 = \$409.15, que ahora sí superará la inversión inicial, lo que indica que el periodo de recuperación está entre 3 y 4 años.

Para aproximar en forma sencilla el periodo de recuperación de esta inversión, se puede hacer una interpolación simple, de la siguiente manera:

$$\frac{360-331.02}{409.15-331.02}=\frac{x-3}{4-3}=x-3$$

$$x=3+\frac{28.98}{78.13}=3+0.37=3.37$$

Este resultado significa que la inversión inicial de \$360 millones se recuperaría en aproximadamente 3.37 años, o sea, también aproximadamente, en 3 años, 4 meses y 13 días, información que también sería útil para evaluar la conveniencia o inconveniencia de emprender el proyecto. Por otro lado, también es necesario mencionar que existen situaciones reales más complicadas que la planteada en este ejercicio y que requieren de aproximaciones más detalladas del periodo de recuperación de la inversión, pero el procedimiento básico se ilustra claramente en los cálculos anteriores.

II. De acuerdo con el método del valor actual neto

El valor actual neto se encuentra mediante la siguiente ecuación:

$$VAN = -360 + 160(1.2)^{-1} + 143(1.2)^{-2} + 170(1.2)^{-3} + 162(1.2)^{-4} + 154(1.2)^{-5} + 147(1.2)^{-6}$$

$$VAN = -360 + 133.333 + 99.305 + 98.38 + 78.125 + 61.889 + 49.23 = \$160.259$$

Por lo tanto, como el valor actual neto es positivo, este criterio de evaluación indica que se debe emprender el proyecto.

III. De acuerdo con el método de la tasa interna de rendimiento

Ahora, si se utiliza la TIR, para encontrarla es necesario resolver la siguiente ecuación:

$$360 = 160(1 + TIR)^{-1} + 143(1 + TIR)^{-2} + 170(1 + TIR)^{-3} + 162(1 + TIR)^{-4} + 154(1 + TIR)^{-5} + 147(1 + TIR)^{-6}$$

Resolver esta ecuación manualmente implicaría hacer ensayos con distintas tasas hasta encontrar la que la resuelve y que es TIR = 36.89%. Sin embargo, tal como se ilustra en la sección siguiente es mucho más fácil hacerlo con la función TIR de Excel.

Además, como esta TIR de 36.89 es superior al costo de capital, que es de 20%, se debe concluir que es conveniente emprender el proyecto.

4.9 Uso de Excel

En esta sección se resuelven algunos ejercicios utilizando funciones de Excel especialmente diseñadas para aplicarse a anualidades, en combinación con las capacidades normales de cálculo de esta hoja de trabajo. Las funciones que se aplican a las anualidades son:

- Monto o valor futuro (VF).
- Capital o valor actual (VA).
- Renta (PAGO).
- Plazo (NPER).
- Tasa de interés (TASA).
- Valor actual neto (VNA).
- Tasa interna de rendimiento (TIR).

En las subsecciones siguientes se explican aplicaciones de cada una de ellas.

4.9.1 Monto o valor futuro (VF) (sección 4.3)

La fórmula de Excel para calcular el monto, o valor futuro (VF) es:

VF(tasa;nper;pago;va;tipo),

en donde:

Tasa: es la tasa de interés por periodo.
Nper: es el número total de periodos de pago.
Pago: es el pago que se efectúa cada periodo.
Va: es el capital o valor actual total de una serie de pagos futuros.

Tasa, Nper y Pago son los tres valores que se requieren para calcular el monto de la anualidad; sin embargo, Excel permite la posibilidad determinarla conociendo el valor actual (Va); por ello, si se anota el valor del pago, no se requiere Va y, a la inversa, si se incluye el valor actual se debe omitir el pago. Esta cuestión se ilustra más adelante.

Tipo: se puede anotar (es un valor optativo, no obligatorio) un número 0 o 1 que indica cuándo vencen los pagos. Si se anota 0 se calcula el monto de una anualidad vencida (que es el caso que se estudia en esta sección); como es un parámetro optativo, si se omite, el monto se calcula para una anualidad vencida. Si se anota un 1, entonces se calcula como una anualidad anticipada (este caso se estudia en el capítulo 5).

En el ejemplo 4.3.1 se considera una anualidad de $100 000, durante seis meses y con una tasa de 0.05% mensual. Entonces, si se introduce

=VF(0.005,6,–100000)

en alguna celda de una hoja de trabajo de Excel, se obtiene como resultado $607 550.19, que es igual a los $607 550.19 que se obtuvieron en el texto.

Es importante observar que en la fórmula anterior se anotaron "–100 000", una cantidad negativa, porque Excel considera salidas de capital (cantidades negativas) a los pagos. Aunque esta cuestión no parece tener mucho sentido en estos ejemplos, es un procedimiento estándar en Excel y se aprecia mejor su utilidad en las funciones como la de la Tasa interna de rendimiento (TIR) en la cual se consideran flujos de efectivo tanto de entrada (+) como de salida (–). Se ven ejemplos de esta función de Excel en la sección 4.9.6 de "Aplicaciones".

Ahora, sabemos que el valor actual, o capital, de un monto de $607 550.19, seis meses antes, con un interés de 0.5% mensual es de:

$$C = 607550.19(1.005)^{-6} = 607550.19(0.970518) = \$589638.44$$

Y, entonces, si se introduce la fórmula siguiente de Excel,

=VF(0.005,6,,–589638.44).

Se obtiene $607 550.15, que es el monto correspondiente. Observe que, en la fórmula anterior de Excel, hay una doble coma después del número 6, lo cual indica que se omitió el valor de la renta mensual y que el valor actual se considera como una salida de capital y, por ello, se le anota con signo negativo.

Es importante observar que esta forma de utilizar la fórmula del valor futuro o monto de Excel equivale a aplicar la fórmula del monto a interés compuesto de una cantidad (fórmula (3.3) del capítulo 3), o

$$M = C(1 + i)^n = 589\,638.44(1.005)^6 = \$607\,550.19$$

En el ejemplo 4.3.2 se busca el monto de $20 000 semestrales, depositados durante 4 años y medio a 12% capitalizable semestralmente. En Excel:

=VF(0.06,9,–20000) produce el valor de $229 826.32, que es el mismo que se obtuvo en el texto.

En el ejemplo 4.3.3 se tiene $R = 100$, $n = 216$, $i = 0.0075$ en los primeros 6 años (72 meses) e $i = 0.02$ en los últimos 12 años (144 meses). El planteamiento completo en Excel es el siguiente:

=(VF(0.0075,72,–100)*(1.01^144))+VF(0.01,144,–100)

que arroja $71 719.95 que es igual al resultado que se obtuvo en el texto.

En la fórmula anterior, la primera parte, VF(0.0075,72,–100), es el monto de los primeros 72 depósitos (erogaciones) de $100 a una tasa de 0.75% que, multiplicado por (1.01^144), da el monto de estos primeros depósitos al final del periodo. Si a esto se le suma el monto de los últimos 144 meses de depósitos, VF(0.01,144,–100), se tiene el resultado deseado.

4.9.2 Capital o valor actual (VA) (sección 4.4)

La fórmula para calcular el valor actual con Excel es:

VA(tasa;nper;pago;vf;tipo)

en donde

Tasa: tasa de interés por periodo.
Nper: número total de periodos de pago.
Pago: pago que se efectúa cada periodo.
Vf: es el monto o valor futuro total de una serie de pagos futuros.

Tasa, Nper y Pago son los tres valores que se requieren para calcular el valor actual de la anualidad; sin embargo, Excel permite la posibilidad de calcular el valor actual de la anualidad conociendo el monto (Vf); por ello, si se anota el valor del pago, no se requiere Vf y, a la inversa, si se incluye el monto se debe omitir el pago. Ya se ilustró esta cuestión para el cálculo del monto y se ilustra para el caso del valor actual más adelante.

Tipo: Al igual que para el cálculo del monto o valor futuro, se puede anotar (es un valor optativo, no obligatorio) un número 0 o 1 que indica cuándo vencen los pagos. Si se anota 0 se calcula el monto de una anualidad vencida (que es el caso que se estudia en esta sección); como es un parámetro optativo, si se omite, el monto se calcula para una anualidad vencida. Si se anota un 1, entonces se calcula como una anualidad anticipada (este caso se estudia en el capítulo 5).

En el ejemplo 4.4.1 se tienen siete rentas trimestrales de $4 500, con una tasa de 9% trimestral y se busca el valor actual o capital. Entonces, en Excel:

=VA(0.09,7,– 4500)

que produce el resultado de $22 648.29, prácticamente igual al que se obtuvo antes.

Ahora, de lo que ya se estudió sobre interés compuesto, se sabe que el valor futuro de estos $22 648.29, siete trimestres después, a una tasa de 9% trimestral, es:

$$M = 22\,648.29(1.09)^7 = 22\,648.29(1.828039) = 41\,401.96$$

Además, conociendo este valor, se puede obtener el valor actual con Excel mediante la siguiente fórmula:

=VA(0.09,7, – 41401.96)

Y, al igual que sucedió con la fórmula del monto o valor futuro, esta forma de utilizar la fórmula del valor actual (capital) de Excel equivale a aplicar la fórmula del valor actual de una cantidad que se vio en el capítulo 3 (fórmula (3.6)), o

$$C = M(1 + i)^{-n} = 41\,401.96(1.09)^{-7} = 22648.29$$

En el ejemplo 4.4.2 se busca el valor actual de una renta de $1 000 al final de cada 3 meses durante 5 años a una tasa de 16% anual convertible trimestralmente. En Excel:

=VA(0.04,20,–1000)

que produce el resultado que ya se encontró de $13 590.33.

En el ejemplo 4.4.3 se encuentra con Excel el valor del inciso *b*) ($130 000 de enganche y 12 mensualidades de $12 000 a 1.5% mensual) con la siguiente función:

=130000+VA(0.015,12,–12000)

que produce $260 890.06, cantidad que, comparada con los $260 000 del precio al contado conduce a la conclusión de que es mejor comprar al contado.

En el ejemplo 4.4.4 se busca el precio que se pagó por un aparato por el que se abonaron $1 400 de enganche, 7 pagos mensuales vencidos de $160 y un pago final al octavo mes de $230, con tasa de 27% anual capitalizable mensualmente. Con Excel:

=1400+VA(0.27/12,7,–160)+(230*((1+0.27/12)^(–8)))

que produce el mismo resultado que aparece en el texto, $2 618.14.

Se ilustra, en este caso, que es posible plantear las funciones de Excel con alguna operación, lo cual ahorra la necesidad de hacerla antes de plantear la función. Además, la tasa es de 27% anual capitalizable mensualmente, y se pudo haber realizado la división de 0.27/12 = 0.0225 para obtener la tasa mensual y anotar este valor en la función de Excel. Sin embargo, también se puede anotar la tasa como se hizo aquí, simplemente planteando la operación: "0.27/12", con lo que Excel trabaja con el resultado.

En el ejemplo 4.4.5 se busca el valor actual de un refrigerador por el que se pagaron 52 abonos semanales "chiquititos" vencidos de $240 con interés de 15% anual convertible semanalmente. Con Excel:

=VA(0.15/52,52,–240)

que produce el resultado de $11 573.63, que es prácticamente igual a los $11 573.52 que se encontraron en el texto (la pequeña diferencia se debe a los redondeos).

El ejemplo 4.4.6 trata sobre el mismo refrigerador del ejemplo anterior, pero se paga un primer abono inmediatamente (que correspondería a un enganche) y 51 pagos semanales de $240, con tasa de 15% convertible semanalmente. El valor actual de este aparato es, con Excel:

=240+VA(0.15/52,51,–240)

Esta fórmula que produce el valor de $11 607.02, que es prácticamente igual al que se determinó en el texto.

4.9.3 Renta (sección 4.5)

Para calcular la renta o pago periódico de una anualidad se utiliza la siguiente función de Excel:

PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)

En esta función, al igual que con las anteriores, "vf", el valor futuro y "tipo" son parámetros optativos. Además, también igual que antes, si se anota el valor futuro en la función, se debe omitir el valor actual y, si se omite el tipo, Excel hace los cálculos para determinar una anualidad vencida.

En el ejemplo 4.5.1 se desea calcular la renta que se debe pagar para comprar una computadora que cuesta $19 750 a pagar en 4 mensualidades con una tasa de 1.8% mensual:

=PAGO(0.018,4,–19750),

que arroja el resultado que se busca, $5 161.67.

En el ejemplo 4.5.2 se quiere saber cuánto debe invertir una persona al final de cada mes, durante 7 años, para acumular $100 000, a una tasa de 13.5% anual convertible mensualmente. La siguiente función de Excel arroja el resultado que se busca, $721.49:

=PAGO(0.135/12,7*12,,–100000)

Observe de nuevo en esta función que el valor de $100 000 aparece con signo negativo, con lo que el resultado de $721.49 aparece como positivo; si se cambia el signo a los $100 000, el pago resultante aparece con signo negativo. Por otra parte, las operaciones tanto de la tasa como del número de periodos están planteados en términos de las operaciones, "0.135/12" y "7*12", lo cual evita la necesidad de hacer operaciones antes de introducir los datos a la fórmula. Además, hay una doble coma después del 12, lo cual indica, a la vez, que se omite el valor actual y que la cantidad que sigue, los $100 000, son un monto o valor futuro.

En el ejemplo 4.5.3 se trata de determinar la renta mensual, con intereses de 25% anual convertible mensualmente, que sustituya una renta anual de $3 000. Con Excel:

=PAGO(0.25/12,12,,3000) se obtiene el pago de $222.63, con signo negativo.

4.9.4 Plazo (sección 4.6)

La función de Excel que calcula el número de pagos de una anualidad es:

NPER(tasa; pago; va; vf; tipo)

Y, al igual que con la función anterior, el monto o valor futuro, "vf", y el tipo de anualidad son parámetros optativos.

En el ejemplo 4.6.1 se quiere determinar el número de pagos de \$607.96 que se deben hacer para pagar una lavadora que cuesta \$8 500, dando un enganche de \$2 550 con interés de 24% anual capitalizable mensualmente. La fórmula de Excel:

=NPER(0.24/12,–607.96,8500–2550)

produce el resultado de $n = 11$ que se busca. Dos detalles importantes respecto a esta función: en primer lugar, evita hacer las laboriosas manipulaciones con logaritmos, como se ilustró en el texto y, por otro lado, algo que se debe tener presente es que, precisamente por la lógica de las operaciones, aquí es necesario poner los pagos con signo negativo porque, si no se hace así, se obtienen resultados erróneos.

En el ejemplo 4.6.2 se busca determinar cuántos pagos bimestrales vencidos de \$1 550 se deben hacer para saldar una deuda de \$8 000 pagadera hoy (valor actual) con interés de 2.75% bimestral. La fórmula:

=NPER(0.0275,–1550,8000)

produce el resultado de 5.642592, igual al que se encontró en el texto, 5.642592.

En el ejemplo 4.6.5, en el que se pregunta dentro de cuánto tiempo habrá acumulado \$300 000 una persona que hace depósitos trimestrales vencidos de \$5 000 a una tasa de 12% convertible trimestralmente. En este caso:

=NPER(0.12/4,–5000,,300000)

produce el resultado de 34.83 trimestres que se busca.

4.9.5 Tasa de interés (sección 4.7)

La función de Excel que calcula la tasa de interés de una anualidad es:

TASA(nper;pago;va;vf;tipo;estimar)

En ella vuelven a aparecer los parámetros que ya se han utilizado, "nper", número de periodos, "pago", la renta periódica, "va", el valor actual, todos ellos valores necesarios para los cálculos. Y como valores optativos, "vf", el valor futuro o monto, "tipo", el tipo de anualidad que, como se vio antes, si se omiten, se hacen los cálculos para anualidades vencidas y, si se anota un "1", se hacen los cálculos para anualidades anticipadas.

Finalmente, aparece un nuevo parámetro optativo ("estimar") que es el valor que Excel utiliza para arrancar como estimación inicial de la tasa. Como es un parámetro optativo, se puede omitir y, si no se le incluye, Excel empieza con 10% como estimación inicial. En general, lo más fácil es, por supuesto, no utilizar este parámetro.

En el ejemplo 4.7.1 se intenta determinar la tasa de interés involucrada en el pago de un valor actual de \$350 000 mediante 6 abonos mensuales de \$62 000. Con Excel:

=TASA(6,–62000,350000)

produce el resultado que se busca, 0.017700, igual al 0.017701 que se encontró en el texto.

Lo primero que resalta aquí es la *enorme* utilidad de esta función, dados los laboriosos cálculos que es necesario realizar si se hacen las operaciones en forma manual, con una calculadora (la resolución de este ejercicio requirió dos páginas y media en el texto).

En el ejemplo 4.7.2, el almacén *A* vende la lavadora que tiene precio de \$6 000 mediante 12 pagos mensuales de \$600. La tasa que se busca, que es de 0.02922931, de acuerdo a lo que se encontró mediante el proceso de ensayo y error, más interpolación, del texto, se encuentra fácilmente con Excel, usando la fórmula:

=TASA(12,–600,6000)

la cual produce el resultado de 0.029229 que es, de nuevo, prácticamente igual a la que se encontró en el texto. Para encontrar la tasa efectiva anual correspondiente a esta tasa mensual, se utiliza la siguiente operación en Excel:

= 1.029229^12–1, que da como resultado 0.413007, o 41.3% anual.

Por otra parte, para encontrar la tasa efectiva anual que se carga en el almacén *B*, con un pago final de $8 840, en Excel:

=(8640/6000–1)*100 produce la tasa de 44%, con lo que se llega a la conclusión de que conviene comprar en el almacén *A*.

Para encontrar la tasa nominal convertible semestralmente a la cual se acumulan $500 000 en el momento de realizar el 15o. depósito de $10 000 que plantea el ejemplo 4.7.3:

=2*TASA(15,–10000,,500000)

operación que da como resultado 0.312072, que es el mismo valor que se encontró en el texto.

4.9.6 Aplicaciones (sección 4.8)

En el ejemplo de los métodos de evaluación de proyectos de inversión se analizó la compra de un edificio en $4 200 000, seis erogaciones mensuales de $500 000 para remozar el edificio y un ingreso de $9 100 000 por la venta del inmueble al cabo de seis meses.

Excel tiene dos funciones específicas para calcular los dos criterios financieros de evaluación de proyectos —el valor actual neto y la tasa interna de rendimiento—, que se explican en seguida.

Valor actual neto

La función que calcula este valor en Excel tiene la siguiente sintaxis:

VNA(tasa;valor1;valor2; ...)

Es fácil observar que los parámetros que requiere son, en primer lugar, la tasa, a la que en finanzas se denomina formalmente “costo de capital” y las cantidades de ingresos y egresos, con signo positivo y negativo, respectivamente, en el orden exacto en el que se presentan. Para el ejemplo 4.8.1 del proyecto del edificio, la función sería:

=–42+VNA(0.18/12,–5,–5,–5,–5,–5,86)

Observe que se le quitaron cinco ceros (se les dividió entre 100 000) a todas las cantidades para simplificar los datos.

Ahora, con respecto a la fórmula anterior, en primer lugar, es necesario tener presente que, como los cálculos que hace Excel comienzan al final del primer periodo, cuando haya un movimiento de capital al principio de él (como los $4 200 000 que se pagan por el edificio), esa cantidad se debe plantear fuera del VNA, porque ya está dada a su valor actual. Además, en este caso se deben restar 42 porque fue una erogación. La tasa por periodo mensual es 0.18/15 = 0.015; se plantean sólo cinco erogaciones de 5(00,000) porque al final del sexto mes se gastaron otros 5(00,000) pero, a la vez se recibieron 91(00,000) por la venta del edificio, con lo que se tuvo un ingreso neto de 86(00,000).

La fórmula anterior produce el resultado de $12.73740369 que, multiplicado por 100 000 para volverlo a las unidades originales, da el valor de $1 273 740.37, que es exactamente el mismo valor que se obtuvo con el procedimiento de calculadora de la sección anterior aunque, por otro lado, se puede observar que esta función de Excel facilita considerablemente las operaciones.

Ahora, para resolver el ejemplo 4.8.4, sobre un proyecto de inversión con flujos de efectivo desiguales, se utiliza la siguiente forma de la función VNA:

=VNA(0.2,160,143,170,162,154,147)–360

la cual produce el valor de $160.26, que difiere ligeramente del valor que se encontró en la sección anterior, por diferencias en el redondeo. Y, al igual que antes, como el valor actual neto es positivo, este criterio de evaluación indica que se debe emprender el proyecto.

Tasa interna de rendimiento

Como se vio en la sección anterior, la tasa interna de rendimiento (TIR) es la que iguala, en un punto del tiempo, el total de los egresos al total de los ingresos. Con los datos del ejemplo anterior, que se ilustró como ejemplo 4.8.2, la siguiente ecuación plantea las circunstancias:

$$4\,200\,000 + 500\,000\frac{1-(1+TIR)^{-6}}{TIR} = 9\,100\,000(1+TIR)^{-6}$$

Si se simplifica, se tiene:

$$91(1+TIR)^{-6} - 5\frac{1-(1+TIR)^{-6}}{TIR} = 42$$

La función de Excel que permite resolver planteamientos de este tipo es, precisamente, la que se llama TIR y que tiene la siguiente sintaxis:

TIR(valores;estimar)

El parámetro "valores" se debe especificar como un rango de celdas de una hoja de Excel, en donde se listen, de arriba hacia abajo, en el orden en el que se presentan, los egresos y los ingresos del proyecto, mientras que el parámetro "estimar" se usa para dar un valor inicial a Excel para que realice los ensayos aproximativos para encontrar la tasa que se busca. Por lo general, no es necesario utilizar este parámetro, con lo que Excel arranca con una estimación inicial de la tasa de 10%. Sin embargo, si Excel no encuentra la tasa, partiendo de esta estimación inicial y después de 20 ensayos, aparece en la celda correspondiente el mensaje "#¡NUM!", el cual indica que no se encontró la tasa. En estos casos es necesario dar un valor al parámetro "estimar" más cercano al verdadero valor de la TIR, para que Excel lo pueda determinar en menos de esos 20 ensayos.

Para encontrar la TIR en el ejemplo del edificio, se podrían introducir los flujos de egresos e ingresos de la siguiente manera:

−42
−5
−5
−5
−5
−5
86

Y se anotaría la siguiente función en cualquier otra celda:

=TIR(A1:A7)

Esta forma específica de la función muestra que esos flujos estarían colocados en las celdas A1 hasta A7. Esta función arroja como resultado 0.051728, que sería, como se vio en el texto, la TIR mensual. Por su parte, la TIR anual sería:

$$TIR = 1.051728^{12} - 1 = 0.8317, \text{ u } 83.17\%$$

que, como es considerablemente superior al costo de capital, indica que sí se debe emprender el proyecto.

Ahora, para encontrar la TIR del proyecto de inversión planteado en la sección anterior como ejemplo 4.8.3, se colocan las correspondientes cantidades en 7 celdas, como de la A1 a la A7, como sigue:

−360
160
143
170
162
154
147

Y con la función

=TIR(A1:A7)

se obtiene el resultado de 36.89 que, como es superior al costo de capital de 20%, señala que es conveniente emprender el proyecto.

4.10 Resumen

En este capítulo se introdujo el concepto de anualidades: un conjunto de pagos iguales realizados a intervalos iguales.

Se mencionó que resulta conveniente identificar los diferentes tipos de ellas, clasificándolas de acuerdo con cuatro criterios:

- Tiempo: anualidades ciertas y anualidades contingentes.
- Intereses: simples y generales.
- Pagos: anualidades vencidas y anticipadas.
- Iniciación: inmediatas y diferidas.

La combinación de estas características da lugar a los diversos tipos de anualidades. Se explicaron las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas. Se derivaron las fórmulas para calcular su monto y su valor actual o capital, y se ilustraron diversos casos en los que fue necesario calcular esos dos conceptos, así como también el plazo, la renta y la tasa de interés.

Comprobación del capítulo

Si ha leído el capítulo completo, el lector debe:

- Identificar y explicar las diversas características que definen a los distintos tipos de anualidades.
- Identificar y plantear situaciones que pueden representarse mediante una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata.
- Plantear y resolver ejemplos de este tipo de anualidades.
- Resolver ejercicios y aplicaciones de anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas, utilizando la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®.

Términos y conceptos importantes

- Anualidad
- Anualidades:
  - anticipadas
  - ciertas
  - contingentes
  - diferidas
  - generales
  - inmediatas
  - simples
  - vencidas
- Monto
- Valor actual
- Renta
- Plazo
- Tasa de interés de una anualidad simple:
  - cierta
  - vencida
  - inmediata

Fórmulas importantes

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{4.1}$$

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{4.2}$$

Ejercicios complementarios

1. ¿Qué es una anualidad simple, contingente, vencida y diferida?
2. ¿Qué es una anualidad general, cierta, anticipada e inmediata?
3. ¿Cuál es el tipo más común de anualidad?
Explique qué clase de anualidad representan los planteamientos 4 a 8.
4. Una pensión vitalicia otorgada por un seguro de invalidez total, y que asigna cierta cantidad mensual.
5. Un depósito quincenal en una cuenta de ahorros que paga 5% capitalizable mensualmente.
6. Una persona subarrienda un negocio. El subarrendatario acuerda pagarle cierta cantidad diaria con 3% mensual capitalizable diariamente. ¿Qué renta equivale a $30 000.00 mensuales?
7. La adquisición de un departamento en condominio cuyo enganche se paga mediante 6 pagos bimestrales de $102 500. La entrega del inmueble tiene lugar al realizarse el sexto pago bimestral.
8. La compra a crédito de un automóvil. El interés que se carga es 2% mensual global, y los pagos se hacen cada mes.

   Las preguntas restantes se refieren a anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas.
9. ¿Cuál es el monto de 18 depósitos mensuales de $5 000 en una cuenta de inversión que paga 0.3% mensual?
10. ¿Cuál es el valor actual de 18 pagos mensuales de $5 000 si se consideran intereses de 0.3% mensual?
11. ¿Qué relación existe entre las preguntas 9 y 10? Exprésela en forma de ecuación.
12. La profesora Vélez ha retirado de su cuenta de inversiones 40 mensualidades de $3 275. Si la cuenta de inversiones rinde 4% convertible mensualmente, ¿cuánto tenía en su cuenta de inversiones un mes antes de realizar el primer retiro?

    (Desde que empezó a hacer los retiros no hizo ningún depósito).
13. El día 1 se depositaron $7 000 en una inversión que paga 7% convertible mensualmente. Además:

    a) Se depositaron, comenzando un mes después, $1 000 mensuales durante 1 año.
    b) Al final del mes 19 se depositaron $12 000.

    ¿Cuál es el monto de todas estas inversiones al final del mes 24?
14. Si se calculan intereses a razón de 12% anual convertible cada 2 meses, ¿qué pago único realizado dentro de 30 meses es equivalente a 15 pagos bimestrales de $8 500?
15. Si se desea obtener un rendimiento de 40% capitalizable mensualmente sobre una inversión riesgosa, ¿cuál es la cantidad máxima que debería invertirse en una operación que se espera pague $10 000 mensuales al final de cada uno de los 8 meses siguientes?
16. En una cuenta que rinde 0.25% mensual, se hicieron los siguientes depósitos:

    a) Cinco de $1 750 cada fin de mes, el primero al cabo de un mes.
    b) Ocho de $1 450 cada fin de mes, el primero de éstos al cabo de 4 meses.

    ¿Cuál es la cantidad que se ha acumulado en la cuenta al final del decimosegundo mes?
17. ¿Qué renta pagada durante cada uno de 12 bimestres es equivalente a un valor actual de $100 000, si se consideran intereses a una tasa de 0.4% bimestral?
18. ¿Qué renta pagada al final de cada uno de 9 meses permite acumular $10 000 al cabo del décimo mes, si se consideran intereses a razón de 7% convertible cada mes?
19. Si se vende un terreno en $228 000 al contado, o mediante 12 pagos semestrales iguales con 20% anual convertible semestralmente, ¿de cuánto serían los pagos en el plan a crédito?
20. Si se calcula que el enganche de un inmueble del tipo del que le gustaría adquirir al señor López será de $170 000 dentro de un año, ¿qué cantidad debería depositar cada mes en una inversión que rinde 3% convertible mensualmente?
21. El 12 de abril la señorita Pérez obtiene un préstamo de $30 000 que acuerda reembolsar mediante pagos iguales, cada mes. Comienza los pagos el 12 del mayo y hace el último el 12 de diciembre del año siguiente. Si se le cobran intereses de 1.8% mensual, ¿cuánto debe pagar cada mes?
22. Se deben pagar $78 500 el 23 de agosto del año próximo. Si hoy es 23 de febrero, ¿cuál debe ser el importe de los depósitos bimestrales a una cuenta de inversión que rinde 1% bimestral para tener el 23 de agosto del año siguiente, en el momento de realizar el último depósito, la cantidad que se debe pagar, y si el primer depósito se hace el 23 de abril de este año?
23. El 2 de enero se obtiene un préstamo de $324 000. Se va a pagar con 6 abonos mensuales iguales; el primero, el 2 de febrero, más $112 000 adicionales al último abono mensual. Si el interés acordado es de 18% convertible mensualmente, ¿cuál debe ser el importe de los pagos mensuales?
24. Un televisor se vende con las siguientes condiciones en dos tiendas:

    a) En la tienda *A* cuesta $7 500 al contado y se puede pagar mediante 12 mensualidades vencidas e iguales con intereses de 3% mensual;
    b) En la tienda *B* cuesta $ 8 000 al contado y se puede pagar mediante 12 mensualidades vencidas e iguales con intereses de 2.4% mensual.

Si se desea comprar el aparato mediante crédito, ¿en qué tienda conviene adquirirlo?

25. ¿En cuánto tiempo se acumulan $180 000 mediante depósitos semestrales de $9 816.50 en una inversión que rinde 0.7% mensual?
26. ¿En cuánto tiempo se acumulan $5 000 si se ahorran $200 mensuales y los ahorros ganan 0.8% mensual de interés?
27. ¿Cuántos pagos de $136 211.25 sería necesario hacer cada fin de año para liquidar una deuda de $450 000 si el interés es de 30% anual?
28. Rodolfo le vende a su hermana Silvia un departamento. El trato se formaliza hoy y se fija el valor del inmueble en $1 290 000 para dentro de un año, que es cuando se va a hacer el traslado de dominio. Para pagar, Silvia le entregará a Rodolfo abonos iguales mensuales de $25 000 y un pago final mayor que liquide totalmente la operación. ¿Cuántas mensualidades iguales deberá pagar, y cuál debe ser el importe del pago final mayor si acordaron un interés de 1.5% mensual? Silvia va a comenzar a hacer los pagos dentro de un mes.
29. Existen dos planes para la compra de un automóvil:

    a) Precio al contado $135 000 y mensualidades de $7 135.60 con una tasa de interés de 2% mensual, hasta terminar de pagar.

    b) Precio al contado $139 000, 30% de enganche y 18 mensualidades de $5 551.56.

    ¿Cuál de los dos planes de crédito conviene más?
30. ¿A qué interés efectivo anual se tendría que colocar una serie de 15 depósitos bimestrales vencidos de $13 840.44 para que en el momento de hacer el último depósito se acumulen $250 000?
31. Para pagar una deuda de $950 000 se abonan 7 mensualidades vencidas de $149 620.66. ¿Qué tasa nominal convertible mensualmente se cargó en la operación?
32. ¿A qué tasa efectiva bimestral se cobró un crédito de $42 000 si se cubrió mediante 18 pagos bimestrales vencidos de $3 371.88?
33. Un mueble fino se vende en $18 600 al contado, o a crédito, con un pago inicial de $1 860 y 6 abonos mensuales vencidos de $2 999. ¿Cuál es el interés nominal anual, convertible mensualmente, que se carga en la venta a crédito?
34. ¿Cuál será el monto que acumule Tatiana si realiza 14 depósitos catorcenales de $14 000 cada uno, en una cuenta de inversión que rinde 14% de interés anual nominal capitalizable cada 14 días?
35. Yuri desea ayudar a su mamá con los gastos del hogar y considera la posibilidad de adquirir una máquina de coser, la cual le ofrecen con un enganche de $506.23 y 24 abonos "facilitos" de $156. ¿Cuál es el precio al contado de la máquina, si el banco le cobra un interés de 4.5% mensual convertible quincenalmente?

Matemáticas en internet. Anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas

4.2 Tipos de anualidades

- En esta sección encontrará, entre otros temas de matemáticas financieras, el de anualidades.
  http://www.sectormatematica.cl/comercial.htm

4.3 Monto

- Teoría de la renta, casos y problemas 2 y 13.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/

4.4 Valor actual

- Conceptos y aplicaciones, anualidades ordinarias y anticipadas.
  http://www.gestiopolis.com/canales/financiera/articulos/no%2010/anualidades.htm
- Teoría de la renta, casos y problemas 6 y 11.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/

4.5 Renta

- Teoría de la renta, casos y problemas 1, 3, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 16 y 18.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/

4.7 Tasa de interés

- Teoría de la renta, casos y problemas 4, 5, 10 y 17.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/

CAPÍTULO

5

Anualidades anticipadas

TEMARIO

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

- Definir y explicar qué son las anualidades simples, ciertas, anticipadas e inmediatas (ASCAI)
- Plantear anualidades de este tipo
- Identificar situaciones que pueden representarse mediante ASCAI
- Resolver problemas de anualidades anticipadas que impliquen el cálculo de:
  - Monto
  - Valor actual
  - Renta
  - Plazo
  - Interés
  - Tasa de interés
- Resolver ejercicios y aplicaciones de anualidades anticipadas mediante el empleo de la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®

5.1 Introducción

Como se expuso en el capítulo anterior, las anualidades se clasifican de acuerdo con cuatro criterios:

Criterio	Tipo de anualidad
a) Intereses	Simples y generales
b) Tiempo	Ciertas y contingentes
c) Pagos	Vencidas y anticipadas
d) Iniciación	Inmediatas y diferidas

A partir de estas cuatro características se pueden presentar 16 tipos distintos de anualidades, de las cuales las más comunes son las simples, ciertas, vencidas e inmediatas (ASCVI), que se estudiaron en el capítulo anterior. Aunque hay varias maneras de resolver los otros 15 tipos de anualidades, para simplificar el análisis se acostumbra abordarlas a partir de las fórmulas ya vistas de las ASCVI.

Para analizar los tipos de anualidades que restan por revisarse, se les dividirá en cuatro grupos principales, que son el objeto de este capítulo y los siguientes:

- Anualidades anticipadas.
- Anualidades diferidas.
- Caso general de las anualidades.
- Anualidades contingentes.

Por lo tanto, en este capítulo se hablará de las anualidades anticipadas, que serán vistas en su caso simple (cuando el periodo de pago coincida con el de la capitalización), ya que el caso general se analiza en otro capítulo.

Además, dado que las anualidades contingentes se analizan también en otro capítulo, las anualidades anticipadas que se estudian en éste son el caso cierto, es decir, son aquellas en las que se conocen con certeza las fechas de los periodos.

Por ello, en este capítulo se verán:

- Anualidades simples, ciertas, anticipadas e inmediatas (ASCAI).

Y, como se observará en seguida, se hará mediante las fórmulas ya conocidas de las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas (ASCVI):

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{4.1}$$

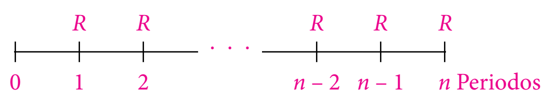
$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{4.2}$$

5.2 Monto y valor actual

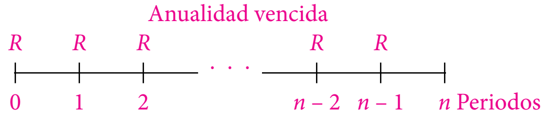
Revisando las características de estas anualidades, puede decirse que son:

- *Simples*, porque el periodo de pago corresponde al de capitalización.
- *Ciertas*, porque las fechas y los plazos son fijos y se conocen con anterioridad.
- *Anticipadas*, porque el inicio de los pagos o depósitos se hacen al principio de los periodos de pago y capitalización (por anticipado).
- *Inmediatas*, porque los pagos o depósitos se inician en el mismo periodo en el que se formaliza la operación.

Resulta útil comparar mediante diagramas las anualidades vencidas y las anticipadas para comprender mejor la diferencia:



Anualidad vencida



Anualidad anticipada

EJEMPLO 5.2.1

Un obrero deposita en una cuenta de ahorros \$250 al principio de cada mes. Si la cuenta paga 0.3% mensual de interés, ¿cuánto habrá ahorrado durante el primer año?

SOLUCIÓN:

Gráfica 5.1

Si se observa el diagrama puede apreciarse que al considerar los 12 depósitos de \$250 como si fuera una anualidad vencida (como si el inicio de plazo hubiera sido en el periodo −1), la aplicación de la fórmula del monto hace que se obtenga el valor de la anualidad en el periodo 11:

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 250\frac{(1.003)^{12} - 1}{0.003} = 250\frac{1.0366 - 1}{0.003}$$
$$M = 250(12.199993)$$
$$M = \$3\ 050$$

que sería el monto el 1 de diciembre del año, en el momento de hacer el último depósito. Pero como se busca el monto al final del plazo, es decir, un mes después, hay que calcular el valor de este monto al cabo de un mes, o

$$M = 3\ 050(1.003) = \$3\ 059.15$$

que es el monto que se busca.

Y la fórmula sería entonces:

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) \qquad (5.1)$$

EJEMPLO 5.2.2

Otra manera de resolver el ejemplo anterior:

$$n = 12 \qquad R = 250 \qquad i = 0.003$$

De nueva cuenta, si se considera que el plazo comienza en el periodo −1 y se calcula el monto de *13 (trece)* depósitos, se tendría el siguiente caso:

Gráfica 5.2

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

y

$$\frac{(1+i)^{13} - 1}{i} = \frac{(1.003)^{13} - 1}{0.003} = \frac{1.03971 - 1}{0.003} = 13.236593$$

que nos da el factor de acumulación de 13 depósitos, pero, como el último que se realiza al final del plazo (finales de diciembre), *no* está incluido en una anualidad anticipada y, además, está a su valor real en esa fecha, simplemente se resta al factor de acumulación para encontrar el valor que se busca:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \tag{5.2}$$

$$M = 250\left[\frac{(1.003)^{13}-1}{0.003}-1\right] = 250(13.236593-1)$$

$$M = 250(12.236593) = \$3\ 059.15,$$

que es el mismo valor que se encontró antes.

Este método es, pues, equivalente al anterior.

EJEMPLO 5.2.3

Encuentre el monto de 6 pagos semestrales anticipados de $14 500 si el interés es de 19% convertible semestralmente.

SOLUCIÓN:

$$n = 6$$
$$i = 0.19/2 = 0.095$$
$$R = 14\ 500$$

Método 1:

$$M = R\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i) = 14\,500\frac{(1.095)^6-1}{0.095}(1.095)$$

$$M = 14\ 500(7.618857)(1.095) = 14\ 500(8.342648)$$
$$M = 120\ 968.40$$

Método 2:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] = 14\,500\left[\frac{(1.095)^7-1}{0.095}-1\right]$$

$$M = 14\ 500(9.342648-1) = 14\ 500(8.342648)$$
$$M = 120\ 968.40$$

Observe entonces que:

$$\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i) = \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1$$

EJEMPLO 5.2.4

Un comerciante alquila un local para su negocio y acuerda pagar $2 750 de renta por anticipado. Como desea librarse del compromiso mensual de la renta, decide proponer una renta anual equivalente y también anticipada. Si se calculan los intereses a razón de 15.60% convertible mensualmente, ¿de cuánto deberá ser la renta anual?

SOLUCIÓN:

Éste es el caso del valor actual de una anualidad anticipada:

$$n = 12$$
$$R = 2\ 750$$
$$i = 0.1560/12 = 0.0130$$
$$C = ?$$

En un diagrama:

Gráfica 5.3

Observe que este caso se puede resolver calculando el valor actual de 11 rentas vencidas de $2 750 (las últimas rentas del año) y sumándole la primera renta, que ya está a su valor presente:

$$C = R + R\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}$$

$$C = 2\,750 + (2\,750)\frac{1-(1.013)^{-12+1}}{0.013}$$

$$C = 2\,750 + (2\,750)\frac{1-(1.013)^{-11}}{0.013}$$

$$C = 2\,750 + (2\,750)(10.188218)$$
$$C = 2\,750 + 28\,017.60$$
$$C = 30\,767.60$$

Observe que

$$C = R + R\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\text{, factorizando } R,$$

$$C = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right] \tag{5.3}$$

entonces,

$$C = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$C = 2\,750\left[1+\frac{1-(1.013)^{-12+1}}{0.013}\right]$$

$$C = 2\,750(1 + 10.188218)$$
$$C = 2\,750(11.188218)$$

$C = 30\,767.60$, que es la misma respuesta que se obtuvo antes.

EJEMPLO 5.2.5

Calcule el valor actual de 9 pagos semestrales de $50 000 con interés de 5.28% semestral:

a) Si se hacen por anticipado.
b) Si se hacen vencidos.
c) Determine y explique la diferencia entre *a*) y *b*).

Solución:

$C = ?$
$n = 9$
$R = 50\,000$
$i = 0.0528$

a) $$C = 50\,000\left[1+\frac{1-(1.0528)^{-9+1}}{0.0528}\right]$$

$$C = 50\,000(1 + 6.390684)$$
$$C = \$369\,534.20$$

b)
$$C = 50\,000\frac{1-(1.0528)^{-9}}{0.0528} = 50\,000(7.020027)$$
$$C = \$351\,001.35$$

c) $369\,534.20 - 351\,001.35 = \$18\,532.85$

Es mayor el valor actual de los pagos anticipados por $18 532.85, dado que los pagos se hacen antes y comienzan a generar intereses más pronto. Se puede ver que $18 532.87 son los intereses generados por $351 001.35 en un semestre (la diferencia de centavos se debe al redondeo).

$$351\,001.35(0.0528) = 18\,532.87$$

5.3 Renta, plazo, interés y tasa de interés

Cuando se desea conocer cualquiera de estos tres conceptos, se utilizan las fórmulas de las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas con las modificaciones que se introdujeron en la sección anterior.

EJEMPLO 5.3.1

En una tienda se vende una bicicleta por $1 800 al contado o mediante 5 abonos mensuales anticipados. Si el interés que aplica la tienda es de 32.4% convertible mensualmente, calcule el valor del pago.

Solución:

$$n = 5$$
$$i = 0.324/12 = 0.027$$
$$C = 1\,800$$
$$C = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right] \qquad \textbf{(5.3)}$$
$$R = \frac{C}{\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]} = \frac{1\,800}{1+\frac{1-(1.027)^{-5+1}}{0.027}}$$
$$R = \frac{1\,800}{1+\frac{1-0.898914}{0.027}}$$
$$R = \frac{1\,800}{1+\frac{0.101086}{0.027}}$$
$$R = \frac{1\,800}{4.743920}$$
$$R = \$379.43$$

EJEMPLO 5.3.2

La señora Gavaldón debe pagar $90 000 dentro de 2 años y, para reunir esta cantidad, decide hacer 12 depósitos bimestrales en una cuenta de inversión que rinde 1.2% bimestral de interés. ¿De cuánto deben ser sus depósitos si hoy realiza el primero?

SOLUCIÓN:

$$n = 12$$
$$i = 0.012$$
$$R = ?$$
$$M = 90\,000$$

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \quad \textbf{(5.2)}$$

$$R = \frac{M}{\dfrac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1} = \frac{90\,000}{\dfrac{(1.012)^{13}-1}{0.012}-1}$$

$$R = \frac{90\,000}{12.978447}$$

$$R = \$6\,934.57$$

EJEMPLO 5.3.3

En un almacén se vende un antecomedor por \$4 600 al contado, o mediante pagos mensuales anticipados de \$511.69. Si el interés es de 29.40% convertible mensualmente, ¿cuántos pagos es necesario hacer?

SOLUCIÓN:

$$C = 4\,600$$
$$n = ?$$
$$i = 0.2940/12 = 0.0245$$
$$R = 511.69$$

$$C = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right] \quad \textbf{(5.3)}$$

$$C/R = 1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}$$

$$(C/R-1)\,i = 1-(1+i)^{-n+1}$$

$$(Ci/R)-i = 1-(1+i)^{-n+1}$$

$$(1+i)^{-n+1} = 1+i-(Ci/R)$$

$$(-n+1)\log(1+i) = \log\left[1+i-(Ci/R)\right]$$

$$-n+1 = \frac{\log\left[1+i-(Ci/R)\right]}{\log(1+i)}$$

$$n-1 = -\frac{\log\left[1+i-(Ci/R)\right]}{\log(1+i)}$$

$$n = 1-\frac{\log\left[1+i-(Ci/R)\right]}{\log(1+i)} \quad \textbf{(5.4)}$$

$$n = 1-\frac{\log\left[1+0.0245-\dfrac{4\,600(0.0245)}{511.69}\right]}{\log(1.0245)}$$

$$n = 1-\frac{\log(1.0245-0.220251)}{\log 1.0245}$$

$$n = 1-\frac{\log(0.804249)}{\log(1.0245)}$$

$$n = 1 - \frac{-0.094609}{0.010512}$$

$n = 1 + 9$

$n = 10$, habría que hacer 10 pagos.

EJEMPLO 5.3.4

La señora Ramírez piensa jubilarse luego de reunir \$2 000 000 mediante depósitos mensuales de \$5 000 de las ganancias que obtiene de su negocio. Si invierte sus depósitos a una tasa de interés de 0.25% mensual e inicia a partir del día de hoy, ¿en cuánto tiempo reunirá la cantidad que desea?

SOLUCIÓN:

$$R = 5\,000$$
$$M = 2\,000\,000$$
$$i = 0.0025$$

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right] \qquad \textbf{(5.2)}$$

$$2\,000\,000 = 5\,000\left[\frac{(1.0025)^{n+1}-1}{0.0025} - 1\right]$$

$$\left[\left(\frac{2\,000\,000}{5\,000} + 1\right)0.0025\right] + 1 = (1.0025)^{n+1}$$

$$(1.0025)^{n+1} = 2.0025$$

$$(n+1)\ln(1.0025) = \ln 2.0025$$

$$n = \frac{\ln 2.0025}{\ln 1.0025} - 1 = \frac{0.694396}{0.002497} - 1 = 278.09 - 1$$

$$n = 277.09$$

Entonces, en 277 meses y aproximadamente 3 días reuniría lo que desea. La señora Ramírez deberá ahorrar poco más de 23 años para poder reunir su fondo de jubilación.

Como se vio en este ejemplo, cuando los valores conocidos sean el monto, el pago periódico y la tasa de interés de la anualidad anticipada, el valor de n se despeja de la fórmula (5.2).

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - \right. \qquad \textbf{(5.2)}$$

$$\frac{M}{R} = \left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - \right]$$

$$\frac{M}{R} + 1 = \left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}\right]$$

$$\left.\frac{M}{R} + 1\right]i = (1+i)^{n+1} - 1$$

$$\left. +1\right]i\Big] + 1 = (1+i)^{n+1}$$

$$(1+i)^{n+1} = \left[\left[\frac{M}{R} + 1\right]i\right] + 1$$

$$(n+1)\left[\log(1+i)\right] = \log\left[\left[\frac{M}{R} + 1\right]i\right] + 1$$

$$(n+1)=\frac{\log\left[\left[\frac{M}{R}+1\right]i\right]+1}{\log(1+i)}$$

$$n=\left[\frac{\log\left[\left[\frac{M}{R}+1\right]i\right]+1}{\log(1+i)}\right]-1 \qquad (5.5)$$

Si los valores conocidos se sustituyen en la fórmula (5.5) se tiene:

$$n=\left[\frac{\log\left[\left[\frac{2\,000\,000}{5\,000}+1\right]0.0025\right]+1}{\log(1+0.0025)}\right]-1$$

$$n=\left[\frac{\log\left[\left[400+1\right]0.0025\right]+1}{\log(1+0.0025)}\right]-1$$

$$n=\left[\frac{\log\left[\left[401\right]0.0025\right]+1}{\log(1+0.0025)}\right]-1$$

$$n=\left[\frac{\log 1.0025+1}{\log(1+0.0025)}\right]-1$$

$$n=\left[\frac{\log 2.0025}{\log(1.0025)}\right]-1$$

$$n=\left[\frac{\log 2.0025}{\log(1.0025)}\right]-1$$

$$n=\left[\frac{0.301573}{0.001084}\right]-1$$

$$n=\left[278.105614\right]-1$$

$$n=277.105614$$

En este caso, para su resolución, se utilizaron los logaritmos base 10 y, como puede observarse, el resultado es prácticamente el mismo que se obtuvo antes.

EJEMPLO 5.3.5

¿A qué tasa de interés anual 6 depósitos anuales anticipados de $25 000 equivalen a un valor actual de $75 000?

Solución:

$$C=75\,000$$
$$R=25\,000$$
$$n=6$$
$$i=?$$

$$C=R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$75\,000 = 25\,000\left[1+\frac{1-(1+i)^{-6+1}}{i}\right]$$

$$\frac{75\,000}{25\,000}-1=\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}$$

$$2=\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}$$

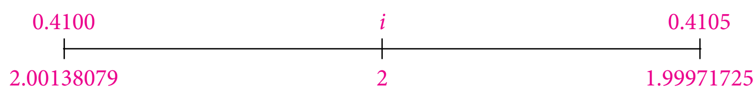
Al igual que se ha hecho antes, i se determina mediante un proceso de interpolación cuyo primer paso consiste en aproximarla mediante ensayos:

Si $i = 0.50$

$$\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}=1.73662551$$

$$\begin{aligned} i &= 0.40 && = 2.03516392\\ i &= 0.41 && = 2.00138079\\ i &= 0.411 && = 1.99805612\\ i &= 0.4105 && = 1.99971725 \end{aligned}$$

y, al interpolar



Gráfica 5.4

$$\frac{i-0.4100}{0.4105-0.4100}=\frac{2-2.00138079}{1.99971725-2.00138079}$$

$$\frac{i-0.4100}{0.0005}=\frac{-0.00138079}{-0.00166354}=0.83003114$$

$$i-0.4100 = 0.83003114(0.0005)$$

$$i-0.4100 = 0.00041502$$

$$i = 0.41041502$$

o aproximadamente 41.04% anual.

EJEMPLO 5.3.6

¿A qué tasa de interés anual 15 depósitos anuales anticipados de \$800 acumulan un monto de \$200 000?

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} M &= 200\,000\\ n &= 15\\ R &= 800\\ i &= ? \end{aligned}$$

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \qquad \text{(5.2)}$$

$$200\,000 = 800\left[\frac{(1+i)^{16}-1}{i}-1\right]$$

$$\frac{200\,000}{800}+1=\frac{(1+i)^{16}-1}{i}$$

$$251=\frac{(1+i)^{16}-1}{i}$$

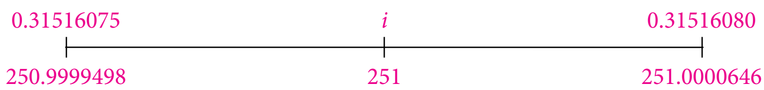
Al ensayar valores:

Si $i = 0.30$

$$\frac{(1+i)^{16}-1}{i} = 218.4722031$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{si } i = 0.30 & \dfrac{(1+i)^{16}-1}{i} & = 218.4722031 \\
i = 0.35 & & = 344.8969512 \\
i = 0.32 & & = 262.3556798 \\
i = 0.31 & & = 239.4234901 \\
i = 0.315 & & = 250.6311670 \\
i = 0.3155 & & = 251.7799928 \\
i = 0.3152 & & = 251.0900760 \\
i = 0.31515 & & = 250.9752711 \\
i = 0.31516 & & = 250.9982280 \\
i = 0.315161 & & = 251.0005238 \\
i = 0.3151605 & & = 250.9993759 \\
i = 0.3151608 & & = 251.0000646 \\
i = 0.31516075 & & = 250.9999498
\end{array}
$$

E, interpolando



Gráfica 5.5

$$\frac{i-0.31516075}{0.31516080-0.31516075} = \frac{251-250.9999498}{251.0000646-250.9999498}$$

$$\frac{i-0.31516075}{0.00000005} = \frac{0.0000502}{0.0001148} = 0.43728223$$

$$i - 0.31516075 = 0.43728223(0.00000005) = 0.00000002$$

$$i - 0.31516075 = 0.00000002$$

$$i = 0.31516075 + 0.00000002$$

$$i = 0.31516077$$

o 31.52%, aproximadamente.

Verificando:

$$800\left[\frac{(1.31516077)^{16}-1}{0.31516077}-1\right] = 200\,000$$

En este ejemplo la aproximación fue tan prolongada mediante los ensayos porque las cifras del monto y el plazo eran grandes; si no se hubiera hecho la aproximación tan detallada, el error debido a la interpolación sería considerable.

Debe destacarse el monto tan grande que se obtiene a partir de un depósito relativamente pequeño. Ello ejemplifica los efectos de las altas tasas de inflación y de interés.

Ejercicios del capítulo 5

1. En las mismas condiciones, ¿qué tipo de anualidades produce un monto mayor: una vencida o una anticipada? ¿Por qué?
2. En las mismas condiciones, ¿qué tipo de anualidades genera un valor actual mayor: una vencida o una anticipada? ¿Por qué?
3. ¿Cuál es la renta semestral adelantada equivalente a una renta mensual adelantada de $660, si el interés es de 22.52% anual convertible mensualmente?
4. Cada 2 meses, el día 25, se depositan $1000 en un fondo de inversión que paga 4% convertible bimestralmente. ¿Cuánto se habrá acumulado en el fondo un instante antes de realizar el vigesimocuarto depósito?
5. Un arquitecto desea ahorrar $4 000 mensuales durante 5 años. Si sus ahorros ganan 5.4% convertible mensualmente, ¿cuánto habrá acumulado al mes siguiente del último depósito?
6. Una empresa debe cubrir el 23 de octubre un pagaré que emitió. Para cumplir con su obligación, se depositaron $8 716.52 los días 23 de los meses de enero a septiembre en una cuenta que paga 0.6% mensual de interés. Si con lo acumulado en la cuenta se liquidó el pagaré, ¿cuál era el valor de éste en su fecha de vencimiento?
7. Para adquirir un automóvil a crédito se deben pagar 48 abonos mensuales de $4 900 comenzando en el momento de la entrega del vehículo. Si los intereses que se cobran son a razón de 15% convertible cada mes, ¿cuál es el valor al contado de los pagos?
8. ¿Qué conviene más para quien cobra:

   a) recibir 14 pagos mensuales vencidos de $1 026.44, o
   b) recibir 14 pagos mensuales anticipados de $1 000 si el interés es de 1.5 mensual?

9. Un profesional joven desea reunir $300 000 en 5 años para dedicarse a viajar un tiempo. Si la tasa de interés de mercado es de 13.2% capitalizable al mes, y bajo el supuesto de que en todo ese tiempo no cambia dicha tasa de interés, ¿cuánto deberá depositar cada mes con el objeto de reunir la cantidad que desea exactamente antes de realizar el último depósito, suponiendo que inicie sus depósitos de inmediato?
10. ¿Qué renta anual anticipada es equivalente a una renta mensual anticipada de $680, a una tasa de 25% convertible mensualmente?
11. ¿El monto de una anualidad anticipada es igual al monto a interés compuesto de su valor actual? Razone su respuesta e ilústrela con un ejemplo.
12. ¿A qué tasa de interés efectivo anual 10 pagos mensuales anticipados de $600 se convierten en un monto de $7 000?
13. Una empresa de seguros hace préstamos a sus empleados con más de 10 años de antigüedad y cierto nivel de sueldo en las siguientes condiciones:

   - Importe del préstamo: $10 000.
   - Plazo: 18 meses.
   - Pago: 18 abonos mensuales de $628.63 comenzando en el momento de entregar el préstamo.

   ¿Que interés anual convertible mensualmente les cobra?
14. Considere las dos operaciones siguientes:

   a) 5 pagos semestrales anticipados de $2 250 para liquidar un monto de $16 000 que tenía este valor un semestre después del último pago.
   b) 30 pagos mensuales anticipados de $895.72 para liquidar un valor actual de $20 000.

   ¿En qué operación se pagó más interés?
15. ¿Con cuántos pagos anticipados de $623.84, realizados cada principio de mes, se alcanza un monto de $15 000, si el dinero rinde 2.97% mensual?
16. Para pagar la adquisición de una computadora con precio de $18 000, una empresa hizo pagos iguales de $3 150.46 al comienzo de cada uno de 6 meses; a partir del momento en que se recibió el equipo, ¿qué tasa mensual de interés pagó?

17. El administrador del club de futbol Los Invencibles está evaluando la compra de un nuevo autobús para transportar a los jugadores. Una arrendadora financiera le ofrece un plan de compra mediante el pago de 60 mensualidades anticipadas de $34 466.09. ¿Cuál es la tasa de interés nominal anual que carga la arrendadora si el precio del autobús es de $1 485 750?

18. Si además de las 36 mensualidades anticipadas, el equipo debe pagar 5% del valor del autobús como opción de compra, un mes después de concluido el pago de los abonos mensuales, ¿cuál sería el valor actual de los pagos que deben realizarse para adquirir el autobús?

19. ¿Cuál es la tasa de interés que se paga en la compra de una computadora que se ofrece mediante 96 pagos fijos semanales de $285 si tiene un valor al contado de $17 710.75?

20. ¿Cuál es el valor actual de los pagos que se erogarían para adquirir la computadora del ejemplo anterior si:

a) La tasa de interés del mercado fuera de 36% anual?
b) La tasa de interés fuera de 24% anual?
c) La tasa de interés fuera de 12% anual?
d) Comente los resultados.

5.4 Aplicaciones

Las aplicaciones de las anualidades simples, ciertas, anticipadas e inmediatas (ASCAI) son diversas, pero se destacan las compras a plazo con enganche, las compras de seguros y los pagos de renta. Una aplicación común se ilustra a continuación.

5.4.1 Compras a plazo con enganche

Como herramienta promocional, muchas tiendas que venden en abonos, ofrecen a sus clientes pagos a plazo "sin intereses", o bien descuentos sobre los precios de lista si se realiza el pago al contado. El sobreprecio que existe entre el precio con descuento y el precio "al contado", que en la práctica comercial suele ser muy elevado, constituye el interés que carga la tienda por la venta a plazos, como se ilustra en el ejemplo siguiente, cuya información fue tomada de internet.

EJEMPLO 5.4.1

Una tienda de departamentos ofrece en venta un televisor. El precio al contado es de $5 999, o bien puede adquirirse mediante 24 pagos quincenales de 310.

- ¿Cuál es el sobreprecio que aplica la tienda en sus ventas a crédito, si se considera que la tasa de interés del mercado es de 6% anual y los pagos se realizan en forma anticipada?
- ¿Cuál es la tasa de interés quincenal que carga la tienda por la compra a plazos?
- ¿Cuál es la tasa de interés efectiva anual que cobra la tienda?

En este caso se está en presencia de una anualidad simple, cierta, anticipada e inmediata (ASCAI). El valor actual de los pagos quincenales que realizaría el comprador se determina utilizando la fórmula (5.3)

$$C = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

En la misma se sustituyen los valores conocidos:

Pago periódico = $310
Número de periodos = 24
Tasa de interés = 6% anual convertible quincenalmente = 0.06/24

$$C = R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$C = 310\left[1 + \frac{1-(1+0.06/24)^{-24+1}}{0.06/24}\right]$$

$$C = 310\left[1 + \frac{1-(1+0.0025)^{-23}}{0.0025}\right]$$

$$C = 310\left[1 + \frac{1-(0.944190)}{0.0025}\right]$$

$$C = 310\left[1 + \frac{0.055810}{0.0025}\right]$$

$$C = 310[1 + 22.3241]$$
$$C = 310[23.3241]$$
$$C = 7\,230.48$$

Así, el valor actual de los 24 pagos quincenales anticipados que realiza el comprador sería de \$7 230.48, dada una tasa de interés de mercado de 6% anual capitalizable quincenalmente. El sobreprecio que debe asumir el comprador es de \$1 231.48, esto es 7 230.48 – 5 999.00.

Para determinar la tasa de interés que aplica la tienda, es necesario observar el procedimiento descrito en el ejemplo 5.3.5, donde se ensayan valores para distintos valores de *i*, considerando que:

$$C = R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

y

$$\frac{C}{R} - 1 = \left[\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$\frac{5\,999}{310} - 1 = \left[\frac{1-(1+i)^{-23}}{i}\right]$$

$$18.3516 = \left[\frac{1-(1+i)^{-23}}{i}\right]$$

Ensayando valores de i se tiene

Si $i = 0.02$ $\quad \left[\frac{1-(1+i)^{-23}}{i}\right] = 18.2922$

Si $i = 0.019$ $\quad \left[\frac{1-(1+i)^{-23}}{i}\right] = 18.4934$

Si $i = 0.0195$ $\quad \left[\frac{1-(1+i)^{-23}}{i}\right] = 18.3924$

Por lo tanto, la tasa de interés se encuentra entre 0.0195 y 0.02. Interpolando se puede comprobar que la tasa que iguala ambos valores es 0.0197. Por lo tanto, la tasa de interés quincenal que cobra la tienda es de 1.97%. y la tasa de interés efectiva sería:

$$i_e = (1 + i)^n - 1$$
$$i_e = (1 + 0.0197)^{24} - 1$$
$$i_e = 1.5971 - 1$$
$$i_e = 1.5971 - 1$$
$$i_e = 0.59 \quad 71 = 59.71\%$$

En consecuencia, la tasa de interés efectiva anual que cobra la tienda es de 59.71%, que resulta sumamente elevada cuando las condiciones de inflación no superan 5% anual.

5.5 Uso de Excel

Al igual que en el capítulo 4, en esta sección se resuelven los ejercicios del capítulo mediante el empleo de funciones de Excel diseñadas para simplificar el cálculo de una serie de pagos periódicos, conocidos como anualidades. En el caso de las anualidades anticipadas, estas fórmulas se aplicarán en combinación con las capacidades normales de cálculo de esta hoja de trabajo.

Las funciones que se aplican a ejercicios de anualidades anticipadas son:

- Monto de una anualidad (VF).
- Capital o valor actual de una anualidad (VA).

En las subsecciones siguientes se revisan aplicaciones de cada una de ellas.

5.5.1 Monto y valor actual (sección 5.2)

En el ejemplo 5.2.1 se muestra la determinación del monto de un depósito mensual anticipado de $250 durante un año. Para resolverlo, se aplica la fórmula del monto de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata, adicionándole el interés devengado por un periodo adicional, puesto que el pago se realiza de manera anticipada, con lo que se tiene la fórmula (5.1):

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i) \tag{5.1}$$

En la hoja de cálculo de Excel, este problema se soluciona, como se ha visto en secciones anteriores, mediante las operaciones aritméticas de Excel (suma, resta, multiplicación, división y exponenciación), o bien utilizando sus funciones predefinidas.

La fórmula de Excel para calcular el monto compuesto de una anualidad, o valor futuro (VF), que se estudió en secciones anteriores es:

VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

en donde:

Tasa: es la tasa de interés por periodo expresada como tanto por uno.
Nper: es el número total de periodos de pago.
Pago: es el pago que se efectúa cada periodo.
Va: es el capital o valor actual total de una serie de pagos futuros.
Tipo: se puede anotar (es un valor optativo, no obligatorio) un número 0 o 1 que indica cuándo vencen los pagos. Si se anota 0 se calcula el monto de un pago vencido; como es un parámetro optativo, si se omite, el monto se calcula para un pago vencido. Si se anota un 1, entonces se calcula como un pago anticipado. Para los efectos de las anualidades anticipadas que se estudian en esta sección, deberá capturarse siempre un 1.

Sustituyendo los valores del ejemplo 5.2.1 se tiene

=VF(0.003,12,–250,,1)

En alguna celda de una hoja de trabajo de Excel, se obtiene como resultado $3 059.15, que es igual al resultado que se obtuvo en el texto. Las opciones para la solución de este ejemplo en la hoja de Excel se ilustran a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Monto de una anualidad anticipada***
2			=VF(tasa,nper,pago,va,tipo)	$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$
3			=VF(0.003,12,-250,,1)	=250*((((1+0.003)^12)-1)/0.003)*(1+0.003)
4	Tasa	0.003	3 059.15	3 059.15
5	Nper	12		
6	Pago	250		
7	Capital (Va)			
8	Tipo	1		

Los resultados que arrojan son prácticamente iguales y la pequeña diferencia se debe al redondeo.

Es importante hacer aquí las siguientes observaciones:

- La tasa se expresa como tanto por uno (0.003), que equivale al 0.3% mensual estipulado en el ejemplo.
- En el número de periodos (Nper) se indica el número de periodos de capitalización que se consideran. En este caso, 12 meses.
- El pago, como ya se indicó, es 250, y se anota precedido de un signo negativo, puesto que se trata de una erogación del obrero ahorrador.
- El capital o valor actual (Va) se dejó en blanco, por lo que aparecen dos comas juntas.
- El tipo de la anualidad es anticipada, por lo que se anotó el número 1.

En el caso de la fórmula que aparece en la columna D, es recomendable iniciar su construcción a partir de la fórmula $(1 + i)^n$, la cual se expresa en Excel como $(1 + i)$^n, y a partir de la misma eslabonar las operaciones de suma, resta, multiplicación o división que se requieran, encerrando cada una con su paréntesis correspondiente.

En el ejemplo 5.2.2 se determina el monto del depósito utilizando la fórmula de una anualidad simple cierta, vencida e inmediata de 13 pagos, a la cual se le descuenta el valor del último pago que no se realiza, puesto que sólo se efectuaron doce pagos (uno anticipado y once vencidos).

La fórmula aplicable es la (5.2):

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]$$

La solución en Excel se ilustra a continuación:

	A	B	C
1	**Datos**		***Monto de una anualidad anticipada***
2			$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]$
3			=250*(((((1+0.003)^13)-1)/0.003)-1)
4	Tasa	0.003	3 059.148352
5	Nper	12+1	
6	Pago	250	
7	Capital (Va)		
8	Tipo	1	
8			

que son prácticamente los mismos resultados que se presentaron en el texto (las pequeñas diferencias se deben a redondeos).

En el ejemplo 5.2.3 se solicita el monto de seis pagos semestrales anticipados de $14 500 si el interés es de 19% convertible semestralmente. La solución en Excel se presenta a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Monto de una anualidad anticipada***
2			=VF(tasa,nper,pago,va,tipo)	$M = R\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)$
3			=VF(0.19/2,6,-14500,,1)	=14500*((((1+0.095)^6)-1)/0.095)*(1+0.095)
4	Tasa	0.19/2	120 968.40	120 968.4031
5	Nper	6		
6	Pago	14 500		
7	Capital (Va)			
8	Tipo	1		

que es exactamente el resultado que se tiene en el texto.

En el ejemplo 5.2.4 se pide determinar una renta anual anticipada que sustituya a una renta mensual de $2 750 considerando una tasa de 15.60% convertible mensualmente. A continuación se muestra la solución cuando se utilizan las opciones que ofrece Excel, tomando en consideración que en este caso se solicita el Valor actual o Valor presente, por lo que se utilizará la función VA de la hoja de cálculo:

VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)

donde

Tasa: es la tasa de interés por periodo, expresada como tanto por uno.
Nper: es el número total de periodos de pago.
Pago: es el pago que se efectúa cada periodo.
Vf: es el monto o valor futuro total de una serie de pagos futuros.
Tipo: es el tipo de anualidad, vencida (0), anticipada (1).

Así como la fórmula (5.3) para determinar el valor presente de una anualidad anticipada.

$$C = R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right] \tag{5.3}$$

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Valor Actual de una anualidad anticipada***
2			=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)	$C = R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$
3			=Va(0.1560/12,12,-2750,,1)	=2750*(1+(1-(1+0.156/12)^(-12+1))/(0.156/12))
4	Tasa	0.1560/12	30 767.60	30 767.59865
5	Nper	12		
6	Pago	2 750		
7	Monto (Vf)			
8	Tipo	1		

Los resultados, como se puede apreciar, son idénticos a los que se presentaron en el texto.

En el ejemplo 5.2.5 se pide calcular el valor actual de 9 pagos semestrales de $50 000 con interés de 5.28% semestral, con pagos anticipados y vencidos. La solución en Excel se ilustra a continuación:

Pagos anticipados

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Valor Actual de una anualidad anticipada***
2			=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)	$C = R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$
3			=Va(0.0528,9,-50000,,1)	=50000*(1+(1-(1+0.0528)^(-9+1))/(0.0528))
4	Tasa	0.0528	369 534.22	369 534.2195
5	Nper	9		
6	Pago	50 000		
7	Monto (Vf)			
8	Tipo	1		

Pagos vencidos

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Valor Actual de una anualidad anticipada***
2			=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)	$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$
3			=Va(0.0528,9,-50000,,0)	=50000*(1-(1+0.0528)^(-9))/(0.0528)
4	Tasa	0.0528	351 001.35	351 001.3483
5	Nper	9		
6	Pago	50 000		
7	Monto (Vf)			
8	Tipo	0		

Los resultados son idénticos a los que se muestran en el desarrollo de la sección.

5.5.2 Renta, plazo, interés y tasa de interés (sección 5.3)

Como se menciona en la sección 5.3, para conocer cualquiera de estos tres conceptos, se utilizan las fórmulas de las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas con las modificaciones vistas en la sección 5.2.

En el ejemplo 5.3.1 se pide determinar el importe del pago de cada uno de cinco abonos mensuales para adquirir una bicicleta cuyo valor al contado es de $1 800, si la tasa de interés que aplica la tienda es de 32.4% anual convertible mensualmente. La solución en Excel es la siguiente:

	A	B	C
1	**Datos**		***Valor Actual de una anualidad anticipada***
2			$R=\dfrac{C}{\left[1+\dfrac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]}$
3			=1800/(1+(1-(1+0.324/12)^(-5+1))/(0.324/12))
4	Tasa	0.324/12	379.4330671
5	Nper	5	
6	Pago		
7	Capital (Va)	1 800	
8			

El ejemplo 5.3.2 plantea el problema de la determinación del pago anticipado bimestral que debe realizarse para reunir un monto de $90 000 en un plazo de dos años, si la tasa de interés que paga es de 1.2% bimestral. La solución se ilustra en el siguiente cuadro, utilizando los operadores matemáticos de Excel (+, –, *, /, ^):

	A	B	C
1	**Datos**		***Monto de una anualidad anticipada***
2			$R=\dfrac{M}{\dfrac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1}$
3			=90000/(((1+0.012)^(12+1)-1)/0.012-1)
4	Tasa	0.012	6 934.574106
5	Nper	6*2	
6	Pago	?	
7	Monto (Vf)	90 000	
8			

El resultado que se obtiene es la misma cantidad que aparece en el texto.

El ejemplo 5.3.3 ilustra la determinación del número de pagos mensuales anticipados de $511.69 que se requiere efectuar para adquirir un antecomedor que vale $4 600 al contado, si la tasa de interés que aplica la tienda es de 29.40% anual convertible mensualmente. Para resolverlo se parte de la fórmula (5.3):

$$C=R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

de la cual se despeja n, con lo cual se obtiene la fórmula (5.4):

$$n=1-\frac{\log\,[1+i-(Ci/R)]}{\log\,(1+i)}$$

que será resuelta con la función de logaritmo y con los operadores propios de la hoja de Excel, como se ilustra a continuación.

	A	B	C
1	**Datos**		***Valor Actual de una anualidad anticipada***
2			$n = 1 - \frac{\log\,[1+i-(Ci/R)]}{\log\,(1+i)}$
3			=1-(LOG((1+0.294/12-((4600*0.294/12)/511.69)),10))/LOG((1+0.294/12),10)
4	Tasa	0.2940/12	10.00
5	Nper	?	
6	Pago	511.69	
7	Capital (Va)	4 600	
8			

El resultado muestra que deben hacerse 10 pagos.

La fórmula de la función de logaritmo es la siguiente:

$$\text{LOG(número,base)}$$

donde:

Número: es el número real positivo para el que se desea obtener el logaritmo y,
Base: es la base del logaritmo. Si se omite, se supone que es 10.

Así, en el ejemplo, el logaritmo base 10 de $(1 + i)$, se expresa como sigue:

$$\text{LOG}(\underbrace{(1+0.294/12)}_{\boxed{\text{Número}}},\underbrace{10}_{\boxed{\text{Base}}})$$

El ejemplo 5.3.4 ilustra el caso de un fondo de jubilación que paga 0.25% mensual de interés, en el cual se desea acumular \$2 000 000 mediante depósitos mensuales anticipados de \$5 000. Y se desea conocer el tiempo que se requiere.

Para solucionar este problema se recurrió a los logaritmos naturales, a fin de demostrar que es equivalente el empleo de logaritmos naturales, logaritmos base 10, o cualquiera otra base que se considere útil en un caso particular. La fórmula de la función de Excel de los logaritmos naturales es:

$$\text{LN(número)}$$

donde:

Número: es el número real positivo para el que se desea obtener el logaritmo.

Dado que la base será siempre la misma, únicamente se requiere dar el número del cual se desea obtener el logaritmo.

La solución en Excel se muestra a continuación:

	A	B	C
1	**Datos**		***Valor Actual de una anualidad anticipada***
2			$n = \left[\frac{\ln\left[\left[i\left(\frac{M}{R}\right)+1\right]+1\right]}{\ln(1+i)}\right]-1$
3			=(LN((0.0025*((2000000/5000)+1)+1))/LN(1+0.0025))-1
4	Tasa	0.0025	277.1056
5	Nper	?	
6	Pago	5 000.00	
7	Monto (Vf)	2 000 000	
8			

El resultado que se muestra, 277.10 meses, es prácticamente el mismo del texto.

Para determinar la tasa de interés que se plantea en los ejemplos 5.3.5 y 5.3.6 existe la función de Excel denominada TASA, que contiene los siguientes argumentos:

$$\text{TASA(nper;pago;va;vf;tipo;estimar)}$$

donde:

Nper: es el número total de periodos de pago en una anualidad.
Pago: es el pago efectuado en cada periodo, que no puede variar durante la vida de la anualidad. Por lo general, el argumento pago incluye el capital y el interés, pero no incluye ningún otro arancel o impuesto. Si se omite el argumento pago, deberá incluirse el argumento vf.
Va: es el valor actual, es decir, el valor que tiene actualmente una serie de pagos futuros.
Vf: es el valor futuro o el saldo en efectivo que se desea lograr después de efectuar el último pago. Si el argumento vf se omite, se supone que el valor es 0 (por ejemplo, el valor futuro de un préstamo es 0).
Tipo: es el número 0 o 1 e indica el vencimiento de los pagos.

Defina tipo como	Si los pagos vencen
0 u omitido	Al final del periodo
1	Al inicio del periodo

Estimar: es la estimación de la tasa de interés.

- Si el argumento estimar se omite, se supone que es 10%.
- Si TASA no converge, trate de usar diferentes valores para el argumento estimar. TASA generalmente converge si el argumento estimar se encuentra entre 0 y 1.

El sistema realiza una serie de aproximaciones sucesivas para determinar el valor de i, y en caso de que no converja con su valor después de realizar diez iteraciones, devolverá la leyenda #¡NUM!

Su uso es muy aconsejable pues evita la realización de una serie de cálculos laboriosos.

5.6 Resumen

En este capítulo se revisaron las anualidades:

- *Simples:* el periodo de pago corresponde al de capitalización.
- *Ciertas:* las fechas y los plazos son fijos y se conocen con anticipación.
- *Anticipadas:* el inicio de los pagos o depósitos se hacen al principio de los periodos.
- *Inmediatas:* los pagos o depósitos se inician en el mismo periodo en el que se formaliza la operación.

Se vio que este tipo de anualidades se pueden manejar con las ya conocidas fórmulas de las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas, y que sólo se requieren pequeñas modificaciones para tomar en cuenta que los pagos o depósitos se hacen por anticipado.

Comprobación del capítulo

Si ha leído el capítulo completo, el lector debe:

- Explicar qué es una anualidad simple, cierta, anticipada e inmediata (ASCAI).
- Identificar situaciones que puedan representarse mediante este tipo de anualidades.
- Plantear problemas de este tipo.
- Resolver ejemplos que impliquen su uso y determinar el monto, el valor actual o capital, la tasa de interés y el plazo, según sea necesario .
- Resolver ejercicios y aplicaciones de anualidades anticipadas utilizando la hoja de cálculo de Microsoft®Excel®.

Términos y conceptos importantes

- Anualidad anticipada

Fórmulas importantes

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) \qquad \textbf{(5.1)}$$

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right] \qquad \textbf{(5.2)}$$

$$C = R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right] \qquad \textbf{(5.3)}$$

$$n = 1 - \frac{\log\left[1+i-(Ci/R)\right]}{\log(1+i)} \qquad \textbf{(5.4)}$$

$$n = \left[\frac{\log\left[\left[\frac{M}{R}+1\right]i\right]+1}{\log(1+i)}\right] - 1 \qquad \textbf{(5.5)}$$

Ejercicios complementarios

1. Explique qué es una anualidad simple, cierta, anticipada e inmediata.
2. Dé un ejemplo de este tipo de anualidad.
3. En el caso de una anualidad mensual anticipada de \$1 000 durante 15 meses a 1% mensual, calcule monto y valor actual. ¿Qué relación existe entre ambos?
4. ¿A qué renta anual anticipada equivale una renta trimestral anticipada de \$995, si el interés es de 10% convertible cada 3 meses?
5. Con su nuevo negocio, Julio obtiene utilidades mensuales superiores a los \$3 000. Para crear una reserva con el objeto de ampliar sus actividades decide hacer depósitos mensuales de \$500 en un fondo de inversión que paga 1.43% mensual. ¿Cuánto habrá acumulado exactamente antes de realizar el trigésimo abono?
6. Si se puede adquirir un artículo pagando \$500 de inmediato y 4 abonos bimestrales por la misma cantidad, ¿cuál es su valor al contado si se consideran intereses a razón de 3.2% convertible con la misma periodicidad que los pagos?
7. El costo de una póliza grupal de seguro para automóviles es de \$220 mensuales que se deben pagar por adelantado. Si se aplican intereses a 13% anual convertible cada mes, ¿cuál es el valor anual de la póliza, que también se debe pagar por adelantado?
8. Para saldar una deuda, el doctor Domínguez acuerda pagar \$675 al principio de cada uno de 36 meses. Si el interés es de 18% convertible mensualmente, ¿cuál es el valor de los pagos que faltan:

   a) Exactamente antes de realizar el quinto pago?
   b) Exactamente antes de hacer el decimoquinto pago?
   c) Si después de hacer 5 pagos deja de hacer otros 4, ¿cuánto tendría que pagar al vencimiento del siguiente pago para ponerse al corriente?

8. Se renta un terreno comercial por \$15 650 anuales anticipados a 16.2% convertible mensualmente. ¿Cuál es la renta mensual anticipada equivalente?
9. El 3 de marzo se adquirió un equipo de sonido que tenía un precio al contado de \$12 350 y se acordó pagarlo mediante abonos bimestrales comenzando en el momento de la adquisición, y para terminar el 3 de enero del año siguiente. Si los intereses ascienden a 23.6% convertible bimestralmente, ¿de cuánto fueron los pagos?
10. ¿Con qué depósito semestral anticipado se acumula un monto de \$35 000 justamente antes de realizar el décimo, si se consideran intereses de 7.5% semestral?
11. El 14 de enero, Montserrat contrajo un préstamo por \$5 000 que convino en liquidar mediante abonos mensuales anticipados de \$541.08 comenzando en el momento de realizar la operación. Si el interés convenido fue de 1.8% mensual, ¿en qué fecha terminará de pagar?
12. Con un pago de \$581.79, realizado el 27 de octubre, se termina de pagar una deuda que tenía un valor de \$5 550 en su fecha de vencimiento, el 27 de noviembre siguiente. Si la operación se realizó a 1.9% mensual, y se hicieron pagos iguales mensuales anticipados, ¿en qué fecha se realizó el primero de ellos?
13. Para comprar un abrigo que cuesta \$7 995 al contado se ofrece el siguiente plan de crédito: 7 pagos mensuales de \$1 270 a partir del momento de la compra. ¿Qué interés se carga en la operación?
14. Se ofrecen en venta casas a crédito que se entregan un año después de hecha la solicitud. En el momento de la entrega se debe pagar un enganche de \$22 500. Si la compañía acepta recibir a cambio del enganche 12 mensualidades anticipadas de \$2 000.50, ¿qué tipo de interés anual convertible mensualmente es el que cobra la compañía?

Matemáticas en internet. Anualidades anticipadas

- Conceptos y aplicaciones de anualidades anticipadas.
  http://es.scribd.com/doc/33899257/ANUALIDADES-ANTICIPADAS
- Ejercicios de anualidades anticipadas
  http://usuarios.lycos.es/matematic/segunda.htm#eje1
- Aplicación práctica de las anualidades anticipadas para el financiamiento de un automóvil.
  http://www.mifel.com.mx/SimuladorArrendamiento/SAinicio.aspx
- Simulador de crédito automotriz de la CONDUSEF. Permite comparar los costos que ofrecen las distintas instituciones financieras en México.
  http://e-portalif.condusef.gob.mx/condusefautomotriz/sca_simulador_5.php
- Video que muestra la determinación del monto y el valor actual de una anualidad anticipada.
  http://youtu.be/rbGtSnm7zSA
- Video que muestra, paso a paso, la determinación del pago periódico en un problema de anualidades anticipadas.
  http://youtu.be/Y0Sv1FH1LDc
- Video que muestra, paso a paso, la determinación del número de periodos en un problema de anualidades anticipadas.
  http://youtu.be/XpY0AD24aUQ

CAPÍTULO
6

Anualidades diferidas

TEMARIO

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

- Definir y explicar qué es una anualidad diferida
- Identificar y plantear operaciones que puedan resolverse mediante los métodos de las anualidades diferidas
- Planear y resolver problemas de anualidades diferidas que impliquen el cálculo de:
  - Monto
  - Valor actual
  - Renta
  - Plazo
  - Interés
  - Tasa de interés
- Plantear y resolver problemas de anualidades diferidas que impliquen operaciones equivalentes
- Resolver ejercicios y aplicaciones de anualidades diferidas utilizando la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®

6.1 Introducción

Ya se han explicado los casos de las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas y las anticipadas en los capítulos 4 y 5. En éste se analizan las anualidades diferidas.

Al igual que en el capítulo anterior, se reduce el análisis a las anualidades simples y ciertas, ya que sus contrapartes, los casos generales y contingentes, son materia de otros capítulos.

Tal como se vio al presentar la clasificación de las anualidades, las diferidas surgen del criterio de clasificación referente al momento en que se inician los pagos o abonos.

Las anualidades diferidas son aquellas en las que el inicio de los cobros o depósitos se pospone para un periodo posterior al de la formalización de la operación. Al igual que con las anualidades anticipadas, tampoco se requieren nuevas fórmulas, ya que se manejan las mismas expresiones que se utilizan para las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas. Sólo es necesario hacer las modificaciones pertinentes para considerar la postergación del inicio de los pagos o depósitos, y de esta manera, plantearlas como anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas.

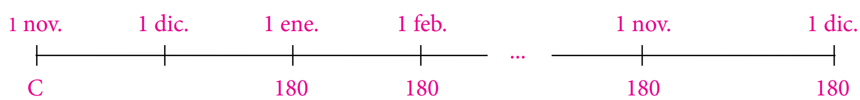
6.2 Monto y valor actual

Se ilustran estos conceptos a través de los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 6.2.1

En octubre, un almacén ofrece al público un plan de venta de “Compre ahora y pague después”. Con este plan el arquitecto Servín adquiere un escritorio, que recibe el 1 de noviembre, y que debe pagar mediante 12 mensualidades de $180 a partir del 1 de enero del año siguiente. Si se considera un interés de 36% anual convertible mensualmente, ¿cuál es el valor al contado del mueble?

SOLUCIÓN:



El pago se pospone durante un periodo. Si consideramos sólo los 12 pagos (de enero a diciembre del año siguiente):

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 180\frac{1-(1+0.36/12)^{-12}}{0.36/12} = 180\frac{1-(1.03)^{-12}}{0.03}$$

$$C = 180(9.954004) = \$1\,791.72$$

Es decir, $1 791.72 sería el valor al 1 de diciembre, ya que se calculó el valor actual de una anualidad vencida (la fórmula de siempre) durante 12 periodos, y el inicio del primero de ellos es, precisamente, el 1 de diciembre. Lo único que resta hacer es calcular el valor actual de 1 791.72 en un mes atrás, que es cuando el comprador recibió el escritorio.

$$C = 1\,791.72(1.03)^{-1} = 1\,791.72(0.970874)$$
$$C = 1\,739.54$$

y, en resumen:

$$C = 180\frac{1-(1.03)^{-12}}{0.03}(1.03)^{-1}$$

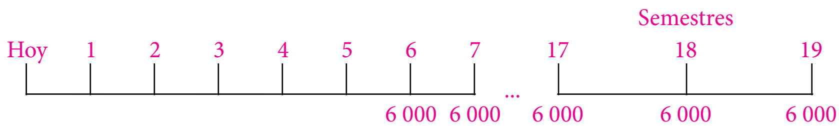
$$C = 180(9.954004)(0.970874)$$
$$C = \$1\,739.54$$

Como puede verse en este ejemplo y los restantes del capítulo, en el caso de las anualidades diferidas lo que se hace es encontrar el valor actual (o monto) de la anualidad vencida e inmediata correspondiente (1 791.72 en este caso) y luego trasladarla tantos periodos hacia atrás como sea necesario. Esto es, en otras palabras, el planteamiento de la ecuación de equivalencia apropiada.

EJEMPLO 6.2.2

Calcular el valor actual de una renta semestral de \$6 000 durante 7 años, si el primer pago semestral se realiza dentro de 3 años y el interés es de 17% semestral.

Solución:



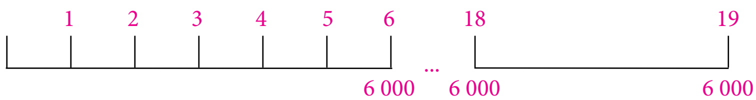
Aunque ya hemos señalado y apreciado su importancia, conviene aquí destacar la utilidad de los diagramas de tiempo y valor para representar las características de las situaciones que se analizan, ya que en este ejemplo hubiera sido fácil caer en la conclusión de que el último pago será en la fecha 20 y no la 19, que es la correcta. Como se ve en la gráfica, "durante 7 años" equivale a "durante 14 semestres" y 14 pagos semestrales que se inician al final del sexto periodo ("dentro de 3 años") terminarán con el pago realizado al final del periodo 19 (para verificar esta afirmación se sugiere contar los pagos uno por uno). Entonces:

$$C = 6\,000\frac{1-(1.17)^{-14}}{0.17}(1.17)^{-5}$$
$$C = 6\,000(5.229299)(0.456111)$$
$$C = 14\,310.85$$

Observe también que aun cuando se hacen 14 pagos de \$6 000 su valor actual es sólo ligeramente superior al de dos de ellos (14 310.85) por la elevada tasa de interés y el prolongado plazo.

EJEMPLO 6.2.3

¿Cuál es el monto de la anualidad planteada en el ejemplo 6.2.2? En forma gráfica de nuevo:



El monto se puede calcular como el de una anualidad vencida, y en este caso la posposición en realidad ya no tiene efecto sobre el comportamiento de la anualidad. Por ello, la consideración de si la anualidad es diferida o inmediata carece de interés cuando lo que se requiere determinar es el monto:

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$M = 6\,000\frac{(1.17)^{14} - 1}{0.17} = 6\,000(47.102672)$$
$$M = 282\,616.03$$

y, ya que conocemos el valor actual de la operación, se puede también calcular el monto como el valor a futuro del valor actual, o:

$$M = \$14\,310.85(1.17)^{19} = 14\,310.85(19.748375)$$
$$M = \$282\,616.03$$

EJEMPLO 6.2.4

El 12 de enero una persona acuerda pagar su deuda mediante 8 pagos mensuales de \$3 500, el primero de los cuales lo debe efectuar el 12 de julio del mismo año. Si después de realizar el quinto pago deja de hacer dos pagos, ¿qué monto único deberá entregar al vencer el último pago pactado originalmente para saldar completamente su deuda, si el interés es de 21.60% con capitalización mensual?

SOLUCIÓN:

		1	2	3	4	5	6	7	8
	12 ene.	12 jul.	12 ago.	12 sep.	12 oct.	12 nov.	12 dic.	12 ene.	12 feb.
Lo pactado		3 500	3 500	3 500	3 500	3 500	3 500	3 500	3 500
Lo sucedido		3 500	3 500	3 500	3 500	3 500	—	—	?

$$i = \frac{0.2160}{12} = 0.0180$$

El monto de su deuda al 12 de febrero sería:

$$M = 3\,500\frac{(1.0180)^8 - 1}{0.0180} = 29\,828.95$$

$$M = \$29\,828.95$$

El valor de lo que en realidad pagó, también al 12 de febrero, sería:

$$M = 3\,500\frac{(1.0180)^5 - 1}{0.0180}(1.0180)^3$$

$$M = 3\,500(5.183269)(1.054978)$$

$$M = \$19\,138.82$$

Por lo tanto, lo que debe pagar el 12 de febrero para saldar su deuda es:

$$29\,828.95 - 19\,138.82 = \$10\,690.13$$

Resumiendo en la ecuación de valores equivalentes correspondiente, si denotamos por x el pago que se debe hacer:

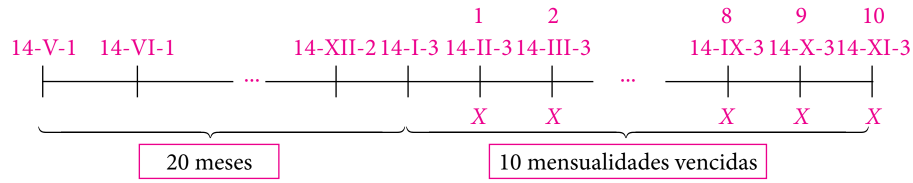
$$x = \underbrace{\frac{3\,500(1.0180)^8 - 1}{0.0180}}_{\boxed{\text{El valor de la deuda a su vencimiento (12 de febrero del segundo año)}}} \underbrace{-}_{\text{menos}} \underbrace{3\,500\frac{(1.0180)^5 - 1}{0.0180}(1.0180)^3}_{\boxed{\text{el valor de lo pagado al 12 de febrero, inmediatamente antes de hacer el pago final}}} = \$10\,690.13$$

6.3 Renta, plazo, interés y tasa de interés

EJEMPLO 6.3.1

El 14 de mayo del año 1 se depositaron \$100 000 en un fondo de inversiones con el objeto de retirar 10 mensualidades a partir del 14 de febrero del año 3. Si los intereses que gana la inversión son de 17.52% capitalizable cada mes, hallar el valor de las mensualidades que se podrán retirar.

Solución: $i = 0.1752/12 = 0.01460$



La ecuación de equivalencia sería, utilizando como fecha focal el 14 de mayo del año 1:

$$100\,000 = \underbrace{X\frac{1-(1.01460)^{-10}}{0.01460}}_{1}\underbrace{(1.01460)^{-20}}_{2}$$

En donde (1) nos daría el valor actual de una renta vencida al 14 de enero del año 3, cantidad que, multiplicada por (2), nos daría el valor actual al 14 de mayo del año 1, que es cuando se hizo el depósito. Observe que esta expresión es equivalente a:

$$\underbrace{100\,000(1.01460)^{20}} = X\frac{1-(1.01460)^{-10}}{0.01460}$$

en donde el primer término nos da el valor de la inversión al 14 de enero del año 3, y algebraicamente esta última expresión se obtiene multiplicando ambos términos de la primera expresión por $(1.01460)^{20}$. [Para el segundo término, $(1.01460)^{-20}(1.01460)^{20} = (1.01460)^0 = 1$] y,

$$100\,000(1.01460)^{20} = X\frac{1-(1.01460)^{-10}}{0.01460}$$

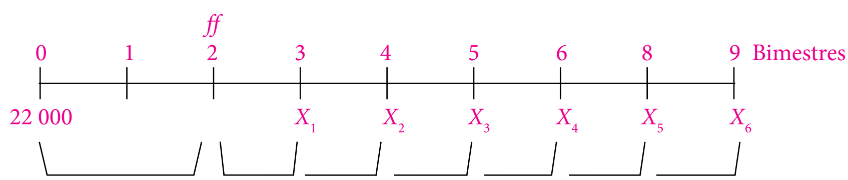
$$100\,000(1.336279) = X(9.241758) \text{ y}$$

$$X = \frac{100\,000(1.336279)}{9.241758} = \$14\,459.19$$

EJEMPLO 6.3.2

El valor al contado de una mesa de billar es de \$22 000. Se puede adquirir a crédito mediante 6 pagos bimestrales, el primero de los cuales debe realizarse 6 meses después de la adquisición. Si el interés que se carga es de 4% bimestral, ¿de cuánto deben ser los pagos?

Solución:



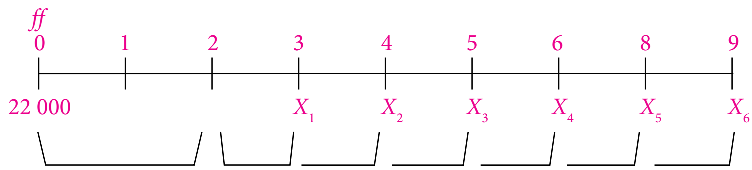
$$22\,000\,(1.04)^2 = X\frac{1-(1.04)^{-6}}{0.04}$$

$22\,000(1.04)^2$ es el monto al término del segundo bimestre. Esta cantidad equivale al valor actual de los pagos bimestrales, planteados éstos como una anualidad vencida:

$$22\,000(1.0816) = X(5.242137)$$

$$X\frac{22\,000(1.0816)}{5.242137} = 4\,539.22$$

Planteado de la otra manera:



$$22\,000 = (1.04)^{-2}\left[X\frac{1-(1.04)^{-6}}{0.04}\right]$$

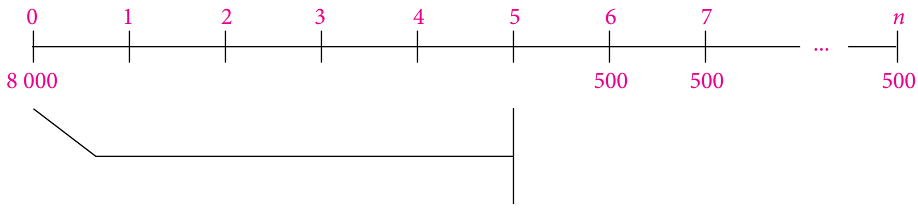
$$22\,000 = (0.924556)[X(5.242137)]$$

$$X = \frac{22\,000}{(0.924556)(5.242137)} = \frac{22\,000}{4.846650} = \$4\,539.22$$

EJEMPLO 6.3.3

Si se depositan hoy \$8 000 en una cuenta de inversiones que paga 6% capitalizable mensualmente, ¿cuántos retiros mensuales de \$500 se podrán hacer comenzando dentro de 6 meses?

SOLUCIÓN: $i = 0.06/12 = 0.005$



Primero se calcula el valor del depósito inicial al final del quinto mes:

$$8\,000(1.005)^5 = 8\,202.01$$

Ahora podemos plantear una anualidad vencida:

$$8\,202.01 = 500\frac{1-(1.005)^{-n}}{0.005}$$

$$1-\frac{8\,202.01(0.005)}{500} = 1.005^{-n}$$

$$0.91798 = 1.005^{-n}$$

$$-n\log 1.005 = \log 0.91798$$

$$n = -\frac{\log 0.91798}{\log 1.005} = \frac{0.037167}{0.002166} = 17.159280$$

La respuesta matemática sería entonces 17.16 retiros, y en la práctica lo que se puede hacer es, como se ha visto antes:

a) Retirar 17 mensualidades de \$500 y una decimoctava de:

$$x = \left[8\,202.01(1.005)^{17} - 500\,\frac{(1.005)^{17}-1}{0.005}\right](1.005)$$

$$x = (8\,927.78 - 8\,848.65)(1.005)$$
$$x = 79.13(1.005) = \$79.53$$

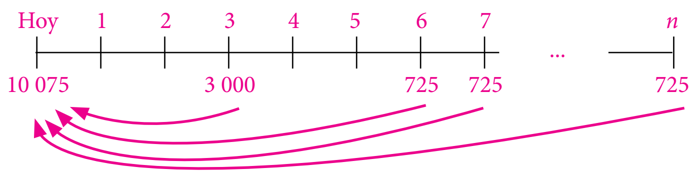
b) Retirar 16 mensualidades de \$500 y una decimoséptima de:

$$8\,202.01(1.005)^{16} - 500\frac{(1.005)^{16}-1}{0.005} = 8\,883.36 - 8\,307.12 = \$576.24$$

EJEMPLO 6.3.4

Pedro Páramo contrae hoy una deuda de \$10 075 que debe pagar mediante un abono de \$3 000 dentro de 3 meses y, después, tantos pagos mensuales de \$725 como sean necesarios hasta saldar el total, comenzando dentro de 6 meses. Si el interés al que se contrató el préstamo es de 37.68% capitalizable mensualmente, ¿cuántos pagos mensuales debe hacer?

Solución: $i = 0.3768/12 = 0.0314$



Valor de la deuda en el momento de hacer el pago de \$3 000:

$$10\,075(1.0314)^3 - 3\,000 =$$
$$11\,054.18 - 3\,000 = 8\,054.18$$

El valor de este saldo de la deuda al quinto mes es equivalente al valor actual de las n mensualidades de \$725. Para determinarlo se calcula dicho valor a partir del que se determinó al tercer mes:

$$\$8\,054.18(1.0314)^2 = \$8\,567.92$$

Ahora, para calcular el número de pagos:

$$8\,567.92 = 725\frac{1-(1.0314)^{-n}}{0.0314}$$

$$\frac{8\,567.92(0.0314)}{725} - 1 = -(1.0314)^{-n}$$

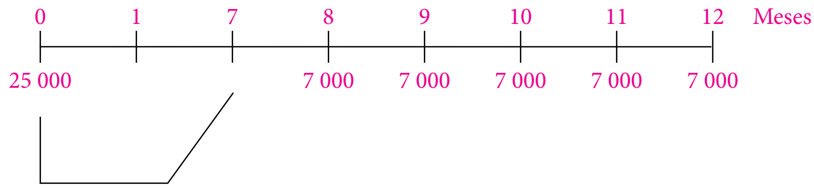
$$(1.0314)^{-n} = 0.628920$$
$$-n \log(1.0314) = \log 0.628920$$

$$n = -\frac{\log 0.628920}{\log 1.0314} = -\frac{-0.201405}{0.013427}$$
$$n = 15$$

EJEMPLO 6.3.5

Si para pagar una deuda de \$25 000 se hacen 5 pagos mensuales de \$7 000 comenzando 8 meses después de formalizar la operación, ¿cuál fue la tasa de interés que se cobró?

Solución:



$$25\,000(1+i)^7 = 7\,000\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-5}}{i(1+i)^7} = \frac{25\,000}{7\,000} = 3.571429$$

y, al igual que hicimos antes con las anualidades vencidas e inmediatas, debemos ensayar valores de i en

$$\frac{1-(1+i)^{-5}}{i(1+i)^7}$$

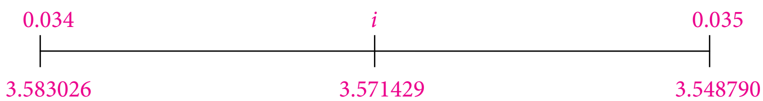
para encontrar dos entre los cuales se encuentra 3.571429, y después aproximar i mediante una interpolación lineal:

$$\frac{1-(1+i)^{-5}}{i(1+i)^7}$$

es igual a

$$\begin{aligned}
\text{Si } i &= 0.05 & &= 3.076878\\
i &= 0.04 & &= 3.383019\\
i &= 0.03 & &= 3.723721\\
i &= 0.035 & &= 3.548790\\
i &= 0.034 & &= 3.583026
\end{aligned}$$

y para interpolar entre estos dos valores:



$$\frac{i-0.034}{0.035-0.034} = \frac{3.571429-3.583026}{3.548790-3.583026}$$

$$\frac{i-0.034}{0.001} = 0.338737$$

$$i = 0.034 + 0.338737(0.001)$$

$$i = 0.034339$$

Comprobando:

$$25\,000(1.034339)^7 = 7\,000\frac{1-(1.034339)^{-5}}{0.034339}$$

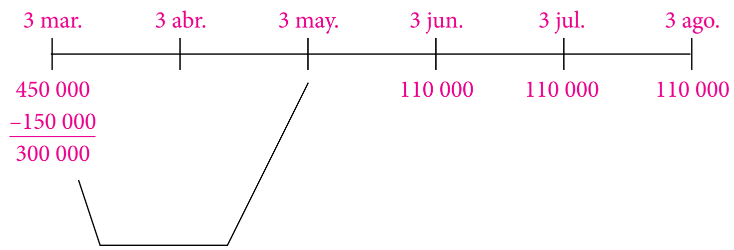
$$31\,665 \approx 31\,664.64$$

Por lo tanto, el interés fue de 3.43% mensual, aproximadamente.

EJEMPLO 6.3.6

El 3 de marzo, el señor Copoya adquirió un departamento en condominio por el cual debía pagar, aparte de cierta cantidad semestral, un enganche de \$450 000. Para el pago, el vendedor le ofreció recibir \$150 000 en aquella fecha, en el momento de la entrega del inmueble, y después otros 3 pagos mensuales de \$110 000, a partir del 3 de junio del mismo año. ¿Cuál fue el interés anual capitalizable mensualmente que pagó el señor Copoya?

Solución:



$$300\,000(1+i)^2 = 110\,000\frac{1-(1+i)^{-3}}{i}$$

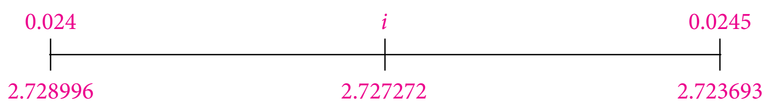
$$\frac{300\,000}{110\,000} = \frac{1-(1+i)^{-3}}{i(1+i)^2} = 2.727272$$

Ensayando valores:

$$\text{si } i = 0.03 \qquad \frac{1-(1+i)^{-3}}{i(1+i)^2} = 2.666237$$

$$\begin{aligned} i &= 0.025 & &= 2.718404 \\ i &= 0.020 & &= 2.771898 \\ i &= 0.024 & &= 2.728996 \\ i &= 0.0245 & &= 2.723693 \end{aligned}$$

Interpolando:



$$\frac{i = 0.024}{0.0245 - 0.024} = \frac{2.727272 - 2.728996}{2.723693 - 2.728996}$$

$$\frac{i - 0.024}{0.0005} = 0.325099$$

$$i = 0.024 + 0.325099(0.0005)$$
$$i = 0.024163$$

Comprobando: $$300\,000(1.024163)^2 = 11\,000\frac{1-(1.024163)^{-3}}{0.024163}$$

$$314\,672.96 \approx 314\,672.14$$

Por lo tanto, el interés que se pagó fue de

$$0.024163(12) = 0.289956$$

Es decir, 29% anual capitalizable cada mes, aproximadamente.

Ejercicios del capítulo 6

1. Explique qué es una mensualidad simple, cierta, vencida y diferida.
2. Dé un ejemplo de una anualidad simple, cierta, vencida y diferida.

3. Una persona que cumple hoy 33 años desea depositar en una inversión, que rinde 6% anual capitalizable mensualmente, una cantidad que le permita recibir $10 000 mensuales durante 20 años, a partir del día en que cumpla 40 años. ¿Cuánto debe depositar?
4. ¿A qué cantidad anual pagada por anticipado equivalen 3 pagos bimestrales de $2 000 realizados al principio de cada uno de los últimos 3 bimestres del año si el interés es de 14.4% anual capitalizable bimestralmente?
5. El 2 de mayo del año 1 se depositan $15 000 y a partir del 2 de noviembre del año 3 y hasta el 2 de mayo del año 5 se depositan cada 6 meses $8 000 en una cuenta que abona 8% semestral. ¿Cuánto se habrá acumulado al 2 de noviembre del año 10?
6. ¿Qué cantidad pagada durante cada uno de 5 trimestres es equivalente a $5 000 pagados 21 meses *antes* de realizar el primer pago trimestral, si el interés es de 16.9% capitalizable trimestralmente?
7. ¿Qué cantidad pagada durante cada uno de 5 trimestres es equivalente a $5 000 pagados 21 meses *después* de realizar el primer pago trimestral, si el interés es de 16.9% capitalizable trimestralmente?
8. ¿Qué relación existe entre las respuestas a los dos problemas anteriores?
9. Un comerciante va a invertir $100 000 en un lote de suéteres. La compra la va a hacer el 21 de abril y tiene un contrato para vender la mercancía el 21 de diciembre del mismo año, y cobrar mediante 3 pagos bimestrales iguales, el primero el día de la venta. Si desea ganar 2.5% bimestral sobre su inversión, ¿de qué cantidad deben ser los pagos?
10. En el caso del problema anterior, encuentre el valor de la utilidad del comerciante en el momento de hacer la venta.
11. Un automóvil que vale $139 500 se vende mediante un enganche de 50% y el saldo en abonos mensuales de $3 751 comenzando 6 meses después de la compra. Si el interés es de 18% capitalizable mensualmente, ¿cuántos abonos mensuales deben hacerse? Señale la solución matemática y la solución práctica.
12. ¿Cuántos depósitos de $2 500 realizados al principio de cada semestre son equivalentes a un monto de $34 725.42 que se retira 3 semestres después de realizado el último depósito si el interés es de 10% semestral?
13. Una persona debe pagar $11 000 dentro de 6 meses. ¿Con cuántos pagos bimestrales de $2 187.63 podría liquidar su adeudo si el interés es de 19.76% convertible cada 2 meses, y realiza el primer pago dentro de 12 meses?
14. Para pagar $6 000 que vencían el 14 de julio, el señor Martínez abona 5 mensualidades de $1 349.43, la última el 14 de enero del siguiente año. ¿Cuál fue la tasa de interés mensual que pagó?
15. Determine cuál de las dos siguientes operaciones fue contratada con una tasa efectiva anual más alta, si se trata de una deuda de $3 500 contraída hoy:

    a) Pagar 15 mensualidades de $295 comenzando dentro de 6 meses.
    b) Pagar 8 abonos bimestrales de $540, comenzado dentro de 6 meses.

16. Se obtiene un préstamo refaccionario por $5 millones para la adquisición de maquinaria. ¿Cuál es el importe de cada uno de los pagos mensuales si el plazo de pago es de 3 años y el banco concede 6 meses de gracia en el pago de interés y capital? La tasa de interés es de 23.29% convertible mensualmente.
17. Una empresa inmobiliaria solicita un préstamo para llevar a cabo la construcción de una casa. El banco le concede $3 millones, los cuales deberá liquidar en un plazo de 2 años, con 6 meses de gracia. Si la tasa de interés aplicable a este tipo de préstamo es de 26.4% anual convertible mensualmente, ¿cuál es el monto de cada uno de los 18 pagos mensuales que deberá realizar la constructora?
18. ¿Cuál es el pago mensual del problema anterior si la tasa de interés aplicable es la de la TIE (tasa interbancaria de equilibrio) más 8 puntos?
19. A fin de prepararse para el primer pago que debe efectuar, la empresa inmobiliaria del ejercicio 17, decide efectuar tres depósitos mensuales, a partir del cuarto mes posterior a

aquel en que le otorgaron el préstamo, en una cuenta de inversión que paga 12.6% de interés anual convertible mensualmente. ¿De qué importe deben ser los depósitos para que la empresa pueda cubrir con el monto que se acumule el primer pago del préstamo?

20. Juan Gabriel decide adquirir 4 llantas nuevas para su camioneta. La llantera le ofrece una promoción exclusiva para clientes distinguidos, por la cual paga el importe de las mismas mediante 6 abonos mensuales, iniciando los pagos 3 meses después de la compra. ¿Cuál es el importe de los pagos si el precio al contado de las llantas es de $11 600 y la llantera cobra 1.4% de interés mensual?

6.4 Uso de Excel

6.4.1 Monto y valor actual (sección 6.2)

En el ejemplo 6.2.1, un arquitecto compró un escritorio, que recibió el 1 de noviembre y que debe pagar con 12 mensualidades de $180, a partir del primero de enero del año siguiente. La pregunta es: ¿cuál es el valor del mueble con una tasa de 36% convertible mensualmente?

La respuesta se encuentra mediante el siguiente planteamiento en Excel:

=(1.03^(–1))*(VA(0.03,12,–180))

en donde "VA(0.03,12–180)" es el valor actual de los 12 pagos, que arroja su valor actual al primero de diciembre, valor que se multiplica por "(1.03^(–1))" para encontrar el valor al 1 de noviembre, $1 739.53, que es el valor que se buscaba y que difiere en un centavo del valor asentado en el texto, por cuestiones de redondeo.

En el ejemplo 6.2.2 se busca el valor actual de una renta de $6 000 semestrales durante 7 años, realizando el primer pago dentro de 7 años, a una tasa de 17% semestral. Con Excel:

=(1.17^(–5))*(VA(0.17,14,–6000))

lo que produce el valor de $14 310.85 que se busca y la estructura del planteamiento es igual a la del ejemplo anterior.

En el ejemplo 6.2.3 se pide encontrar el monto correspondiente al ejemplo anterior. Con Excel, simplemente, es el cálculo del monto correspondiente ya que, para esto, la posposición de los pagos no tiene efecto alguno sobre ese monto: $282 616.03

=VF(0.17,14,–6000).

El ejemplo 6.2.4 plantea que una deuda pactada el 12 de enero se debe pagar mediante 8 pagos mensuales de $3 500, a partir del 12 de julio del mismo año. Después de realizar el quinto pago, se dejan de hacer dos de ellos. Es necesario determinar qué pago único se deberá hacer al vencimiento del último pago pactado para saldar la deuda, con tasa de 21.6% capitalizable mensualmente.

El ejemplo se resuelve encontrando la diferencia entre lo pagado y lo que se debe al 12 de febrero, la fecha de vencimiento de la deuda. Con Excel:

=VF(0.018,8,–3500) – (VF(0.018,5,–3500))*(1.018^3)

cuyo resultado es $10 690.13, que es el saldo que se busca.

6.4.2 Renta, plazo, interés y tasa de interés (sección 6.3)

En el ejemplo 6.3.1 se trata de determinar el valor de 10 mensualidades que se desea retirar a partir del 14 de febrero del año 3 si se depositaron $100 000 el 14 de mayo del año 1 en un fondo de inversiones que rinde 17.52% capitalizable mensualmente.

Se plantea aquí otra manera de resolver el mismo ejercicio y, además, utilizando Excel:

De acuerdo con el planteamiento, el último de los 10 retiros se haría el 14 de noviembre del año 3. Si se encuentra el monto del depósito inicial a esta fecha, se tendría, a la vez, el monto de las 10 mensualidades que se desea retirar y, entonces, el planteamiento sería:

$$100\,000(1.0146)^{30} = X\frac{1.0146^{10}-1}{0.0146} = 100\,000(1.544705666) = 154\,470.57$$

que, con Excel se resuelve de la siguiente manera:

=PAGO(0.0146,10,,154470.57)

que produce el valor de la renta que se busca, que es de $14 459.14. En la función anterior es necesario observar que entre el "10", que es el número de mensualidades que se van a retirar y el "154 470.57" que es el monto acumulado con el depósito inicial al 14 de noviembre del año 3, hay dos comas, la primera para señalar que no se anota el valor actual y la segunda para colocar después de ella el monto de la anualidad, tal como lo requiere la sintaxis de la función.

En el ejemplo 6.3.2 se trata de encontrar el valor de cada uno de 6 pagos bimestrales que es necesario hacer, el primero de ellos 6 meses después de adquirir una mesa de billar que tiene un precio de $22 000 con intereses de 4% bimestral.

Para determinar el valor de estos pagos se requiere determinar el valor acumulado de la mesa de billar, 2 bimestres después de su adquisición, que sería el valor actual de la renta simple, cierta, vencida e inmediata que se requiere para liquidar la deuda.

Así, =PAGO(0.04,6,(22 000*(1.04^2))) produce el valor de $4 539.22 que se desea, en valor negativo, tal como se comenta antes, dado que Excel señala que se trata de una erogación.

Observe en la expresión anterior que (22 000*(1.04^2)), que es el tercer elemento de la función "PAGO" separado por comas, equivale al valor actual de esta función y es, al mismo tiempo, el valor del mueble dos bimestres después de haber sido adquirido. Es necesario destacar que los parámetros de las funciones de Excel, como el valor actual en este caso, pueden ser determinados por otros cálculos y no necesariamente valores ya dados.

En el ejemplo 6.3.3 se desea determinar el número de retiros mensuales de $500 que se pueden hacer, comenzando seis meses después, de una cuenta de inversiones que paga 6% capitalizable mensualmente y en la que se depositan hoy $8 000.

Y, para plantear estas condiciones en forma de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata, se requiere encontrar el monto de $8 000, cinco meses después y utilizar este monto como el valor actual de la anualidad. La función de Excel que se requiere es NPER, que da, precisamente, el número de periodos de una anualidad. Se determina n mediante la siguiente función de Excel:

=NPER(0.06/12,–500,(8000*((1+(0.06/12))^5)))

que arroja el valor de $n = 17.158711$ que es prácticamente igual al que se encontró antes con la calculadora. El resto del procedimiento es igual al descrito: se pagarían 17 mensualidades de $500 y una final de $381.76.

En el ejemplo 6.3.4 se debe calcular cuántos pagos mensuales de $725 debe realizar el señor Páramo, comenzando dentro de 6 meses, para liquidar una deuda de $10 075 que contrae hoy (valor actual), si, además, realiza un abono de $3 000 dentro de 3 meses y el interés pactado es de 37.68% capitalizable mensualmente.

Aquí se requiere encontrar el valor de la deuda al tercer mes, para restarle los $3 000 del pago parcial (abono) y luego llevar este valor dos meses adelante, con lo que se tiene el valor actual de la renta de $725 que se va a pagar a partir del sexto mes.

La función:

=NPER(0.3768/12,–725,((10075*((1+(0.3768/12))^3))–3000)*((1+(0.3768/12))^2))

arroja el valor 14.9998 que es, prácticamente, 15 y es, a la vez, el valor de n que se busca.

Sin embargo, en este caso vale la pena hacer notar que es considerablemente laborioso construir la función de Excel, sobre todo por la abundante cantidad de paréntesis que es necesario utilizar.

Aquí sí resulta más sencillo resolver el ejemplo mediante el empleo de una calculadora pero, por otro lado, también es importante recordar que aunque en ocasiones, como ésta, construir la función puede parecer demasiado laborioso, si se requiere hacer cálculos similares en forma repetida, una vez construida la función su uso puede facilitar el trabajo.

En el ejemplo 6.3.5 se pide determinar la tasa de interés que se cobra al pagar una deuda de $25 000 mediante 5 pagos mensuales de $7 000, comenzando 8 meses después de realizada la operación.

La función de Excel que se podría utilizar es "TASA" pero, como se trata de una anualidad diferida, no se puede aplicar. Se vio en el capítulo 6 que este ejemplo conduce a la siguiente ecuación:

$$25\,000(1+i)^7 = 7\,000\frac{1-(1+i^{-5})}{i}$$

que se simplifica a:

$$\frac{1-(1+i^{-5})}{i(1+i)^7} = 3.571429$$

Esta ecuación se resolvió ensayando en una calculadora valores de i hasta encontrar una aproximación satisfactoria y terminando por hacer una interpolación entre dos valores cercanos.

Se puede llegar a una aproximación satisfactoria, sin necesidad de interpolación, si se captura la ecuación en Excel y se hacen ensayos hasta llegar a la aproximación con el grado de precisión que se requiere.

La ecuación en formato de Excel es:

=(1–(1+A1)^(–5))/(A1*(1+A1)^7)

Si se anota esta ecuación en la celda, por ejemplo, B1, y se anota 0.03 en la celda A1 se obtiene el valor 3.72372104, que es superior al 3.571429 que se busca. Entonces se copia la ecuación a la celda B2, con lo que se convierte en:

=(1–(1+A2)^(–5))/(A2*(1+A2)^7)

Ahora se anota 0.04 en la celda A2, con lo cual se obtiene el valor 3.38301909 que es menor al que se busca. Y, así, se sabe que la i que se busca está entre 0.03 y 0.04. Ahora se puede copiar la fórmula a numerosos renglones de la columna B e ir ensayando valores en la columna A hasta encontrar el que se busca, con el nivel de precisión deseado.

En el ejemplo 6.3.6 se busca determinar la tasa de interés que pagó un Sr. Copoya al pagar un enganche de \$300 000 (después de haber dado un pago inicial de \$150 000) mediante tres pagos mensuales de \$110 000, empezando tres meses después de haber formalizado el trato. Este ejemplo condujo a la siguiente ecuación:

$$\frac{1-(1+i^{-3})}{i(1+i)^2} = 2.727272$$

que, como puede verse, tiene la misma forma que la ecuación del ejemplo anterior. El procedimiento que se sugiere seguir es también igual al que se usó en el ejemplo 6.3.5 y se comienza planteando la ecuación en Excel, que sería:

=(1–(1+A2)^(–3))/(A2*(1+A2)^2)

Luego se repite el proceso de ensayar valores copiando la fórmula en diversos renglones.

6.5 Resumen

En este capítulo se explicaron las anualidades diferidas, que son aquellas en las que se pospone el inicio de los cobros o depósitos para un periodo posterior al de la formalización del trato.

Este tipo de anualidades pueden resolverse mediante el empleo de las mismas fórmulas ya conocidas de las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas, simplemente haciendo las modificaciones necesarias para considerar la posposición de los pagos. Esto da lugar al planteamiento de una ecuación de equivalencia apropiada.

Se observó que en el cálculo del monto, la posposición o diferimiento de las rentas no tiene efecto sobre el comportamiento de la anualidad, y que se puede determinar en forma directa con la fórmula del monto de las anualidades simples, ciertas, ordinarias y vencidas.

Comprobación del capítulo

Si ha leído el capítulo completo, el lector debe:

- Identificar y explicar las características distintivas de las anualidades diferidas.
- Identificar y plantear situaciones que puedan representarse mediante anualidades diferidas.
- Resolver ejemplos de aplicación de este tipo de anualidades y que impliquen el cálculo de:
  - Monto
  - Valor actual o capital
  - Renta
  - Plazo
  - Interés
  - Tasa de interés
- Resolver ejercicios y aplicaciones de anualidades diferidas utilizando la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®.

Términos y conceptos importantes

- Anualidades diferidas.

Ejercicios complementarios

1. ¿En qué se diferencian las anualidades diferidas de las anticipadas?
2. Dé un ejemplo de una anualidad simple, cierta y
   a) vencida e inmediata,
   b) diferida,
   c) anticipada,
3. ¿Por qué es posible utilizar las fórmulas de las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas para resolver problemas de anualidades diferidas?
4. ¿Cuál es el valor actual de una serie de 12 pagos trimestrales de $8 350, el primero dentro de 9 meses, si el interés es de 18% convertible trimestralmente?
5. Se hace hoy un depósito de $5 000, y dentro de un año se comienzan a hacer pagos mensuales de $1 000 durante un semestre. ¿Cuál será el monto de lo invertido 2 años después de hecho el depósito inicial si el interés asciende a 1.33% mensual?
6. Se adquiere un automóvil mediante un enganche de $65 000, 10 pagos bimestrales de $16 754.63 comenzando dentro de 10 meses y un pago final de $27 890.40 dentro de 2 años y medio. ¿Cuál es el valor al contado del automóvil si se realiza la compra con intereses de 21% capitalizable mensualmente?
7. La Comercial, S.A., contrae hoy una deuda que debe pagar mediante 4 pagos semestrales de $22 800 comenzando dentro de un año, a 18% capitalizable semestralmente. Si desea liquidar su deuda mediante un solo pago realizado dentro de 4 años, ¿qué cantidad debe pagar?
8. ¿Cuál de las dos siguientes operaciones arroja un valor actual más elevado?
   a) Una serie de 12 pagos mensuales de $1 000 comenzando dentro de 8 meses, a 2% mensual.
   b) Un conjunto de 7 pagos bimestrales de $1 800 comenzando dentro de 4 meses, a 4% bimestral.
9. El 4 de enero se depositan $30 000 en una cuenta de inversiones. A partir del 4 de marzo del mismo año se comienzan a hacer depósitos bimestrales de $6 500, realizando el último el 4 de noviembre del mismo año. Si la inversión rinde 7.2% anual convertible bimestralmente, ¿cuánto se habrá acumulado el 4 de abril del año siguiente?
10. ¿Con qué cantidad pagada cada mes durante un año, comenzado dentro de 6 meses, se puede liquidar una deuda de $48 000 contraída el día de hoy, si el interés es de 1.83% mensual?
11. El licenciado Márquez debe pagar dentro de 12 meses la anualidad de un inmueble que adquirió a crédito. Su importe es de $18 500. Decide hacer 3 depósitos bimestrales, el primero de ellos dentro de 2 meses, para pagar con lo que se acumule. Si puede colocar sus depósitos a 2% semestral capitalizable bimestralmente, ¿de cuánto deben ser sus depósitos?
12. Al jubilarse, un empleado puede optar por recibir $155 000 un año antes de su jubilación, o 24 mensualidades a partir del momento de jubilarse. Si se calcula el interés a 8.4% convertible mensualmente, ¿de cuánto serían las mensualidades que recibiría?

13. Si se comienzan a hacer depósitos de $3 750 trimestrales dentro de 6 meses y se acumulan $51 953.19 con interés de 10.30% con capitalización trimestral, ¿cuántos depósitos se realizaron?
14. La doctora Neri debe pagar dentro de 6 meses la cantidad de $40 000. Si acuerda con su acreedor pagar su deuda mediante abonos bimestrales de $7 000 comenzando dentro de 10 meses, ¿cuántos pagos bimestrales de esa cantidad tendría que hacer, y qué pago final menor debe hacer para saldar su obligación, si el interés es de 19.6% capitalizable bimestralmente?
15. En la compra de un refrigerador que tiene un precio al contado de $9 750 se pagan $3 250 de enganche y el saldo con mensualidades de $415.14 comenzando dentro de 6 meses. Si el interés es de 11.70% capitalizable cada mes, y se compra el aparato el 15 de octubre del año 1, ¿en qué fecha se termina de pagar?
16. Una persona invierte hoy $30 000 en un negocio que le pagará 8 abonos semestrales de $13 500 comenzando dentro de 2 años. ¿Qué rendimiento anual efectivo tuvo la inversión?
17. ¿A qué interés nominal anual convertible mensualmente tendrían que colocarse 10 abonos anticipados mensuales de $2 000 para que produzcan un monto de $30 000 exactamente 12 meses después de colocar el último abono?
18. Un agricultor solicita un préstamo de avío para la compra de fertilizantes. El banco le otorga $60 000 a pagar en 12 meses con un periodo de 3 meses de gracia. ¿Cuál será el importe de las mensualidades si la tasa de interés es igual al CPP (costo porcentual promedio) más 6 puntos?
19. Facundo se vio en la necesidad de renegociar una deuda bancaria que ascendía a $287 324. Solicita un respiro al banco y éste le concede 3 meses de gracia. ¿Cuál es el importe de los 9 pagos que, a partir del cuarto mes, liquidarán la deuda de Facundo, si el banco le cobra un interés de 28% anual convertible mensualmente?
20. ¿Cuál sería el importe de los abonos del ejercicio anterior si el banco cobra a este tipo de créditos un interés de CPP (costo porcentual promedio de captación) más 10 puntos?
21. ¿Cuál sería el importe de los abonos del ejercicio anterior si el banco cobra a este tipo de créditos un interés de TIE (tasa interbancaria de equilibrio) más 10 puntos?
22. ¿Cuál sería el importe de los abonos del ejercicio anterior si el banco cobra a este tipo de créditos un interés de TIP (tasa interbancaria promedio) más 10 puntos?

Matemáticas en internet. Anualidades diferidas

6.3 Renta, plazo e interés

- Teoría de la renta, casos y problema 12.
  http://agora.pucp.edu.pe/eco3450821/
- Anualidades diferidas.
  http://www.buenastareas.com/ensayos/Anualidades-Diferidas/1277614.html

CAPÍTULO

7

Caso general de anualidades

TEMARIO

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

- Definir y explicar las anualidades
  - Generales, ciertas, vencidas e inmediatas
  - Generales y diferidas; y
  - Generales y anticipadas
- Plantear e identificar situaciones que se ajustan a esos tipos de anualidades
- Resolver problemas que impliquen esas categorías, para encontrar, según sea necesario
  - Monto
  - Valor actual
  - Plazo
  - Renta o
  - Tasa de interés
- Mediante el método de:
  - La tasa equivalente o el de
  - La renta equivalente
- Resolver ejercicios de anualidades generales mediante el empleo de la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®

7.1 Introducción

Como se mencionó en un capítulo anterior, las anualidades generales son aquellas en las que el periodo de pago no coincide con el periodo de capitalización.

EJEMPLO 7.1.1

Una persona contrae una deuda de $10 000. Para saldarla, acuerda hacer 6 pagos bimestrales vencidos de x cantidad, que comenzarán dos meses después y con intereses de 15% anual capitalizable mensualmente.

SOLUCIÓN:
En este caso, el periodo de pago tiene una duración de 2 meses, ya que se especifica que los pagos se harán *bimestralmente*.

Por otro lado, se anota que el interés es capitalizable mensualmente y, como resulta obvio, el periodo de capitalización es de un mes. Dado que los periodos de pago y de capitalización son distintos, este ejemplo ilustra el caso de una anualidad general. Ya hemos visto en capítulos anteriores todos los casos de las anualidades, exceptuando las generales y las contingentes. Como este tipo se analiza en un capítulo posterior, en éste se revisan, primordialmente, las anualidades generales, ciertas, vencidas e inmediatas.

Los casos diferido y anticipado de las anualidades generales se pueden resolver mediante la combinación de los métodos de los capítulos anteriores y los que se presentan aquí. Por ello, sólo para efectos de ilustración se presentan algunos ejemplos de estos casos en la última sección de este capítulo. Dada su importancia, vale la pena señalar desde este momento que:

- La forma más sencilla de resolver las anualidades generales es *modificarlas* para que se ajusten al caso simple, y luego utilizar las fórmulas ya conocidas de éstas para encontrar los valores deseados.
- Existen dos principales maneras de convertir anualidades generales en anualidades simples:

  1. Mediante la determinación de la tasa de interés equivalente.
  2. Mediante la determinación de la renta, o pago periódico, equivalente.

- Hay dos casos de anualidades generales:

  1. El periodo de pago es más largo que el periodo de capitalización o, al revés.
  2. El periodo de capitalización es más largo que el periodo de pago.

  Abundaremos sobre estas importantes cuestiones en las secciones restantes del capítulo.

7.2 Monto y valor actual

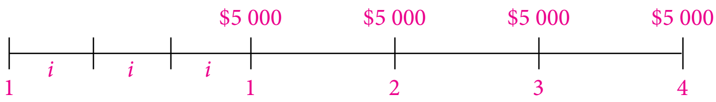
Se utiliza un ejemplo sencillo para ilustrar los dos métodos más comunes para resolver anualidades generales.

Caso 1. El periodo de pago es más prolongado que el de capitalización.

EJEMPLO 7.2.1

Encontrar el monto de un conjunto de 4 pagos trimestrales de $5 000, si el interés es de 36% anual convertible mensualmente.

SOLUCIÓN:
En primer lugar conviene auxiliarse de un diagrama para apreciar mejor las circunstancias:



$M = ?$
$R = \$5\,000$
$n = 4$ trimestres
$i = 0.36/12 = 0.03$ mensual

Observe que las rentas se consideran vencidas (al final de cada periodo de pago) ya que, como se mencionó en la introducción, nos ocuparemos de anualidades vencidas.

También, como el periodo de pago es de 3 meses y el de interés es de un mes, tenemos un caso de anualidad general con periodo de pago más largo que el de capitalización, por lo que utilizaremos los dos métodos mencionados para resolverla:

a) *Determinación de la tasa de interés equivalente*
Como puede verse en la gráfica anterior, en cada uno de los trimestres hay tres periodos de capitalización. Si consideramos un solo trimestre tendríamos que encontrar la tasa trimestral efectiva que es equivalente a una tasa mensual efectiva de 3.0%. Este procedimiento, que ya se vio en el capítulo sobre interés compuesto, sería:

$$i' = (1 + i)^p - 1 \qquad \textbf{(7.1)}$$
$$i' = (1.03)^3 - 1 = 1.092727 - 1 = 0.092727$$

donde:

i' = la tasa efectiva por periodo de la anualidad general; en este caso es la tasa efectiva trimestral (0.092727).
p = número de periodos de interés por periodo de pago; 3 en este caso.

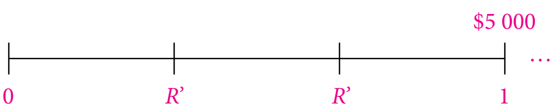
Ahora, luego de haber determinado la tasa efectiva por trimestre, hemos convertido la anualidad general en una simple, con:

$R = 5\,000$
$n = 4$
$M = ?$
$i' = 0.092727$

que se resuelve aplicando la fórmula conocida del monto para una anualidad simple:

$$M = R\frac{(1+i')^n - 1}{i'} \qquad \textbf{(7.2)}$$
$$M = 5\,000\frac{(1.092727)^4 - 1}{0.092727} = 5\,000(4.591552)$$
$$M = \$22\,957.76$$

b) *Determinación de la renta equivalente*
Nuevamente, con referencia al diagrama, ilustramos un solo trimestre:



Dado que se planteó el interés capitalizable cada mes, tendríamos que encontrar la renta mensual durante 3 meses, que sea equivalente a una renta trimestral de $5 000 y, como puede verse en la gráfica anterior, esto no es otra cosa que una anualidad simple con:

M = 5 000 (la renta de uno de los periodos de la anualidad general)
i = 0.03
p = 3
R' = ?

y, aplicando de nuevo la fórmula ya conocida:

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{pero con la nueva simbología:}$$

$$M = R'\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{7.3}$$

donde:

R' es la renta mensual equivalente a una renta trimestral de \$5 000.

Entonces:
$$5\,000 = R'\frac{(1.03)^3 - 1}{0.03} = R'(3.090900)$$

$$R' = \frac{5\,000}{3.090900} = \$1\,617.65$$

Ahora, se determina el monto de estas rentas equivalentes para el plazo completo de la anualidad:

$M = ?$
$R = 1\,617.65$
$n = 4$ trimestres por 3 meses cada uno = 12
$i = 0.03$

$$M = 1\,617.65\frac{(1.03)^{12} - 1}{0.03} = 1\,617.65(14.192029)$$

$M = \$22\,957.74$

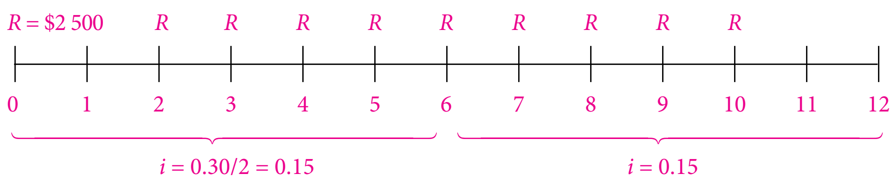
que es prácticamente el mismo resultado que se obtuvo mediante el otro método.

Caso 2. El periodo de pago más corto que el de capitalización.

EJEMPLO 7.2.2

Determinar el monto de un conjunto de 10 depósitos mensuales de \$2 500, si el interés que se paga es de 30% convertible semestralmente.

SOLUCIÓN:
Gráficamente:



En la gráfica se aprecia más claramente que el periodo de capitalización (6 meses) es más largo que el pago (1 mes). Ahora, para resolverlo mediante los dos métodos empleados antes:

a) *Determinación de la tasa de interés equivalente*
Como las rentas son mensuales, es necesario encontrar el interés efectivo mensual equivalente a 15% semestral también efectivo:

$$(1 + i)^6 = 1.15$$
$$1 + i = 1.15^{1/6}$$
$$i = 1.15^{1/6} - 1$$
$$i = 0.023567$$

y, el monto de la anualidad:

$$M = ?$$
$$R = 2\,500$$
$$i = 0.023567 \text{ (mensual efectivo)}$$
$$n = 10$$
$$M = 2\,500\frac{(1.023567)^{10} - 1}{0.023567} = 2\,500(11.129991)$$
$$M = \$27\,824.97 \text{ y}$$

b) *Determinación de la renta equivalente*

En este caso se determina la renta que coincide con el periodo de capitalización de 6 meses; en la gráfica se puede apreciar que esa renta es el monto de las rentas mensuales por semestre:

$$R' = 2\,500\frac{(1.023567)^{6} - 1}{0.023567} = 2\,500(6.364813)$$
$$R' = \$15\,912.03$$

y, para el plazo total de la operación:

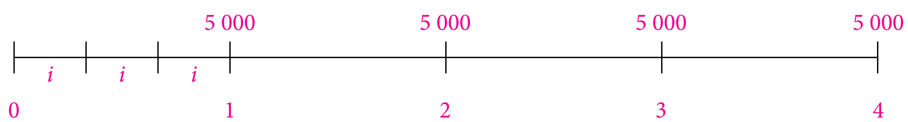
$$R = \$15\,912.03$$
$$n = 10 \text{ meses} = 10/6 \text{ semestres} = 1.666667 \text{ semestres}$$
$$i = 0.15 \text{ semestral}$$
$$M = 15\,912.03\frac{(1.15)^{1.66666667} - 1}{0.15} = 15\,912.03(1.748676)$$
$$M = \$27\,824.98$$

que es prácticamente igual al resultado anterior.

A continuación se presentan unos ejemplos de cálculo del valor actual.

EJEMPLO 7.2.3

Calcule el valor actual de la anualidad del ejemplo 7.2.1.
Reproduciremos aquí el diagrama correspondiente:



Solución:

$$C = ?$$
$$R = 5\,000$$
$$n = 4 \text{ trimestres}$$
$$i = 0.36/12 = 0.03 \text{ mensual}$$

a) *Determinación de la tasa equivalente por trimestre*

$$i' = 0.092727$$

La fórmula correspondiente sería:

$$C = R\frac{1-(1+i')^{-n}}{i}$$
$$C = R\frac{1-(1+i')^{-4}}{i'} = 5\,000\frac{1-(1.092727)^{-4}}{0.092727} = 5\,000\frac{1-0.701379}{0.092727}$$
$$C = 5\,000(3.220423) = \$16102.12$$

Además, luego de haber encontrado el monto en el ejemplo 7.2.1, se puede utilizar ese valor para verificar el que acabamos de encontrar, ya que:

$$M = C(1 + i')^n$$
$$M = 16\ 102.12(1.092727)^4 = 16\ 102.12(1.425761)$$
$$M = \$22\ 957.76$$

que es prácticamente el mismo valor que se encontró antes. Además:

b) *Determinación de la renta equivalente por mes*

En el ejemplo 7.2.1 se encontró que:

$$R' = 1617.65$$

y, el valor actual:

$$C = R'\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$
$$C = 1\,617.65\frac{1-(1.03)^{-12}}{0.03} = 1\,617.65(9.954004)$$
$$C = \$16\ 102.09$$

que es el mismo valor que se encontró antes (las diferencias se deben a los redondeos).

En este punto, conviene destacar que, para resolver anualidades generales, lo importante consiste en:

a) *Determinar la tasa equivalente* o
b) *Determinar la renta equivalente*

y después utilizar este valor para plantear una anualidad simple, también equivalente. Debido a que cualquiera de los dos métodos arroja el mismo resultado, la decisión de cuál de ellos seguir depende sólo de cuál resulte más cómodo al lector.

EJEMPLO 7.2.4

¿Cuál es el monto y el valor actual de un conjunto de 24 pagos bimestrales de $4 500 si el interés es de 5% trimestral efectivo? Utilice la tasa equivalente.

SOLUCIÓN:

Se requiere encontrar qué tasa efectiva bimestral es equivalente a la tasa efectiva trimestral:

$$(1 + i')^{3/2} = 1.05$$
$$i' = 1.05^{2/3} - 1 = 0.033062 \text{ efectivamente bimestral}$$

$$M = 4\,500\frac{(1.033062)^{24}-1}{0.033062} = 4\,500(35.778150)$$
$$M = \$161\,001.68$$

Una vez que se ha determinando el monto, el valor presente es:

$$C = 161\,001.68(1.033062)^{-24}$$
$$C = 161\,001.68(0.458107)$$
$$C = \$73\ 755.96$$

o, en forma de anualidad:

$$C = 4\,500\frac{1-(1.033062)^{-24}}{0.033062} = 4\,500(16.390213)$$
$$C = \$73\ 755.95$$

que es prácticamente el mismo valor que se encontró por el método del monto.

EJEMPLO 7.2.5

¿Qué pago quincenal es equivalente a uno trimestral de $2 250, si el interés es de 22% capitalizable semestralmente?

Solución:
En primer lugar hay que observar que 22% capitalizable semestralmente produce 11% efectivo semestral.

Luego, se determina la tasa quincenal equivalente considerando que hay 12 quincenas por semestre:

$$(1+i')^{12} = 1.11$$
$$i' = 1.11^{1/12} - 1 = 0.008735$$

y planteando la anualidad simple equivalente al pago trimestral, se tiene:

$$M = R\frac{(1+i')^n - 1}{i'}$$

$$2\,250 = R\frac{(1.008735)^6 - 1}{0.008735} = R(6.132561)$$

$$R = \frac{2\,250}{6.132561} = \$366.89$$

En este caso debe observarse que no sólo eran distintos periodos de pago y de capitalización, sino que también se incluía otro periodo de pago diferente a esos dos.

7.3 Renta

Como ya se había mencionado, también aquí se convierte la anualidad general en otra simple equivalente, y dado que se busca la renta, entonces se utiliza la tasa equivalente.

EJEMPLO 7.3.1

Un empleado adquiere un seguro para su automóvil a través de la póliza grupal de la empresa donde trabaja. Si el valor del seguro al contado es de $5 750, la vigencia de la póliza es de 1 año, el interés es de 18% capitalizable mensualmente, y va a pagar mediante descuentos quincenales por nómina, ¿cuánto es lo que le descontarán cada quincena?

Solución:
Aquí hay que encontrar la tasa quincenal equivalente. En este caso, 18% convertible mensualmente equivale a 18/12 = 1.5% mensual efectivo, mientras que la tasa quincenal:

$$(1+i')^2 = 1.015$$
$$i' = 1.015^{1/2} - 1 = 0.007472$$

y

$$C = R\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}$$

$$5\,750 = R\frac{1-(1.007472)^{-24}}{0.007472} = R(21.896534)$$

$$R = \frac{5\,750}{21.896534} = \$262.60$$

EJEMPLO 7.3.2

Un empleado desea ahorrar \$115 000 en los próximos 2 años. Si puede hacer depósitos semanales en una cuenta que paga 0.25% mensual efectivo, ¿cuánto debe depositar cada semana, si se consideran 48(12 × 4) semanas al año?

SOLUCIÓN:

$$(1 + i')^4 = 1.0025$$
$$i' = 1.0025^{1/4} - 1 = 0.000624$$

y

$$M = 115\,000$$
$$R = ?$$
$$n = 96$$
$$i' = 0.000624$$

$$M = R\frac{(1+i')^n - 1}{i'}$$

$$115\,000 = R\frac{(1.000624)^{96} - 1}{0.000624} = R(98.901891)$$

$$R = \frac{115\,000}{98.901891} = \$1\,162.76$$

EJEMPLO 7.3.3

Para la compra de un automóvil que cuesta \$237 250 se ofrece el siguiente plan:

a) Enganche de 40% del precio de compra.
b) 36 meses de plazo.
c) 4.65% efectivo trimestral de interés.

¿De cuánto tendrían que ser los 36 pagos mensuales?

SOLUCIÓN:

La *tasa efectiva mensual* es:

$$(1 + i')^3 = 1.0465$$
$$i' = 1.0465^{1/3} - 1 = 0.01526577$$

y el valor actual del adeudo es:

$$\text{Saldo} = \text{precio} - \text{enganche} = 237\,250 - 237\,250(0.40)$$
$$\text{Saldo} = 237\,250 - 94\,900 = 142\,350$$

Por ello, para calcular la renta:

$$C = R\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'} = R\frac{1-(1.015266)^{-36}}{0.015266} = R(27.538557)$$

$$142\,350 = R(27.538557)$$

$$R = \frac{142\,350}{27.538557} = \$5\,169.12$$

EJEMPLO 7.3.4

El ingeniero Martínez debe hacer 10 pagos bimestrales de \$5 650, comenzando dentro de dos meses. Si desea cambiar ese plan de pagos por otro en el que haga 15 pagos mensuales a partir del próximo mes, y se pactan los intereses a 12% anual efectivo, ¿cuál debe ser el importe de los pagos mensuales?

Solución:

- Primero se debe encontrar el valor actual del antiguo plan de pagos. Para hacerlo se calcula la tasa equivalente bimestral:

$$(1 + i')^6 = 1.12$$
$$i' = 1.12^{1/6} - 1 = 0.019068$$
$$C = R\frac{1-(1+i')^{-10}}{i'} = 5\,650\frac{1-(1.019068)^{-10}}{0.019068}$$
$$C = 5\,650(9.026545)$$
$$C = \$51\,000$$

- En segundo lugar se determina el valor de los pagos mensuales, para lo cual se debe calcular la tasa mensual equivalente:

$$(1 + i')^{12} = 1.12$$
$$i' = 1.12^{1/12} - 1 = 0.009489$$

y, para encontrar la renta:

$$C = R\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}$$
$$51\,000 = R\frac{1-(1.009489)^{-15}}{0.009489} = R(13.920025)$$
$$R = \frac{51\,000}{13.920025} = \$3\,663.79$$

7.4 Tasa de interés y plazo

EJEMPLO 7.4.1

¿A qué tasa de interés efectiva anual tendrían que hacerse 15 depósitos bimestrales de $600 para que arrojen un monto de $11 600 en el momento de hacer el último?

Solución:

$$M = 11\,600$$
$$R = 600$$
$$n = 15 \text{ bimestres}$$
$$i = ? \text{ (efectiva anual)}$$

Planteamos la anualidad bimestral:

$$M = R\frac{(1+i')^n - 1}{i'}$$
$$11\,600 = 600\frac{(1+i')^{15} - 1}{i'}$$
$$\frac{(1+i')^{15} - 1}{i} = \frac{11\,600}{600} = 19.333333$$

y, al igual que en capítulos anteriores, se necesita encontrar el valor de i que haga que la expresión

$$\frac{(1+i')^{15} - 1}{i'}$$

sea igual a 19.33. Para ello, se ensayan valores de i':

$$\text{Si } i' = 0.050 \qquad \frac{(1+i')^{15}-1}{i'} = 21.578563$$

$$\begin{aligned} i' &= 0.045 &\quad &= 20.784054 \\ i' &= 0.040 & &= 20.023587 \\ i' &= 0.035 & &= 19.295681 \\ i' &= 0.036 & &= 19.438727 \\ i' &= 0.0355 & &= 19.367047 \end{aligned}$$

y ahora se interpola entre $i' = 0.035$ e $i' = 0.0355$

0.035	i'	0.0355
19.295681	19.333333	19.367047

$$\frac{i' - 0.035}{0.0355 - 0.035} = \frac{19.333333 - 19.295681}{19.367047 - 19.295681} = 0.527590$$

$$\frac{i' - 0.035}{0.0005} = 0.527590$$

$$i' = 0.035 + 0.527590(0.0005) = 0.035 + 0.0002638$$
$$i' = 0.0352638$$

Entonces, $i' = 0.035264$ es la tasa bimestral. Para encontrar la tasa efectiva anual:

$$j = (1.035264)^6 - 1 = 0.231138$$
$$j = 23.11\%$$

EJEMPLO 7.4.2

Se depositan hoy \$32 000 y se hacen 24 retiros trimestrales de \$2 000 comenzando al trimestre siguiente.

¿Qué tasa anual capitalizable semestralmente ganó el depósito?

SOLUCIÓN:

$$C = 32\,000$$
$$R = 2\,000$$
$$n = 24 \text{ trimestres}$$
$$C = R\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}$$
$$32\,000 = 2\,000\frac{1-(1+i')^{-24}}{i'}$$
$$\frac{1-(1+i')^{-24}}{i'} = \frac{32\,000}{2\,000} = 16$$

Ensayando valores:

$$\text{Si } i' = 0.02 \qquad \frac{1-(1+i')^{-24}}{i'} = 18.913925$$

$$\begin{aligned} i' &= 0.025 &\quad &= 17.884986 \\ i' &= 0.030 & &= 16.935542 \\ i' &= 0.035 & &= 16.058368 \\ i' &= 0.036 & &= 15.891021 \\ i' &= 0.0355 & &= 15.974369 \\ i' &= 0.0354 & &= 15.991116 \\ i' &= 0.03535 & &= 15.999500 \\ i' &= 0.03530 & &= 16.007890 \end{aligned}$$

Interpolando:

0.03530	i'	0.03535
16.007890	16	15.999500

$$\frac{i' - 0.03530}{0.03535 - 0.03530} = \frac{16 - 16.007890}{15.999500 - 16.007890}$$

$$\frac{i' - 0.03530}{0.00005} = 0.9404052$$

$$i' = 0.03530 + 0.9404052(0.00005) = 0.03530 + 0.000047$$
$$i' = 0.035347$$

Comprobando:

$$\frac{1 - (1.035347)^{-24}}{0.035347} = 16$$

Por lo tanto, la tasa trimestral aproximada es 3.53%. Para encontrar la tasa anual capitalizable semestralmente, se calcula la tasa efectiva semestral elevando la tasa trimestral al cuadrado.

$$i = (1.035347)^2 - 1 = 0.071943$$

mientras que la tasa anual capitalizable semestralmente se determina multiplicando la tasa semestral por dos.

$$(0.071943)(2) = 0.143886$$
$$= 14.39\% \text{ capitalizable semestralmente.}$$

A continuación se presentan unos ejemplos de plazo.

EJEMPLO 7.4.3

Si una persona desea acumular \$8 500 mediante depósitos semestrales de \$595.74 en una cuenta que rinde 2.5% bimestral, ¿cuántos depósitos debe hacer?

SOLUCIÓN:

En primer lugar se calcula la tasa semestral equivalente a 2.5% bimestral:

$$i' = (1.025)^3 - 1 = 0.076891 \text{ y}$$

$$M = R\frac{(1+i')^n - 1}{i'}$$

$$8\,500 = 595.74\frac{(1.076891)^n - 1}{0.076891}$$

$$(1.076891)^n = \frac{8\,500(0.076891)}{595.74} + 1 = 2.0970784$$

$$n \log(1.076891) = \log 2.0970784$$

$$n = \frac{\log 2.0970784}{\log 1.076891} = \frac{0.321614}{0.032172} = 10$$

Deberá realizar 10 depósitos semestrales de \$595.74.

EJEMPLO 7.4.4

El arquitecto Méndez debe pagar un préstamo hipotecario que acaba de obtener para construir un edificio de departamentos en condominio. El importe del préstamo es de \$1 875 000 y lo debe liquidar con pagos mensuales de \$125 000 comenzando un mes después. Si el interés pactado es de 25% anual efectivo, *a*) ¿cuántos pagos completos debe hacer? *b*) ¿Con qué pago final menor, realizado un mes después del último pago completo, liquida totalmente el préstamo?

SOLUCIÓN:

a) *Encontramos la tasa mensual equivalente a 25% efectivo anual:*

$$(1+i)^{12} = 1.25$$
$$i' = 1.25^{1/12} - 1 = 0.018769$$

Sustituyendo esta tasa y los demás datos en

$$C = R\,\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}$$

$$1\,875\,000 = 125\,000\,\frac{1-(1.018769)^{-n}}{0.018769}$$

$$\frac{1\,875\,000}{125\,000} = \frac{1-(1.018769)^{-n}}{0.018769}$$

$$\frac{1\,875\,000(0.018769)}{125\,000} = 1-(1.018769)^{-n}$$

$$\frac{1\,875\,000(0.018769)}{125\,000} - 1 = -(1.018769)^{-n}$$

$$(1.018769)^{-n} = 1 - \frac{(1\,875\,000)(0.018769)}{125\,000} = 1 - 0.281535 = 0.718465$$

$$-n(\ln 1.018769) = \ln 0.718465$$

$$-n = \frac{\ln 0.718465}{\ln 1.018769}$$

$$n = -\frac{\ln 0.718465}{\ln 1.018769} = -\left[\frac{-0.330638}{0.018595}\right]$$

$$n = 17.781016$$

Por lo tanto, debe hacer 17 pagos completos.

b) *Para encontrar el valor del último pago:*

$$x\left[\text{Último pago}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{Valor (monto) del}\\ \text{préstamo al}\\ \text{decimoctavo mes}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\text{Valor de los 17}\\ \text{pagos al}\\ \text{decimoctavo mes}\end{array}\right]$$

$$x = 1875(1.018769)^{18} - \left[125\,\frac{(1.018769)^{17}-1}{0.018769}\right](1.018769)$$

$$x = 1875(1.397536) - 125(19.808665)(1.018769)$$

$$x = 2\,620\,379.89 - 2\,522\,556.74 = 97\,823.15$$

Se debe efectuar un último pago de \$97 823.15 para saldar la deuda.

EJEMPLO 7.4.5

Para pagar la anualidad de un inmueble que vence dentro de 9 meses y que es de \$58 000, la señora Izquierdo decide hacer depósitos de \$7 500 cada mes en una cuenta que abona 10% efectivo anual. Si decide hacer depósitos completos y un depósito final mayor para acumular lo que necesita:

a) ¿Cuándo debe comenzar a hacer los depósitos?
b) ¿Cuál es el valor del último depósito mayor?

SOLUCIÓN:

a) *Tasa mensual equivalente:*

$$i' = 1.10^{1/12} - 1 = 0.007974$$

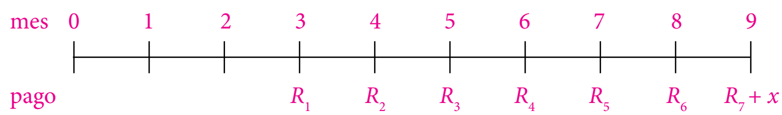
y ya que
$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

entonces
$$58\,000 = 7\,500\frac{(1.007974)^n - 1}{0.007974}$$

y despejando se tiene
$$(1.007974)^n = \frac{58\,000(0.007974)}{7\,500} + 1 = 1.0616656$$

$$n = \frac{\log 1.0616656}{\log 1.007974} = \frac{0.025988}{0.003449} = 7.534938$$

Así, tendría que hacer seis pagos iguales y uno mayor. Por ello, debe comenzar con el primero dentro de 3 meses, como se muestra en la siguiente gráfica:



b) *Valor del último pago*: $R + x$

$$x = 58\,000 - \left[7\,500\frac{(1.007974)^7 - 1}{0.007974}\right]$$

$$x = 58\,000 - 53\,772.73 = 4\,227.27$$
$$R + x = 7\,500 + 4\,227.27$$
$$R + x = 11\,727.27$$

El depósito final mayor deberá ser de \$11 727.27.

Ejercicios de las secciones 7.1 a 7.4

1. ¿Cuál es el monto de una renta de \$3 320 que se paga durante 10 bimestres vencidos, si el interés es de

   a) 5.4% trimestral? *b*) 31% efectivo anual? *c*) 1.7% mensual?

2. El señor López tiene 2 empleos: en uno gana \$4 870 quincenales y en el otro \$3 950 mensuales. ¿Cuál es el monto mensual de su sueldo global si se considera un interés de 12% anual con capitalización trimestral?
3. ¿A qué cantidad pagada el día de hoy equivalen 25 pagos quincenales de \$280 si el interés es de 25% convertible semestralmente?
4. Al comprar una máquina, La Industrial, S.A., paga \$10 000 al contado y se compromete a hacer 5 pagos de \$2 700 a los 30, 60, 90, 120 y 150 días respectivamente. Si el interés es de 22% convertible quincenalmente, ¿qué precio al contado pagó la empresa?
5. Para liquidar una deuda que contrae el día de hoy, Martín acuerda pagar 15 abonos mensuales vencidos de \$2140 y un pago final de \$3 882.21, un mes después del último abono de \$2140. Si el interés convenido fue de 19% efectivo anual, ¿cuál fue el importe de la deuda?
6. ¿Cuál es la mejor alternativa para adquirir un automóvil?

   a) \$185 000 al contado.
   b) \$12 995 mensuales durante 12 meses vencidos con interés de 15% efectivo anual.
   Justifique su respuesta.

7. ¿Qué inversión acumula un monto mayor a 2 años:

   a) $1 880 quincenales vencidos a 27% capitalizable bimestralmente?
   b) $9 500 bimestrales vencidos a 1.125% efectivo quincenal?

8. ¿Qué renta mensual produce un monto de $97 500, en 4 años a 1.1% bimestral?
9. ¿Qué renta bimestral durante 5 años tiene un valor actual de $182 500, si se considera un interés de 1.89% mensual?
10. Para pagar un préstamo de $40 000, José Luis ofrece hacer abonos quincenales vencidos durante 2 años. ¿Qué cantidad debe pagar cada 15 días si el interés que le cobran es de 24% convertible semestralmente?
11. Para comprar una casa en condominio con valor de $3 800 000 se debe pagar un enganche de 20% mediante 6 pagos mensuales vencidos. ¿Cuál debe ser el importe de los pagos si el interés es de 18% convertible semestralmente?
12. A un estudiante de maestría se le otorgó una beca-crédito de $7 000 mensuales durante 2 años. Debe pagar la beca mediante 24 abonos mensuales, comenzando un mes después de recibir la última mensualidad de la beca. Si se le cobra interés a razón de 10% anual efectivo, ¿cuánto debe pagar cada mes?
13. ¿Qué cantidad bimestral durante 2 años es equivalente a 10 pagos trimestrales de $4 500 cada uno si el interés es de 21% convertible semestralmente?
14. ¿A qué tasa de interés anual con capitalización mensual, 20 depósitos trimestrales vencidos de $5 400 producen un monto de $150 000?
15. Se pagó una deuda de $13 700 mediante 6 abonos trimestrales vencidos de $2 818.18. ¿Qué interés efectivo anual se pagó?
16. Un fondo de inversiones ofrece pagar $12 310 mensuales de interés por cada millón invertido. ¿Qué tasa anual efectiva paga?
17. ¿Cuál de las dos siguientes alternativas de inversión es mejor para un capital de $50 000?

   a) Un flujo de12 pagos trimestrales vencidos de $5 107.43.
   b) Un flujo de 18 pagos bimestrales vencidos de $3 408.86.

18. ¿Cuántos pagos de $1 331.43 quincenales vencidos tendrían que hacerse para amortizar una deuda de $14 990 si el interés es de 2% efectivo mensual?
19. A un empleado le ofrecen liquidarlo en la empresa donde trabaja mediante un pago en efectivo de $95 000. Si en vez de aceptar esta suma desea recibir $4 000 mensuales vencidos, ¿cuántos pagos de este valor debe recibir si se consideran intereses de 16% capitalizables semestralmente?

    Calcule el número de pagos y el pago final menor que equivalen a la liquidación en efectivo.

20. ¿De qué manera se acumulan $15 000 con mayor rapidez, con interés a 2% bimestral?

   a) Depositando $5 000 el día de hoy.
   b) Depositando $260 al final de cada trimestre.

7.5 Anualidades generales anticipadas

Este caso, como se vio antes, se refiere a las operaciones en que el pago o depósito se hace al principio del periodo de pago. El término *generales* señala que el periodo de pago y el de capitalización no coinciden.

Al igual que se ha hecho en las secciones anteriores de este capítulo, la solución se obtiene mediante la conversión de la anualidad general en una anualidad simple y vencida equivalente.

EJEMPLO 7.5.1

¿Cuál es el valor actual de un conjunto de 25 pagos semestrales anticipados de \$2 500 si el interés es de 25% capitalizable cada 4 meses?

Solución:
En primer lugar se debe calcular la tasa efectiva equivalente por semestre. En este caso, 25% capitalizable cada 4 meses equivale a 6.25% efectivo cada cuatro meses y la tasa efectiva por semestre es:

$$i' = (1.0625)^{3/2} - 1 = 0.095200$$

Ahora, una anualidad anticipada:

2 500	2 500	2 500	…	2 500	2 500		
0	1	2	…	23	24	25	Semestres

El procedimiento para determinar el valor actual de esta anualidad, como se vio en el capítulo referente a anualidades anticipadas, es:

$$C = 2\,500 + 2\,500\frac{1-(1.095200)^{-24}}{0.095200}$$
$$C = 2\,500(1 + 9.319741)$$
$$C = \$25\,799.36$$

EJEMPLO 7.5.2

¿Qué depósito anticipado quincenal se debe hacer durante 5 bimestres para acumular \$3 900, 15 días después de realizar el último depósito, si el dinero produce 24% de interés capitalizable cada mes?

Solución:
La tasa equivalente:

$0.24/12 = 0.02$ es la tasa efectiva mensual e

$i' = 1.02^{1/2} - 1 = 0.009950$ es la tasa efectiva quincenal

luego,

$n = 5(4) = 20$ quincenas (bimestres por número de quincenas en un bimestre), y como los depósitos son anticipados:

R	R	R	…	R	
0	1	2	…	19	20

$$3\,900 = R\frac{(1.009950)^{20}-1}{0.009950}(1.009950)$$

Monto de 20 pagos anticipados a la 19a. quincena — que multiplicado por este factor da el monto quince días después

$$3\,900 = R(22.008298)(1.009950)$$
$$R = \frac{3\,900}{22.227393} = 175.46$$

EJEMPLO 7.5.3

Se puede comprar un artículo que cuesta \$999 mediante 9 pagos "chiquititos" mensuales de \$129, comenzando en el momento de la compra. ¿Qué interés efectivo anual se paga en la operación?

Solución:

$$999 = 129 + 129\frac{1-(1+i')^{-8}}{i'}$$

$$\frac{1-(1+i')^{-8}}{i'} = \frac{999-129}{129} = 6.74418605$$

Ensayando valores:

$$\text{Si } i' = 0.05 \qquad \frac{1-(1+i')^{-8}}{i'} \qquad = 6.46321273$$

$$\begin{array}{ll} i' = 0.04 & = 6.73274482 \\ i' = 0.035 & = 6.87395551 \\ i' = 0.037 & = 6.81693804 \\ i' = 0.039 & = 6.76063340 \\ i' = 0.0395 & = 6.74666726 \\ i' = 0.03955 & = 6.74527307 \end{array}$$

interpolando:

$$\frac{i'-0.03955}{0.040-0.03955} = \frac{6.74418605-6.74527307}{6.73274482-6.74527307} = 0.0867655$$

$$i' = 0.03955 + (0.00045)(0.0867655)$$
$$i' = 0.03958904$$

y el interés efectivo anual es:

$$i = (1.03958904)^{12} - 1 = 0.59345692$$

o 59.34% anual, aproximadamente.

7.6 Anualidades generales diferidas

Son aquellas en las que el periodo de pago y el de capitalización de los intereses no coinciden y en las que, además, se pospone el inicio de los pagos o depósitos para un periodo posterior al de la realización de la operación.

EJEMPLO 7.6.1

Al cumplir 21 años Juan Carlos deposita \$21 000 en una cuenta de inversión que produce 13.5% capitalizable mensualmente. Si desea comenzar a retirar trimestralmente \$1500 el día de su cumpleaños número 25, ¿qué edad tendrá al realizar el último retiro menor de \$1500, 3 meses después de haber hecho el último retiro completo?

Solución:

La tasa equivalente:

$$0.135/12 = 0.01125 \text{ mensual}$$
$$(1.01125)^3 - 1 = 0.034131 \text{ trimestral}$$

El valor de su depósito un trimestre antes de cumplir 25 años:

$$21\,000(1.034131)^{15} = 21\,000(1.654375) = 34\,741.88$$

La anualidad simple equivalente:

$$34\,741.88 = 1500\frac{1-(1.034131)^{-n}}{0.034131}$$

$$(1.034131)^{-n} = 1 - \frac{(34\,741.88)(0.034131)}{1500} = 0.209483$$

$$n = -\frac{\ln 0.209483}{\ln 1.034131} = -\frac{-1.563111}{0.033561} = 46.5752$$

Hará entonces 46 retiros completos y un retiro más de menor valor. Por ello, al hacer este último retiro tendrá 25 años más 46 trimestres, o sea 36.5 años. (Observe que se suman 46 trimestres y no 47, porque el primer retiro lo hace al cumplir los 25).

EJEMPLO 7.6.2

El 2 de marzo del año 1, la Compañía Comercial, S.A., contrae una deuda con valor de $1 700 000 al 2 de junio del año 2. Poco tiempo antes de que venza su adeudo, la empresa ofrece a su acreedor cambiar ese pago único al 2 de junio por 5 pagos mensuales a realizar el primero el 2 de octubre del mismo año 2. Si acuerdan un interés efectivo anual de 11.25%, ¿de cuánto deben ser los pagos mensuales?

Solución:
Tasa equivalente:

$$(1 + i')^{12} = 1.1125$$
$$i' = (1.1125)^{1/12} - 1 = 0.008924$$

El valor del adeudo al 2 de septiembre del año 2:

$$1\,700\,000(1.008924)^3 = 1\,745\,919.76$$

La anualidad simple equivalente:

$$1\,745\,919.76 = R\frac{1-(1.008924)^{-5}}{0.008924} = R(4.868878)$$

$$R = \frac{1\,745\,919.76}{4.868878} = \$358\,587.67$$

Ejercicios de las secciones 7.5 y 7.6

21. El señor Garnica, que alquila una casa por $2 800 mensuales anticipados, le quiere proponer a su arrendador pagar la renta por trimestre adelantado. Si se considera un interés de 20% capitalizable semestralmente, ¿de cuánto debería ser la renta trimestral?

22. El 15 de febrero se hace el primero de un conjunto de 25 depósitos bimestrales de $995. Si el dinero rinde 5% capitalizable mensualmente, ¿cuál es el valor actual de los depósitos?

23. ¿Cuál es el monto de 15 pagos semestrales anticipados de $4 200 en el momento de hacer el último, si el interés es de 1.02% mensual?

24. Un comerciante firmó un pagaré que vence dentro de 8 meses. Para liquidarlo, decide hacer depósitos mensuales anticipados de $3 528.27 para tener, en el momento de vencer el pagaré y hacer el último depósito, la cantidad que debe pagar. Si el depósito rinde 7.5% anual efectivo, ¿cuál es el valor del pagaré a su vencimiento?

25. ¿Qué renta mensual anticipada es equivalente a una renta mensual vencida de $8 000 si el interés es de 1.8% bimestral?

26. Una empresa adquiere un terreno con valor de $750 000, y acuerda pagarlo mediante 6 pagos trimestrales comenzando en el momento de formalizar la operación. Si se cobran intereses de 1.2% mensual, ¿de cuánto deben ser los pagos?

27. ¿Cuál es el valor al contado de un artículo que se vende mediante 12 pagos bimestrales anticipados de $335, si el interés es de 28% capitalizable trimestralmente?
28. Se debe pagar dentro de un año una anualidad de $17 500. ¿Qué renta mensual anticipada, pagada desde hoy y hasta el vencimiento de la anualidad, equivale a ésta si el interés es de 8.2% efectivo anual?
29. ¿En cuánto tiempo una renta anticipada de $882.79 quincenales producen un monto de $14 000 en el momento de hacer el último pago si el interés es de 2.8% bimestral efectivo?
30. Se va a pagar una deuda de $37 500 contraída hoy mediante pagos semestrales de $7 750. Si el interés es de 19% capitalizable mensualmente, ¿cuántos pagos completos se deben hacer y cuál es el valor del último pago menor de $7 750 que amortiza completamente la deuda?
31. En la compra de un automóvil que cuesta $226 950, el plan a crédito consiste en hacer 18 pagos bimestrales anticipados de $17 287.46. ¿Cuál es la tasa anual con capitalización mensual que se carga en la operación?
32. ¿A qué tasa efectiva anual se tendrían que colocar 25 rentas mensuales de $175 para que arrojen un monto de $5 200 en el momento de hacer el último depósito?
33. Calcule el monto y el valor actual de una serie de depósitos trimestrales de $10 215, comenzando dentro de 4 meses y durante 2 años si el interés es de 17.5% anual efectivo.
34. Calcule el monto y el valor actual de 3 pagos de $8 680 con fechas de 15 de octubre, noviembre y diciembre, respectivamente, considerando que hoy es 30 de abril y la tasa de interés es de 9.6% capitalizable semestralmente.
35. Un almacén ofrece un plan de "compre ahora y pague después". Si un cliente compra el 15 de septiembre una lavadora y acuerda pagarla mediante 12 abonos quincenales de $410.83 comenzando el 15 de enero del año siguiente y el interés que cobra el almacén es de 23% efectivo anual, ¿cuál es el precio al contado de la máquina?
36. Una empresa debe redimir dentro de 18 meses una emisión de bonos. Para reunir la cantidad necesaria se va a constituir un fondo mediante depósitos mensuales de $724 686 comenzando dentro de 7 meses y hasta la fecha de vencimiento de los documentos. Si el fondo gana 12% de interés capitalizable semestralmente, ¿cuál es el valor de los bonos a su vencimiento?
37. ¿Qué renta pagada los días primero de junio, julio, agosto y septiembre equivale a un pago de $3 720 realizado hoy primero de febrero si el interés es de 20.5% efectivo semestral?
38. ¿Con cuántos pagos bimestrales de $32 300 comenzando dentro de un año se amortiza una deuda de $200 000 que vence dentro de 6 meses si el interés es de 22% efectivo anual?

7.7 Aplicaciones

Las aplicaciones de las anualidades generales son muy diversas y aquí se ilustrarán con un par de casos: la compra de tiempos compartidos y las anualidades variables.

7.7.1 Tiempos compartidos

La compra de tiempos compartidos para las vacaciones ha adquirido gran popularidad pues ofrece, según sus promotores, descuentos importantes en el costo del hospedaje en zonas turísticas para quienes los adquieren. Así, una propiedad vacacional o "tiempo compartido" es el derecho a usar semanas específicas o distintas noches de un desarrollo turístico durante un periodo específico o variable. Simplemente dicho, es la precompra de una vacación.

Los precios y esquemas de pago son muy variables, pero el esquema básico es el siguiente:

- Se entrega un enganche (normalmente constituye la comisión del vendedor).
- Se realizan abonos mensuales durante un periodo que puede variar, típicamente, desde 36 hasta 60 meses.

- Se realiza un pago anual por mantenimiento para disfrutar el periodo vacacional adquirido.
- En caso de requerir las vacaciones en un hotel distinto a aquel en el cual se adquirió el tiempo compartido, deberá afiliarse a una empresa que realice el intercambio, para lo cual deberá pagarse una cuota anual de afiliación y una cuota al momento de realizar el intercambio.

EJEMPLO 7.7.1.1

Una empresa ofrece a Juan Manuel una tentadora e irresistible oferta para adquirir un tiempo compartido que le otorga el derecho de uso de una habitación estándar doble durante un periodo de 20 años, mediante el siguiente plan de pagos:

- Enganche de $12 000 a la firma del contrato.
- Cuarenta y ocho pagos mensuales de $1 000 cada uno.
- Pago anual por mantenimiento de $4 340, los cuales tendrán incrementos anuales acordes a la inflación, la cual se estima en 5% en promedio.

Juan Manuel desea decidir si es conveniente adquirir el tiempo compartido o adquirir sus vacaciones anualmente a los precios de mercado, tomando en consideración que en un hotel de categoría similar la habitación doble tiene un costo promedio por noche de $1 000 y se estima que los precios crecerán al mismo ritmo de la inflación.

Si la tasa de interés del mercado es de 6% efectivo anual, determinar cuál alternativa es más conveniente para Juan Manuel.

Para resolver este problema es necesario proceder por pasos:

1. Determinar el valor presente de la inversión necesaria para adquirir el tiempo compartido.

$$VAI = \underbrace{12\ 000}_{\boxed{\text{Enganche}}} + \underbrace{1000\,\frac{1-(1+i)^{-48}}{i}}_{\boxed{\text{48 mensualidades}}}$$

a) *Enganche*: El enganche de $12 000 se encuentra a su valor presente, pues debe entregarse en el momento de firmar el contrato de compra.

b) *Valor presente de los pagos mensuales*: El valor presente de los 48 pagos mensuales de $1 000 se puede obtener mediante el empleo de la fórmula del valor presente de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata, una vez que se haya determinado la tasa de interés efectiva por periodo, tal como se vio en este capítulo. Puesto que la tasa de interés que se expresa en forma anual (6%), es necesario calcular la tasa de interés efectiva mensual:

$$i' = (1+0.06)^{1/12} - 1$$
$$i' = (1.06)^{1/12} - 1$$
$$i' = 1.004868 - 1$$
$$i' = 0.004868$$

La tasa mensual se sustituye en la fórmula del valor presente de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata:

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$A = 1\ 000\left[\frac{1-(1+0.004868)^{-48}}{0.004868}\right]$$

$$A = 1\ 000\left[\frac{1-(0.792093)}{0.004868}\right]$$

$$A = 1\ 000\left[\frac{(0.207906)}{0.004868}\right]$$

$$A = 1\,000[42.708779]$$
$$A = 42\,708.78$$

El valor presente de los 48 pagos mensuales de mil pesos, considerando una tasa de interés de mercado de 6%, equivaldría a 42 708.78.

Por lo tanto, el valor presente de la inversión asciende a 54 708.78, resultado de sumar el valor presente del enganche y el valor presente de los pagos mensuales.

2. Determinación del valor presente de los pagos de mantenimiento anual.
El valor presente de los pagos de mantenimiento anual constituye un ejemplo de una anualidad variable, puesto que los incrementos en ellos se calculan mediante el empleo de una tasa de interés (en este caso la inflación, 5%), en tanto que el descuento se realiza empleando una tasa de interés diferente (la tasa de interés del mercado, que en este caso equivale a 6%):

$$A_{(R;q)n]i} = R\left[\frac{1-[(1+q)^n \times (1+i)^{-n}]}{i-q}\right]$$

donde:

R = pago periódico.
q = tasa de crecimiento del pago periódico (en este caso la inflación).
i = tasa de descuento (en este caso la tasa de interés del mercado).
n = número de periodos.

Como puede observarse en esta fórmula, se utilizan simultáneamente un factor de acumulación $(1 + q)^n$ y un factor de descuento $(1 + i)^{-n}$.

Aplicando la fórmula se tiene:

$$A_{(4\,340;0.05)20]0.06} = 4\,340\left[\frac{1-[(1+0.05)^{20} \times (1+0.06)^{-20}]}{0.06-0.05}\right]$$
$$A_{(4\,340;0.05)20]0.06} = 4\,340\left[\frac{1-[(2.653298) \times (0.311805)]}{0.01}\right]$$
$$A_{(4\,340;0.05)20]0.06} = 4\,340\left[\frac{1-[0.827311]}{0.01}\right]$$
$$A_{(4340;0.05)20]0.06} = 4\,340\left[\frac{0.172689}{0.01}\right]$$
$$A_{(4\,340;0.05)20]0.06} = 4\,340[17.268923]$$
$$A_{(4\,340;0.05)20]0.06} = 74\,947.13$$

3. Determinación del valor total del tiempo compartido.
El valor total del tiempo compartido por un periodo de 20 años ascendería a 129 655.91 que es el resultado de sumar el valor presente de la inversión para adquirir el tiempo compartido más el valor de los gastos de mantenimiento anual.

$$VTtiempo\_compartido = 54\,708.78 + 74\,947.13$$
$$VTtiempo\_compartido = 129\,655.91$$

El valor actual de cada semana vacacional equivaldría a \$6 482.80:

$$VTsemana = 129\,655.91/20 = 6\,482.80$$

El valor actual de cada noche de habitación equivaldría a 926.11:

$$VTnoche = 6\,482.80/7 = 926.11$$

4. Determinación del valor presente de los pagos anuales por compra directa de habitaciones de hotel.
Al igual que los pagos de mantenimiento anual, el valor de la noche de hotel constituye un ejemplo de una anualidad variable, puesto que los incrementos se calculan mediante el em-

pleo de una tasa de interés (en este caso la inflación, 5%), en tanto que el descuento se realiza empleando una tasa de interés diferente (la tasa de interés del mercado, que en este caso equivale a 6%).

$$A_{(R;q)n]i} = R\left[\frac{1-[(1+q)^n \times (1+i)^{-n}]}{i-q}\right]$$

donde:

R = 1 000 (valor actual de la noche de hotel).
q = 0.05 tasa de crecimiento del pago periódico (en este caso la inflación).
i = 0.06 (la tasa de interés del mercado).
n = 20 periodos.

Aplicando la fórmula se tiene:

$$A_{(1\,000;0.05)20]0.06} = 1000\left[\frac{1-[(1+0.05)^{20} \times (1+0.06)^{-20}]}{0.06-0.05}\right]$$

$$A_{(1\,000;0.05)20]0.06} = 1000\left[\frac{1-[(2.653298)\times(0.311805)]}{0.01}\right]$$

$$A_{(1\,000;0.05)20]0.06} = 1000\left[\frac{1-[0.827311]}{0.01}\right]$$

$$A_{(1\,000;0.05)20]0.06} = 1000\left[\frac{0.172689}{0.01}\right]$$

$$A_{(1\,000;0.05)20]0.06} = 1000[17.268923]$$

$$A_{(1\,000;0.05)20]0.06} = 17\,268.92$$

Por lo tanto, el valor actual de 20 noches de hotel durante 20 años consecutivos, considerando una tasa de inflación de 5% y una tasa de interés de 6%, equivaldría a $17 268.92; el valor de una noche se obtendría dividiendo dicha cantidad entre 20, lo que da como resultado:

$$VTnoche = 17\,268.92/20 = 863.44$$

Por lo anterior se puede concluir que resulta más costoso adquirir las vacaciones a través de un tiempo compartido, pues en el primer caso la noche tendría un costo de 926.14 y en el segundo de 863.44, esto es, 7.3% más.

Si además se consideran las cantidades que deberán pagarse en el caso de que se deseen realizar intercambios a otros centros vacacionales y que por lo general ascienden a 100 dólares por año, más 100 a 150 dólares por concepto de tramitación del intercambio, se verá que en este caso concreto no resulta tan atractiva la adquisición del periodo vacacional.

7.7.2 Anualidades variables

Una anualidad variable es un conjunto de pagos que se realizan a intervalos iguales, pero cuya cuantía es variable, incrementándose o reduciéndose en progresión aritmética o geométrica, según el tipo de anualidad variable de que se trate. Esto es, en el caso de las anualidades variables aritméticas, cada término es el resultado de sumar o restar un mismo número al número anterior, en tanto que en el caso de las anualidades variables geométricas, cada término es el resultado de multiplicar el anterior por un mismo número, al cual se denomina *razón de la progresión geométrica*, y el cual se representa con la letra r.

En este apartado se analizará el caso de las anualidades variables geométricas.

Para calcular cualquier término basta con conocer el valor del primer pago (t) y la razón de la progresión (r), tal como se vio en la fórmula (1.14) en el capítulo 1:

$$u = t_1 r^{n-1} \tag{1.14}$$

La suma de los términos se obtiene aplicando la fórmula (1.15) o (1.15′), según se trate de una progresión creciente o decreciente, en el caso de una progresión decreciente, esto es, cuando la razón r es menor a 1, se aplica la siguiente fórmula:

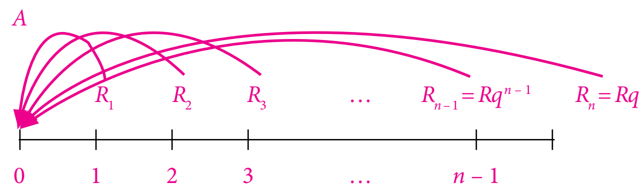
$$S = t_1 \frac{(1-r^n)}{1-r} \tag{1.15}$$

En el caso de una progresión creciente, esto es, cuando la razón r es mayor a 1, se aplica la siguiente fórmula:

$$S = t_1 \frac{(r^n - 1)}{r-1} \tag{1.15′}$$

Valor presente de una anualidad variable, cierta, vencida e inmediata

La representación gráfica de la anualidad variable es la siguiente:



Para determinar el valor presente de una anualidad variable, se requiere encontrar el valor en la fecha focal "0" de todos los términos que componen la anualidad. Para ello es necesario llevar cada uno de los términos, de su fecha de pago a la fecha focal, aplicando la fórmula de interés compuesto. El valor presente de una anualidad variable se denota con la siguiente simbología:

$$A_{v(R;q)n]i}$$

donde:

A_v = valor presente de una anualidad variable.
R = pago periódico inicial.
q = razón de la progresión.
n = número de periodos.
i = tasa de interés aplicable.

$$A_{v(R;q)n]i} = \frac{R}{(1+i)} + \frac{Rq}{(1+i)^2} + \frac{Rq^2}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{Rq^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{Rq^{n-1}}{(1+i)^n}$$

Se saca factor común: $\dfrac{R}{(1+i)}$

y se obtiene: $$A_{v(R;q)n]i} = \frac{R}{1+i} \times \left[1 + \frac{q}{(1+i)} + \frac{q^2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{q^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

En la cual los valores entre el corchete constituyen la suma de n términos de una progresión geométrica creciente de razón:

$$r = \frac{q}{(1+i)}$$

Si se aplica la expresión que suma términos que siguen esta ley se tiene:

$$S = \frac{a_1 - a_n \times r}{1-r}$$

donde a_1 es el primer término de la progresión, a_n, el último término y r, la razón.

Aplicando dicha fórmula a los términos actualizados de la renta, el valor actual de la renta queda de la siguiente forma:

$$A_{v(R;q)n]i} = \frac{R}{1+i} \times \left[\frac{1 - \dfrac{q^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} \times \dfrac{q}{1+i}}{1 - \dfrac{q}{1+i}} \right] = \frac{R}{1+i} \times \frac{1 - \dfrac{q^n}{(1+i)^n}}{\dfrac{1+i-q}{1+i}}$$

de donde finalmente se puede obtener:

$$A_{v(R;q)n]i} = R \times \frac{1 - q^n \times (1+i)^{-n}}{(1+i) - q} \qquad \textbf{(7.4)}$$

fórmula que sólo se podrá utilizar cuando $q \neq (1 + i)$.

En el caso de que $q = (1 + i)$ la expresión del valor actual quedará de la siguiente forma:

$$A_{v(R;q)n]i} = \frac{R}{1+i} + \frac{R(1+i)}{(1+i)^2} + \frac{R(1+i)^2}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n}$$

Sacando factor común:

$$A_{v(R;q)n]i} = \frac{R}{1+i} \left[1 + \frac{(1+i)}{(1+i)} + \frac{(1+i)^2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} \right]$$

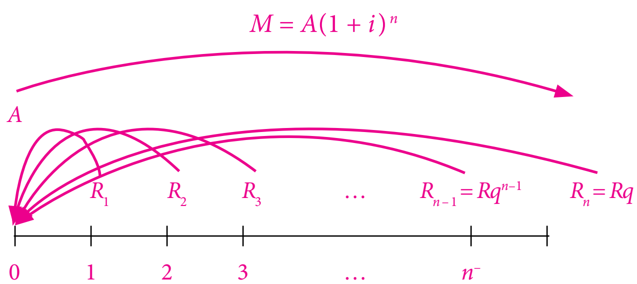
El corchete, al simplificarse, representa la suma aritmética de n veces la unidad, con lo cual el valor actual queda así:

$$A_{v(R;q)n]i} = \frac{n \times R}{1+i} \qquad \textbf{(7.5)}$$

Monto de una anualidad variable, cierta, vencida e inmediata

A partir del valor actual se puede calcular el monto de la anualidad en cualquier otro momento, utilizando una ecuación de valores equivalentes. El monto podrá ser determinado mediante el empleo de la fórmula del monto de un valor a interés compuesto:

$$M = C(1+i)^n$$
$$M = A(1+i)^n$$



$$M_{(R;q)n]i} = (1+i)^n \times A_{(R;q)n]i}$$

EJEMPLO 7.7.2.1

Una empresa ha arrendado un inmueble por un plazo de cinco años, con una renta inicial vencida de $120 000 anuales, la cual se incrementará anualmente de acuerdo con la inflación. Ofrece al arrendador cambiar los pagos por un solo pago a la firma del contrato. *a*) ¿Cuál es el importe del pago único a la firma del contrato, si se considera que la inflación anual promedio será de 5%, y la tasa de interés del mercado es de 7%? *b*) ¿Cuál sería el monto del pago único al vencimiento del contrato?

a) Para solucionar el problema se determina el valor actual de la anualidad variable, utilizando la fórmula (7.4) de una anualidad variable geométrica cuando $q \neq (1 + i)$:

$$A_{v(R;q)n]i} = R \times \frac{1 - q^n \times (1+i)^{-n}}{(1+i) - q}$$

Sustituyendo:

$$A_{v(120000;1.05)5]0.07} = 120\,000 \times \frac{1 - 1.05^5 \times (1+0.07)^{-5}}{(1+0.07) - 1.05}$$

$$A_{v(120000;1.05)5]0.07} = 120\,000 \times \frac{1 - 1.276282 \times (0.712986)}{0.02}$$

$$A_{v(120000;1.05)5]0.07} = 120\,000 \times \frac{1 - 0.909971}{0.02}$$

$$A_{v(120000;1.05)5]0.07} = 120\,000 \times \frac{0.090003}{0.02}$$

$$A_{v(120000;1.05)5]0.07} = 120\,000 \times 4.501444$$

$$A_{v(120000;1.05)5]0.07} = 540\,173.31$$

El valor actual de la anualidad es de \$540 173.31.

b) El importe del pago único al vencimiento del contrato se determina utilizando la fórmula de monto a interés compuesto:

$$M = A(1+i)^n$$
$$M = 540\,173.31(1+0.07)^5$$
$$M = 540\,173.31(1.402552)$$
$$M = 757\,621.01$$

Así, sería equivalente para el arrendador recibir 5 pagos anuales vencidos de \$120 000, \$126 000, \$132 300, \$138 915 y \$145 860.75 (cada uno incluye 5% de la inflación anual estimada), recibir un pago único de \$540 173.31 a la firma del contrato, o un pago único de \$757 621.01 al vencimiento del contrato, considerando una tasa de interés de 7%.

EJEMPLO 7.7.2.2

Considerando los mismos datos del ejemplo anterior:

a) ¿Cuál es el importe del pago único a la firma del contrato, si se considera que la inflación anual promedio será de 5%, y la tasa de interés del mercado es de 5%?;
b) ¿Cuál sería el monto del pago único al vencimiento del contrato?

a) Ya que en este caso la tasa de inflación es igual a la tasa de interés, para solucionar el problema se determina el valor actual de la anualidad variable utilizando la fórmula (7.5) de una anualidad variable geométrica cuando $q = (1 + i)$:

$$A_{v(R;q)n]i} = \frac{n \times R}{1+i}$$

Sustituyendo:

$$A_{v(120000;1.05)5]0.07} = \frac{5 \times 120\,000}{1+0.5}$$

$$A_{v(120000;1.05)5]0.07} = \frac{600\,000}{1+0.5}$$

$$A_{v(120000;1.05)5]0.07} = 571\,428.57$$

El valor actual de la anualidad es de $571 428.57. Este importe es mayor al que se obtuvo en el ejemplo 7.7.2.1, ya que la tasa de interés que se aplica es menor.

b) El importe del pago único al vencimiento del contrato se determina utilizando la fórmula de monto a interés compuesto:

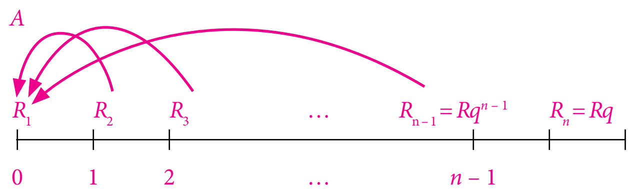
$$M = A(1+i)^n$$
$$M = 571\,428.57(1+0.05)^5$$
$$M = 571\,428.57(1.402552)$$
$$M = 729\,303.75$$

Así, sería equivalente para el arrendador recibir 5 pagos anuales vencidos de $120 000, $126 000, $132 300, $138 915 y $145 860.75 (cada uno incluye 5% de la inflación anual estimada), recibir un pago único de $571 428.57 a la firma del contrato, o un pago único de $729 303.75 al vencimiento del contrato, considerando una tasa de interés de 5%. Como puede observarse, el monto que tendría que liquidarse al vencimiento del contrato es menor que en el ejemplo anterior, porque la tasa de interés es menor.

En ambos casos se hubiera llegado a los mismos resultados si se hubiera traído a valor presente cada uno de los pagos anuales y se hubiera calculado a partir de dicho valor presente el monto a liquidar al vencimiento de la operación.

Valor presente y monto de una anualidad variable cierta, anticipada e inmediata

La representación gráfica de una anualidad variable anticipada e inmediata es la siguiente:



Los pagos se realizan al inicio de cada periodo y se resuelven siguiendo la misma metodología que se vio en el capítulo 5, considerando el primer pago de manera independiente y calculando el valor del resto de los pagos como una anualidad variable, cierta, vencida e inmediata. La suma de ambos valores proporcionará, según sea el caso, el valor actual o el monto de una anualidad variable, cierta, anticipada e inmediata.

EJEMPLO 7.7.2.3

Considere el caso de la empresa que ha arrendado un inmueble por un plazo de cinco años, en el supuesto de que se pacta una renta inicial anticipada de $120 000 anuales, la cual se incrementará anualmente de acuerdo con la inflación. Ofrece al arrendador cambiar los pagos por un solo pago a la firma del contrato.

a) ¿Cuál es el importe del pago único a la firma del contrato, si se considera que la inflación anual promedio será de 5%, y la tasa de interés del mercado es de 7%?
b) ¿Cuál sería el monto del pago único al vencimiento del contrato?

a) Puesto que el pago inicial se encuentra ya a su valor actual, se determina el valor actual de los otros cuatro pagos como una anualidad variable, utilizando la fórmula de una anualidad variable anticipada geométrica cuando $q \neq (1+i)$:

$$A_{A(R;q)n]i} = R + \left[R \times \frac{1-q^{n-1} \times (1+i)^{-n-1}}{(1+i)-q} \right] \tag{7.6}$$

Sustituyendo:

$$A_{A(120\,000;1.05)4]0.07} = 120\,000 + \left[120\,000 \times \frac{1 - 1.05^4 \times (1+0.07)^{-4}}{(1+0.07) - 1.05}\right]$$

$$A_{A(120\,000;1.05)4]0.07} = 120\,000 + \left[120\,000 \times \frac{1 - 1.215506 \times (0.762895)}{0.02}\right]$$

$$A_{A(120\,000;1.05)4]0.07} = 120\,000 + \left[120\,000 \times \frac{1 - 0.927304}{0.02}\right]$$

$$A_{A(120\,000;1.05)4]0.07} = 120\,000 + \left[120\,000 \times \frac{0.072696}{0.02}\right]$$

$$A_{A(120\,000;1.05)4]0.07} = 120\,000 + [120\,000 \times 3.634805]$$

$$A_{A(120\,000;1.05)4]0.07} = 120\,000 + 436\,176.61$$

$$A_{A(120\,000;1.05)4]0.07} = 556\,176.61$$

El valor actual de la anualidad variable, cierta, anticipada e inmediata es de $556 176.61, que naturalmente resulta superior al valor actual de la anualidad variable, cierta, vencida e inmediata del ejemplo 7.7.2.1, la cual fue de $540 173.31.

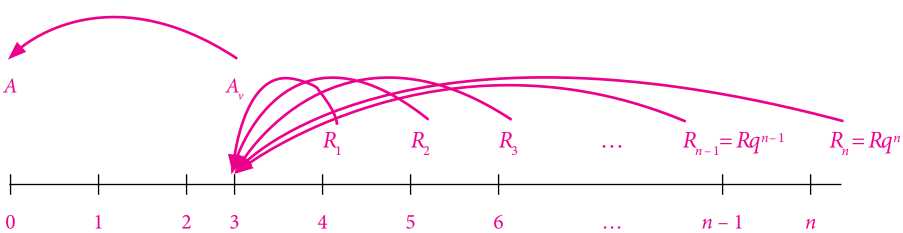
b) El importe del pago único al vencimiento del contrato se determina utilizando la fórmula de monto a interés compuesto:

$$M = A(1+i)^n$$
$$M = 556\,176.61(1+0.07)^5$$
$$M = 556\,176.61(1.402552)$$
$$M = 780\,066.47$$

Por lo tanto, para el arrendador sería equivalente recibir 5 pagos anuales anticipados de $120 000, $126 000, $132 300, $138 915 y $145 860.75 (cada uno incluye 5% de la inflación anual estimada), recibir un pago único de $556 176.61 a la firma del contrato, o un pago único de $780 066.47 al vencimiento del contrato, considerando una tasa de interés de 7%.

Valor presente y monto de una anualidad variable, cierta y diferida

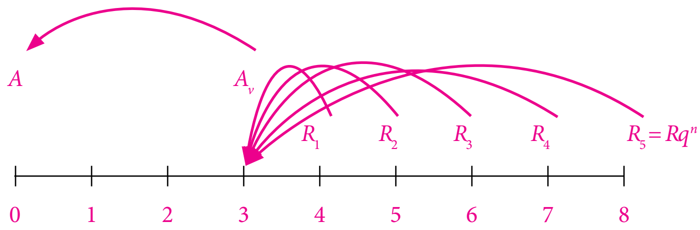
La representación gráfica de una anualidad variable, cierta y diferida es la siguiente:



EJEMPLO 7.7.2.4

Considere el caso de la empresa que ha arrendado un inmueble por un plazo inicial de ocho años, mediante cinco pagos anuales vencidos, a partir del tercer año, el primero de los cuales será de $120 000, que se incrementarán anualmente de acuerdo con la inflación. Ofrece al arrendador cambiar los cinco pagos anuales por un solo pago a la firma del contrato. *a*) ¿Cuál es el importe del pago único a la firma del contrato, si se considera que la inflación anual promedio será de 5%, y la tasa de interés del mercado es de 7%? *b*) ¿Cuál sería el monto del pago único al vencimiento del contrato?

El esquema de pagos se muestra a continuación:



Para resolver este problema, se determina el valor actual de una anualidad variable, cierta, vencida e inmediata, el que posteriormente se trae nuevamente a valor presente por el número de periodos que se haya diferido la operación.

a) Puesto que el pago se realiza al final del tercer periodo, utilizando la fórmula (7.4) de una anualidad variable geométrica, vencida, cierta e inmediata cuando $q \neq (1 + i)$ se obtendrá el valor actual al inicio del periodo 3:

$$A_{v(R;q)n]i} = R \times \frac{1 - q^n \times (1+i)^{-n}}{(1+i) - q}$$

Sustituyendo:

$$A_{v(120\,000;1.05)4]\,0.07} = 120\,000 \times \frac{1 - 1.05^5 \times (1+0.07)^{-5}}{(1+0.07) - 1.05}$$

$$A_{v(120\,000;1.05)4]\,0.07} = 120\,000 \times \frac{1 - 1.276282 \times (0.712986)}{0.02}$$

$$A_{v(120\,000;1.05)4]\,0.07} = 120\,000 \times \frac{1 - 0.909971}{0.02}$$

$$A_{v(120\,000;1.05)4]\,0.07} = 120\,000 \times \frac{0.090003}{0.02}$$

$$A_{v(120\,000;1.05)4]\,0.07} = 120\,000 \times 4.501444$$

$$A_{v(120\,000;1.05)4]\,0.07} = 540\,173.31$$

El valor de la anualidad al inicio del periodo número 3 es de $540 173.31.

Para determinar el valor actual en el periodo 0, se trae a valor presente el valor de la anualidad en el periodo 3, utilizando la fórmula de interés compuesto:

$$M = A(1+i)^n$$

$$A = \frac{M}{(1+i)^n} = M(1+i)^{-n}$$

$$A = 540\,173.31(1+0.07)^{-3}$$

$$A = 540\,173.31(0.816298)$$

$$A = 440\,942.33$$

b) El monto a liquidar al vencimiento del contrato se determina utilizando la misma fórmula de interés compuesto:

$$M = A(1+i)^n$$

$$M = 440\,942.33(1+0.07)^8$$

$$M = 440\,942.33(1.718186)$$

$$M = 757\,621.02$$

7.8 Uso de Excel

Como se ha realizado en capítulos anteriores, en esta sección se resuelven los ejercicios del capítulo utilizando las funciones de Excel que se diseñaron para simplificar el cálculo de las series de pagos periódicos o anualidades. En el caso de las anualidades generales, es decir, aquellas cuyo periodo de pago no coincide con el periodo del pago de los intereses, las fórmulas se aplicarán en combinación con las otras herramientas de cálculo de esta hoja de trabajo.

7.8.1 Monto y valor actual (sección 7.2)

En el ejemplo 7.2.1 se ilustra la determinación del monto de un conjunto de 4 pagos trimestrales de \$5 000, si el interés que se aplica es de 36% anual convertible mensualmente. Se presentan a continuación los dos métodos que se pueden utilizar para resolver el problema:

a) *Determinación de la tasa de interés equivalente*
Si se considera que la tasa de interés que se cobra es mensual, en un trimestre existen tres periodos de capitalización, por lo que se requiere determinar la tasa de interés trimestral efectiva equivalente a una tasa de interés efectiva mensual de 3.0% (36% /12 meses). Para ello se aplica la fórmula (7.1) que aparece en el texto:

$$i' = (1+i)^p - 1$$

la cual se resuelve en Excel como se muestra a continuación:

	A	B	D
1	**Datos**		***Tasa de interés equivalente***
2			$i' = (1+i)^p - 1$
3			*i'*=(1+0.03)^3)-1
4	Tasa	0.03	0.092727
5	Nper	12	
6			
7			
8			

Así, la tasa trimestral efectiva es de 0.092727 y esta tasa es la que se empleará para determinar el monto, aplicando la fórmula del monto de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata:

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

En la hoja de cálculo de Excel, este problema se soluciona, como se ha visto en secciones anteriores, utilizando las operaciones aritméticas de Excel (suma, resta, multiplicación, división y exponenciación), o bien mediante el empleo de sus funciones predefinidas.

La fórmula de Excel para calcular el monto compuesto de una anualidad, o valor futuro (VF) que se estudió en secciones anteriores es:

VF(tasa,nper,pago,va,tipo)

en donde:

Tasa: es la tasa de interés por periodo expresada como tanto por uno.
Nper: es el número total de periodos de pago.
Pago: es el pago que se efectúa cada periodo.
Va: es el capital o valor actual total de una serie de pagos futuros.
Tipo: se puede anotar (es un valor optativo, no obligatorio) un número 0 o 1 que indica cuándo vencen los pagos. Si se anota 0 se calcula el monto de un pago vencido; como es un parámetro optativo, si se omite, el monto se calcula para un pago vencido. Si se anota un 1, entonces se calcula como un pago anticipado. Para los efectos de las anualidades vencidas que se estudian en esta sección, deberá omitirse o capturar siempre un 0.

Sustituyendo los valores del ejemplo 7.2.1 se tiene:

=VF(0.092727,4,–5000,0)

En alguna celda de una hoja de trabajo de Excel se obtiene como resultado \$22 957.76, que es igual a resultado que se obtuvo en el texto. Las opciones para la solución de este ejemplo en la hoja de Excel se ilustran a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Monto de una anualidad vencida***
2			=VF(tasa,nper,pago,va,tipo)	$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$
3			=VF(0.092727,4,-5000,,0)	=5000*(((1+0.092727)^4)-1)/0.092727)
4	Tasa	0.092727	22 957.76	22 957.76
5	Nper	4		
6	Pago	5,000		
7	Capital (Va)			
8	Tipo	0		

Los resultados que arrojan son iguales.

Es importante remarcar las observaciones que ya se han hecho con anterioridad:

- La tasa se expresa como tanto por uno (0.092727) trimestral, esto es, 9.2727% trimestral efectivo que equivale a 3% mensual efectivo.
- En el número de periodos (nper) se indica el número de periodos de capitalización. En este caso, 4 trimestres.
- El pago, como ya se indicó, es \$5 000 y se anota en la función de Excel, precedido de un signo negativo, puesto que se trata de una erogación.
- El capital o valor actual (Va) se dejó en blanco, por lo que aparecen dos comas juntas.
- El tipo de la anualidad es vencida, por lo que se anotó el número 0.
- Como ya se vio en capítulos anteriores, en el caso de la fórmula que aparece en la columna D, se recomienda iniciar su construcción a partir de la fórmula $(1 + i)^n$, la cual se expresa en Excel como (1+i)^n, a partir de la cual se eslabonan las operaciones de suma, resta, multiplicación o división que se requieran, encerrando cada una con su paréntesis correspondiente.

b) *Determinación de la renta equivalente*

Con este método se busca encontrar la renta equivalente a cada periodo de pago de interés (renta mensual, puesto que la tasa de interés se convierte con dicha periodicidad). Como el pago trimestral es de \$5 000 y el interés es convertible en forma mensual, es necesario determinar una renta mensual que al cabo de tres meses acumule \$5 000.

Si se aplica la fórmula del monto de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata se tiene:

$$M = R'\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

en donde:

$$\begin{aligned} M &= \$5\,000 \\ i &= 0.03 \\ n &= 3 \\ R' &= ? \end{aligned}$$

Sustituyendo, se tiene:

$$5\,000 = R'\,\frac{(1+0.03)^3 - 1}{0.03}$$

$$R' = \frac{5\,000}{\left(\dfrac{(1+0.03)^3 - 1}{0.03}\right)}$$

cuya solución en Excel se ilustra más adelante.

La función propia de Excel para calcular la renta o pago periódico de una anualidad es la siguiente:

=PAGO(tasa,nper,va,vf,tipo)

En esta función, al igual que en las anteriores, "vf", valor futuro, y "tipo" son parámetros optativos. También, igual que antes, si se anota el valor futuro en la función, se debe omitir el valor actual y, si se omite el tipo, Excel hace los cálculos para una anualidad vencida.

Sustituyendo los valores del ejemplo 7.2.1 se tiene:

$$=\text{PAGO}(0.03,3,-5000,0)$$

Capturando los datos en alguna celda de una hoja de trabajo de Excel, se obtiene como resultado \$1 617.65, que es igual al resultado que se obtuvo en el texto. Las opciones para solucionar este ejemplo en la hoja de Excel se ilustran a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Importe de la renta equivalente***
2			=PAGO(tasa,nper,va,vf,tipo)	$R' = \dfrac{M}{\left(\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}\right)}$
3			=PAGO(0.03,3,,-5000,0)	=5000/(((1+0.03)^3)-1)/0.03)
4	Tasa	0.030000	\$1 617.65	\$1 617.65
5	Nper	3		
6	Pago	-		
7	Monto (Vf)	5 000		
8	Tipo	0		

Para determinar el monto de los pagos trimestrales, se realiza el cálculo del monto de una anualidad simple, vencida e inmediata, de 12 pagos mensuales de \$1617.65, con 3% de interés mensual.

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Monto de una anualidad vencida***
2			=VF(tasa,nper,pago,va,tipo)	$M = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$
3			=VF(0.03,12,-1617.65,,0)	=1617.65*(((1+0.03)^12)-1)/0.03
4	Tasa	0.03	\$22 957.74	\$22 957.74
5	Nper	12		
6	Pago	1 617.65		
7	Capital (Va)			
8	Tipo	0		

Los resultados que arrojan son prácticamente iguales a los que se obtuvieron por el método de la tasa equivalente. Las diferencias se deben al redondeo.

En el ejemplo 7.2.2 se pide determinar el monto de un conjunto de 10 depósitos mensuales de \$2 500 si el interés que se paga es de 30% convertible semestralmente. Al igual que en el ejemplo anterior, se puede solucionar determinando la tasa o la renta equivalentes:

a) *Determinación de la tasa de interés equivalente*

Si se considera que la tasa de interés que se paga es semestral y que los pagos son mensuales, es necesario determinar la tasa de interés efectiva mensual equivalente a 15% de interés semestral efectivo:

$$i' = (1+i)^p - 1$$

$$i' = 1.15^{1/6} - 1$$

la cual se resuelve en Excel como se muestra a continuación:

	A	B	D
1	**Datos**		***Tasa de interés equivalente***
2			$i' = (1+i)^p - 1$
3			i'=((1+0.15)^(1/6))-1
4	Tasa	0.15	0.023567073
5	Nper	6	
6			
7			
8			

Así, la tasa trimestral efectiva mensual es de 0.023567 y esta tasa es la que se empleará para determinar el monto, aplicando la fórmula del monto de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata:

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Sustituyendo los valores del ejemplo 7.2.2 en la fórmula de Excel para calcular el monto compuesto de una anualidad se tiene:

=VF(tasa,nper,pago,va,tipo)
=VF(0.023567,10,–2500,,0)

En alguna celda de una hoja de trabajo de Excel se obtiene como resultado $27 824.98 que es prácticamente igual al resultado que se obtuvo en el texto. Las opciones para solucionar este ejemplo en la hoja de Excel se ilustran a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Monto de una anualidad vencida***
2			=VF(tasa,nper,pago,va,tipo)	$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$
3			=VF(0.023567,10,-2500,,0)	=2500*(((1+0.023567)^10)-1)/0.023567
4	Tasa	0.023567	$27 824.98	$27 824.98
5	Nper	10		
6	Pago	2 500		
7	Capital (Va)			
8	Tipo	0		

b) *Determinación de la renta equivalente*
Para calcular la renta equivalente semestral se determina el monto de seis pagos mensuales de $2 500, considerando la tasa de interés mensual que se determinó arriba: 0.023567.

La renta equivalente se puede determinar utilizando la función de valor futuro de Excel:

=VF(tasa,nper,pago,va,tipo)

Sustituyendo valores se tiene:

=VF(0.023567,6,–2500,,0)

O bien, si se aplica la fórmula del monto de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata:

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

en donde:

$$M = ?$$
$$i = 0.023567$$
$$n = 6$$
$$R' = 2\,500$$

Sustituyendo se tiene:

$$M = 2\,500\frac{(1+0.023567)^3 - 1}{0.023567}$$

Las soluciones en Excel se muestran en el siguiente cuadro:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Monto de una anualidad vencida***
2			=VF(tasa,nper,pago,va,tipo)	$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$
3			=VF(0.023567,6,-2500,,0)	=2500*(((1+0.023567)^6)-1)/0.023567
4	Tasa	0.023567	$15 912.03	$15 912.03
5	Nper	6		
6	Pago	2 500		
7	Capital (Va)			
8	Tipo	0		

Los resultados que se obtienen son iguales a los que se presentan en el libro.

En el ejemplo 7.2.3 se pide calcular el valor actual de la anualidad del ejemplo 7.2.1, esto es, el de cuatro pagos trimestrales de \$5 000 con una tasa de interés de 36% anual convertible mensualmente. Al igual que en el caso del monto, se puede resolver por cualquiera de los dos métodos que ya se explicaron: *a*) encontrar la tasa equivalente por trimestre, o *b*) encontrar la renta equivalente por mes.

a) *Determinación de la tasa de interés equivalente*

La tasa trimestral efectiva que ya se determinó en el ejemplo 7.2.1 es de 0.092727 y es la que se empleará para determinar el valor actual de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata mediante el empleo de la fórmula que se vio en el capítulo 4.

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Sustituyendo valores se tiene

$$C = 5\,000\frac{1-(1+0.092727)^{-4}}{0.092727}$$

O bien mediante la función de valor actual de Excel:

VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)

donde:

Tasa: es la tasa de interés por periodo.
Nper: es el número total de periodos de pago.
Pago: es el pago que se efectúa cada periodo.
Vf: es el monto o valor futuro total de una serie de pagos futuros.

Tasa, Nper y Pago son los tres valores que se requieren para calcular el valor actual de la anualidad; sin embargo, Excel permite calcular el valor actual de ella conociendo el monto (Vf); por ello, si se anota el valor del pago no se requiere Vf y, a la inversa, si se incluye el monto se debe omitir el pago. Ya se ilustró esta cuestión para calcular el monto y se ilustra para el caso del valor actual más adelante.

Tipo: al igual que para calcular el monto o valor futuro, se puede anotar (es un valor optativo, no obligatorio) un número 0 o 1 que indica cuándo vencen los pagos. Si se anota 0 se calcula el monto de una anualidad vencida (que es el caso que se estudia en esta sección); como es un parámetro optativo, si se omite, el monto se calcula para una anualidad vencida. Si se anota un 1, entonces se calcula como una anualidad anticipada, tal como se vio en el capítulo 5.

La solución en Excel se ilustra a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Valor actual de una anualidad***
2			=Va(tasa,nper,pago,vf,tipo)	$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$
3			=Va(0.092727,4,-5000,,0)	=5000*((1-(1+0.092727)^(-4))/(0.092727))
4	Tasa	0.092727	\$16 102.11	\$16 102.11
5	Nper	4		
6	Pago	5 000		
7	Monto (Vf)			
8	Tipo	0		

Los resultados son iguales al que se presenta en el texto.

b) *Determinación de la renta equivalente*

En el ejemplo 7.2.1 se determinó el valor de la renta mensual equivalente:

$$R' = 1\,617.65.$$

Con este valor se puede determinar el valor actual de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata de 12 pagos mensuales a una tasa de interés de 3% mensual (36% anual).

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Sustituyendo valores se tiene

$$C = 1617.65\frac{1-(1+0.03)^{-12}}{0.03}$$

O bien mediante la función de valor actual de Excel:

=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)
=VA(0.03,12,−1617.65,,0)

La solución en Excel se ilustra a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Valor actual de una anualidad***
2			=Va(tasa,nper,pago,vf,tipo)	$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$
3			=Va(0.03,12,-1617.65,,0)	=1617.65*((1-(1+0.03)^(-12))/(0.03))
4	Tasa	0.0300	16 102.09	16 102.09
5	Nper	12		
6	Pago	1 617.65		
7	Monto (Vf)			
8	Tipo	0		

que son los mismos resultados que aparecen en el texto.

En el ejemplo 7.2.4 se pide calcular el monto y el valor actual de un conjunto de 24 pagos bimestrales de $4 500 si el interés es de 5% trimestral efectivo y se requiere resolverlo con el uso de la tasa equivalente.

a) *Determinación de la tasa de interés equivalente*
Para determinar la tasa de interés equivalente es necesario recordar que la tasa de interés efectiva bimestral es igual a la tasa de interés efectiva trimestral elevada a un exponente de 2/3:

$$i' = (1+i)^p - 1$$
$$i' = (1.05)^{2/3} - 1$$

	A	B	D
1	**Datos**		***Tasa de interés equivalente***
2			$i' = (1+i)^p - 1$
3			*i'*=((1+0.05)^(2/3))-1
4	Tasa	0.05	0.033062

Una vez que se ha determinado la tasa de interés equivalente, es posible calcular el monto y el valor actual de la serie de pagos periódicos utilizando las fórmulas de monto y valor actual de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata.

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Sustituyendo valores se tiene

$$M = 4\,500\frac{(1+0.033062)^{24} - 1}{0.033062}$$

O bien, mediante la función de valor actual de Excel ya vista con anterioridad:

Vf(tasa,nper,pago,vf,tipo)

Donde:

Tasa: es la tasa de interés por periodo.
Nper: es el número total de periodos de pago.
Pago: es el pago que se efectúa cada periodo
Va: es el capital o valor actual de una serie de pagos futuros.

La solución en Excel se ilustra a continuación:

	A	B	C	D
1	Datos		*Función Excel*	*Monto de una anualidad*
2			=Vf(tasa,nper,pago,va,tipo)	$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$
3			=Vf(0.033062,24,-4500,,0)	=4500*(((1+0.033062)^(24))-1)/0.033062
4	Tasa	0.033062	$161 001.68	$161 001.68
5	Nper	24		
6	Pago	4 500		
7	Valor actual (Va)			
8	Tipo	0		

Los resultados son iguales al que se presenta en el texto.

Para determinar el valor actual se puede traer a valor presente el monto previamente determinado:

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} = M(1+i)^{-n}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$C = 161\,001.68(1+0.033062)^{-24}$$

o bien, utilizar la fórmula del valor presente de una anualidad:

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$C = 4\,500\frac{1-(1+0.033062)^{-24}}{0.033062}$$

Las operaciones se pueden resolver utilizando las funciones aritméticas de la hoja de cálculo.

	A	B	C	D
1	Datos			*Valor Actual de una anualidad*
2			$C = M(1+i)^{-n}$	$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$
3			=161001.68*(1+0.033062)^(-24)	=4500*((1-(1+0.033062)^(-24))/(0.033062))
4	Tasa	0.033062	73 755.96	73 755.96
5	Nper	24		
6	Monto (Vf)	161 001.68		
7	Tipo	0		
8				

El resultado es prácticamente el mismo que aparece en el texto.

El ejemplo 7.2.5 plantea la determinación de un pago quincenal equivalente a uno trimestral de \$2 250, si el interés es de 22% capitalizable semestralmente.

a) *Determinación de la tasa de interés equivalente*

La tasa de 22% anual capitalizable semestralmente equivale a una tasa efectiva de 11% semestral, y ya que se requiere determinar un pago quincenal, será necesario encontrar la tasa quincenal efectiva, tomando en consideración que existen 12 quincenas por semestre.

$$i' = (1+i)^p - 1$$
$$i' = (1.11)^{1/12} - 1$$

	A	B	D
1	**Datos**		***Tasa de interés equivalente***
2			$i' = (1+i)^p - 1$
3	Tasa	0.11	*i'*=((1+0.11)^(1/12))-1
4	Nper	1/12	0.008735

Una vez calculada la tasa de interés equivalente, se determina el pago quincenal por medio de una anualidad simple equivalente:

$$M = R\frac{(1+i')^n - 1}{i'}$$

Sustituyendo los valores conocidos, a saber: monto ($2 250 que es el pago trimestral), la tasa de interés (0.008735) y el número de periodos (6 quincenas por trimestre), se tiene:

$$2\,250 = R\frac{(1+0.008735)^6 - 1}{0.008735}$$

O bien se sustituye en la función *PAGO* de Excel

PAGO(tasa,nper,va,vf,tipo)

donde: PAGO(0.008735,6,,–2250,0)

La solución en Excel se ilustra a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Importe de la renta equivalente***
2			=PAGO(tasa,nper,va,vf,tipo)	$R' = \frac{M}{\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)}$
3			=PAGO(0.008735,6,,-2250,0)	=2250/(((1+0.008735)^6)-1)/0.0.008735)
4	Tasa	0.008735	$366.89	$366.89
5	Nper	6		
6	Valor actual (Va)			
7	Monto (Vf)	2 250		
8	Tipo	0		

En definitiva, $366.89 es el pago quincenal equivalente a un pago trimestral de $2 250.

7.8.2 Renta (sección 7.3)

En el ejemplo 7.3.1 se plantea el problema de la determinación del descuento quincenal que se hará a un empleado para liquidar un seguro de automóvil con valor de $5 750, si el interés aplicable es de 18% anual capitalizable mensualmente.

a) *Determinación de la tasa de interés equivalente*

La tasa de 18% anual capitalizable mensualmente equivale a una tasa efectiva de 1.5% mensual efectiva. La tasa quincenal sería:

$$i' = (1+i)^p - 1$$
$$i' = (1.015)^{1/2} - 1$$

	A	B	D
1	**Datos**		***Tasa de interés equivalente***
2			$i' = (1+i)^p - 1$
3	Tasa	0.015	*i'*=((1+0.015)^(1/2))-1
4	Nper	1/2	0.007472

Dado que el pago del seguro es anticipado, una vez determinada la tasa de interés equivalente, se determina el monto de los 24 pagos quincenales utilizando la fórmula del valor presente de una anualidad simple equivalente:

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$5\ 750 = R\frac{1-(1+0.007472)^{-24}}{0.007472}$$

O bien mediante la función de *PAGO* de Excel:

PAGO(tasa,nper,va,vf,tipo)

donde: PAGO(0.007472,24,–5750,,0)

La solución en Excel se ilustra a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Importe de la renta equivalente***
2			=PAGO(tasa,nper,va,vf,tipo)	$R=\left(\dfrac{C}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}\right)$
3			=PAGO(0.007472,24,-5750,,0)	=5750/((1-((1+0.007472)^-24))/0.007472)
4	Tasa	0.007472	$262.60	$262.60
5	Nper	24		
6	Valor actual (Va)			
7	Monto (Vf)	5 750		
8	Tipo	0		

Así, al igual que en el texto, se determina que se deben hacer $262.60 de descuento quincenal.

En el ejemplo 7.3.2 se pide encontrar el depósito semanal que debe realizarse para ahorrar $115 000 en dos años, si se gana un interés de 0.25% mensual efectivo y se consideran 48 semanas por año.

a) *Determinación de la tasa de interés equivalente*

La tasa de 0.25% mensual efectiva se convierte a una tasa semanal efectiva considerando cuatro semanas por mes:

$$i' = (1+i)^p - 1$$

$$i' = (1.0025)^{1/4} - 1$$

	A	B	D
1	**Datos**		***Tasa de interés equivalente***
2			$i' = (1+i)^p - 1$
3	Tasa	0.0025	*i'*=((1+0.0025)^(1/4))-1
4	Nper	1/4	0.000624

Puesto que se conoce el monto que se desea reunir ($115 000) al cabo de dos años, se utiliza la fórmula del monto de una anualidad simple, vencida y ordinaria considerando 96 abonos semanales (2 años por 48 semanas).

$$M = R\frac{(1+i')^n - 1}{i'}$$

$$115\,000 = R\frac{(1+0.000624)^{96} - 1}{0.000624}$$

O, sustituyendo en la función *PAGO* de Excel:

PAGO(tasa,nper,va,vf,tipo)

donde: PAGO(0.000624,96,,–115000,0)

La solución en Excel se ilustra a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Importe de la renta equivalente***
2			=PAGO(tasa,nper,va,vf,tipo)	$R' = \dfrac{M}{\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)}$
3			=PAGO(0.000624,96,,-115000,0)	=115000/(((1+0.000624)^96)-1)/0.0.000624)
4	Tasa	0.000624	$1 162.77	$1 162.77
5	Nper	96		
6	Valor actual (Va)			
7	Monto (Vf)	115 000		
8	Tipo	0		

En el ejemplo 7.3.3 se requiere determinar el importe de cada uno de los 36 pagos mensuales para cubrir 60% del valor de un automóvil que cuesta $237 250 al contado, si el interés aplicable es de 4.65% efectivo trimestral.

a) Determinación de la tasa de interés equivalente
Para determinar la tasa efectiva mensual se aplica la fórmula que se vio anteriormente:

$$i' = (1+i)^p - 1$$

$$i' = (1.0465)^{1/3} - 1$$

	A	B	D
1	**Datos**		***Tasa de interés equivalente***
2			$i' = (1+i)^p - 1$
3	Tasa	0.0465	i'=((1+0.0465)^(1/3))-1
4	Nper	1/3	0.015266

Dado que el valor al contado del automóvil es de $237 250, es necesario determinar el importe de 60% que será liquidado mediante abonos mensuales:

$$\text{Pago en mensualidades} = 237\,250 \times 0.60 = 142\,350$$

Los $142 350 constituyen el valor presente de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata de 36 pagos mensuales a una tasa de interés efectiva mensual de 1.5266%.

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$142\,350 = R\frac{1-(1+0.015266)^{-36}}{0.015266}$$

Utilizando la función de *PAGO* de Excel se tiene:

PAGO(tasa,nper,va,vf,tipo)

donde: PAGO(0.015266,36,–142350,,0)

La solución en Excel:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Importe de la renta equivalente***
2			=PAGO(tasa,nper,va,vf,tipo)	$R = \left(\dfrac{C}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}\right)$
3			=PAGO(0.015266,36,-142350,,0	=142350/((1-((1+0.015266)^-36))/0.015266)
4	Tasa	0.015266	$5 169.12	$5 169.12
5	Nper	36		
6	Valor actual (Va)			
7	Monto (Vf)	142 350		
8	Tipo	0		

En el ejemplo 7.3.4 se pide determinar el importe de 15 pagos mensuales equivalentes a 10 pagos bimestrales de \$5 650 si se pacta una tasa de interés de 12% anual efectivo.

En primer lugar se determina el valor actual de los 10 pagos bimestrales de \$5 650.

a) *Determinación de la tasa de interés equivalente*
Se determina la tasa de interés bimestral (6 bimestres por año):

$$i' = (1+i)^p - 1$$
$$i' = (1.12)^{1/6} - 1$$

	A	B	D
1	Datos		*Tasa de interés equivalente*
2			$i' = (1+i)^p - 1$
3	Tasa	0.1200	=((1+0.12)^(1/6))-1
4	Nper	1/6	*0.019068*

El valor actual de los 10 pagos bimestrales de \$5 650 se determina aplicando la fórmula del valor actual de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata con una tasa de 1.9068% efectiva bimestral:

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$C = 5\,650\frac{1-(1+0.019068)^{-10}}{0.019068}$$

Utilizando la función de valor actual de Excel se tiene:

=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)
=VA(0.019068,10,–5650,,0)

La solución en Excel se ilustra a continuación:

	A	B	C	D
1	Datos		*Función Excel*	*Valor actual de una anualidad*
2			=Va(tasa,nper,pago,vf,tipo)	$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$
3			=Va(0.019068,10,-5650,,0)	=5650*((1-((1+0.019068)^(-10)))/(0.019068))
4	Tasa	0.0191	50 999.98	50 999.98
5	Nper	10		
6	Pago	5 650.00		
7	Monto (Vf)			
8	Tipo	0		

El resultado es prácticamente igual a los \$51 000 que aparecen en el libro, pues los centavos de diferencia se deben a redondeos.

Una vez que se ha determinado el valor actual de los pagos bimestrales, se establece el valor de los pagos mensuales, para lo cual se calcula la tasa mensual equivalente:

$$i' = (1+i)^p - 1$$
$$i' = (1.12)^{1/12} - 1$$

	A	B	D
1	Datos		*Tasa de interés equivalente*
2			$i' = (1+i)^p - 1$
3	Tasa	0.1200	=((1+0.12)^(1/12))-1
4	Nper	1/12	0.009489

Para encontrar el pago mensual se determina la renta utilizando la fórmula del valor actual de una anualidad, considerando un valor actual de \$51 000 y una tasa de interés de 0.9489%:

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$51\ 000 = R\frac{1-(1+0.009489)^{-15}}{0.009489}$$

Utilizando la función de *PAGO* de Excel se tiene:

PAGO(tasa,nper,va,vf,tipo)

donde: PAGO(0.009489,15,–51000,,0)

La solución en Excel:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel***	***Importe de la renta equivalente***
2			=PAGO(tasa,nper,va,vf,tipo)	$R = \left(\dfrac{C}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}\right)$
3			=PAGO(0.009489,15,-51 000,,0)	51 000/((1-((1+0.009489)^-15))/0.009489)
4	Tasa	0.009489	$3 663.79	$3 663.79
5	Nper	15		
6	Valor actual (Va)			
7	Monto (Vf)	51 000		
8	Tipo	0		

Exactamente la misma solución que aparece en el texto.

7.8.3 Tasa de interés y plazo (sección 7.4)

En el ejemplo 7.4.1 se pide determinar la tasa de interés efectiva anual a la que tendrían que hacerse 15 depósitos bimestrales de $600 para que arrojen un monto de $11600 en el momento de hacer el último depósito.

Para determinar la tasa de interés que se plantea en los ejemplos 7.4.1 y 7.4.2 se puede recurrir a la fórmula del monto de una anualidad, y una vez determinado el factor, ensayar diversos valores de tasa de interés para aproximar dos de ellos y realizar una interpolación, o bien utilizar la función de Excel denominada *TASA*, que contiene los siguientes argumentos:

TASA(nper,pago,va,vf,tipo,estimar)

donde:

Nper: es el número total de periodos de pago en una anualidad.
Pago: es el pago efectuado en cada periodo, que no puede variar durante la vida de la anualidad. Si se omite el argumento pago, deberá incluirse el argumento vf. Se registra como un valor negativo.
Va: es el valor actual, es decir, el valor que tiene actualmente una serie de pagos futuros.
Vf: es el valor futuro o un saldo en efectivo que se desea lograr después de efectuar el último pago. Si el argumento vf se omite, se supone que el valor es 0 (por ejemplo, el valor futuro de un préstamo es 0).
Tipo: es el número 0 o 1 que indica el vencimiento de los pagos.

Defina tipo como	Si los pagos vencen
0 u omitido	Al final del periodo
1	Al inicio del periodo

Estimar: es la estimación de la tasa de interés.

- Si el argumento estimar se omite, se supone que es de 10%.
- Si TASA no converge, trate de usar diferentes valores para el argumento estimar. TASA generalmente converge si el argumento estimar se encuentra entre 0 y 1.

El sistema realiza una serie de aproximaciones sucesivas para determinar el valor de i, y en caso de que no converja con su valor después de realizar diez iteraciones, devolverá la leyenda #¡NUM!

Así, sustituyendo los valores proporcionados en el ejemplo, se tiene:

TASA(15,–600,,11600,0)

Es necesario prestar atención al hecho de que el pago debe introducirse con signo negativo, a fin de que la función pueda proporcionar un resultado correcto.

La solución en Excel se presenta a continuación:

	A	B	D
1	**Datos**		***Determinación de la tasa de interés***
2			=TASA(nper,pago,va,vf,tipo,estimar)
3	Pago	600	=TASA(15,-600,,11600,0)
4	Nper	15	3.526407%
5	Valor actual (Va)	-	
6	Valor futuro (Vf)	11 600	
7	Tipo	0	
8			

La tasa de interés efectiva bimestral es 3.526407%, que es prácticamente la misma que se presenta en el texto.

Una vez conocida la tasa efectiva bimestral, se determina la tasa efectiva anual:

$$j = (1 + i')^p - 1$$
$$j = (1 + 0.035264)^6 - 1$$

Sustituyendo en Excel:

	A	B	D
1	**Datos**		***Tasa de interés equivalente***
2			$j = (1 + i')^p - 1$
3	Tasa	0.035264	=((1+0.035264)^(6))-1
4	Nper	6	0.231138

La tasa de interés efectiva anual es 23.11%.

En el ejemplo 7.4.2 se pide determinar la tasa anual capitalizable semestralmente que gana un depósito de \$32 000 a partir del cual se efectúan 24 retiros trimestrales de \$2 000.

Para solucionarlo se utiliza la siguiente función de Excel:

TASA(nper,pago,va,vf,tipo,estimar)

Sustituyendo, se tiene: TASA(24,–2000,32000,,0)

Es necesario prestar atención al hecho de que el pago debe introducirse con signo negativo, a fin de que la función pueda proporcionar un resultado correcto.

La solución en Excel:

	A	B	D
1	**Datos**		***Determinación de la tasa de interés***
2			=TASA(nper,pago,va,vf,tipo,estimar)
3	Pago	2 000	=TASA(24,-2000,32000,,0)
4	Nper	24	3.534702%
5	Valor actual (Va)	32 000	
6	Valor futuro (Vf)	-	
7	Tipo	0	

La tasa de interés efectiva bimestral es de 3.534702%.

Una vez conocida la tasa efectiva trimestral, se determina la tasa efectiva semestral:

$$j = (1 + i')^p - 1$$
$$j = (1 + 0.035470)^2 - 1$$

Sustituyendo en Excel:

	A	B	D
1	**Datos**		***Tasa de interés equivalente***
2			$j=(1+i')^p-1$
3	Tasa	0.035470	=((1+0.035470)^(2))-1
4	Nper	2	0.072198

La tasa de interés efectiva semestral es de 7.2198%; por lo tanto, la tasa anual sería de 14.44 %. La diferencia con la cifra de 14.39% que se presenta en el texto se explica por las aproximaciones derivadas de la interpolación, así como por los redondeos.

En el ejemplo 7.4.3 se pide determinar el número de depósitos semestrales (plazo) de $595.74 que se requiere para acumular $8 500 en una cuenta que rinde 2.5% bimestral.

Para solucionarlo, en primer lugar se calcula la tasa semestral equivalente a 2.5% bimestral (un semestre es igual a tres bimestres):

$$i'=(1+i)^p-1$$

$$i'=(1.025)^3-1$$

	A	B	D
1	**Datos**		***Tasa de interés equivalente***
2			$i'=(1+i)^p-1$
3	Tasa	0.0250	=((1+0.025)^(3))-1
4	Nper	3	0.076890625

Por lo tanto, la tasa efectiva semestral es de 7.6890%, que será la que se empleará para determinar el plazo, sustituyendo los valores conocidos en la fórmula del monto de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata:

$$M=R\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$8\,500=595.74\frac{(1+0.076890)^n-1}{0.076890}$$

Para determinar en Excel el valor de n, se cuenta con dos opciones:

a) Despejar la literal n y calcular su valor utilizando logaritmos.
b) Sustituir los valores en la función de Excel para calcular el número de periodos de una anualidad, como se ilustra a continuación:

=NPER(tasa,pago,va,vf,tipo)
=NPER(0.076890;–595.74,,8500,0)

Como en todos los ejemplos anteriores, debe destacarse que el pago periódico se registra con signo negativo en la función de Excel.

	A	B	D
1	**Datos**		***Determinación del plazo***
2			=NPER(tasa,pago,va,vf,tipo)
3	Pago	595.74	=NPER(0.076890,-595.74,,8500,0)
4	Nper	?	10.00
5	Valor actual (Va)	-	
6	Valor futuro (Vf)	8 500	
7	Tipo	0	

El ejemplo 7.4.4 plantea dos preguntas:

a) ¿Cuál es el número de pagos mensuales completos de $125 000 que se deben efectuar para liquidar un préstamo de $1 875 000, si el interés pactado es de 25% anual efectivo?
b) ¿Cuál es el monto del pago final menor que se debe realizar un mes después del último pago completo para liquidar totalmente el préstamo?

$$i' = (1+i)^p - 1$$
$$i' = (1.25)^{1/12} - 1$$

	A	B	D
1	**Datos**		***Tasa de interés equivalente***
2			$i' = (1+i)^p - 1$
3	Tasa	0.2500	=((1+0.25)^(1/12))-1
4	Nper	1/12	0.018769265

La tasa efectiva mensual es de 1.876926%, que es la que se empleará para determinar el plazo, sustituyendo los valores conocidos en la fórmula del valor actual de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata:

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Sustituyendo valores, se tiene:

$$1\,875\,000 = R\frac{1-(1+0.018769)^{-n}}{0.018769}$$

Como se vio en el ejemplo anterior, para determinar en Excel el valor de n, se tienen dos opciones:

a) Despejar la literal n y calcular su valor utilizando logaritmos.
b) Sustituir los valores en la función de Excel para calcular el número de periodos de una anualidad, como se ilustra a continuación:

=NPER(tasa,pago,va,vf,tipo)
=NPER(0.018769,–125 000,1875000,,0)

Como en todos los ejemplos anteriores, debe destacarse que el pago periódico se registra con signo negativo en la función de Excel.

	A	B	D
1	**Datos**		***Determinación del plazo***
2	Nper	?	=NPER(tasa,pago,va,vf,tipo)
3	Tasa	0.018769	=NPER(0.018769,-125000,1875000,,0)
4	Pago	125 000.00	17.78
5	Valor actual (Va)	1 875 000.00	
6	Valor futuro (Vf)	-	
7	Tipo	0	

Excel nos indica que se deben hacer 17.78 pagos, lo cual implica que se requieren 17 pagos completos.

La determinación del pago menor que se debe realizar en el mes 18 se ilustra claramente en el texto y los tipos de cálculos que se requieren ya han sido explicados antes, por lo que por comodidad aquí se omiten.

Los ejemplos que hasta aquí se han resuelto ilustran abundantemente las posibilidades que ofrece Excel para solucionar los distintos tipos de problemas de anualidades, ya sea a través del desarrollo de las fórmulas que se presentan en el libro, o bien mediante la utilización de las funciones financieras integradas que la misma hoja de cálculo ofrece. La solución de anualidades anticipadas o diferidas puede realizarse siguiendo los ejemplos que se presentaron, considerando las variaciones pertinentes.

7.9 Resumen

El caso general de las anualidades se refiere a aquellas en las cuales el periodo de pago y el de capitalización no coinciden. Para resolver este tipo de anualidades, lo más fácil es modificar sus planteamientos para ajustarlas al caso simple y luego resolverlas mediante las fórmulas que se explicaron con anterioridad.

Los dos métodos que pueden utilizarse para convertir anualidades generales en simples son:

1. Determinación de la tasa de interés equivalente.
2. Determinación de la renta equivalente.

Además, dado que ambos procedimientos arrojan los mismos resultados, el lector deberá aplicar el que le resulte más accesible.

Al revisar los planteamientos de las anualidades generales, conviene identificar en cuál de los dos casos posibles cae, pues ello determina qué procedimiento de solución es más sencillo:

1. El periodo de pago es más largo que el de capitalización.
2. El periodo de pago es más corto que el de capitalización.

Para los diferentes casos posibles de anualidades generales (vencidas, anticipadas, inmediatas y diferidas) también son aplicables las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas y sus correspondientes adaptaciones como se vieron en los capítulos anteriores.

Comprobación del capítulo

Si ha leído el capítulo completo, el lector debe:

- Definir y explicar qué es una anualidad general.
- Identificar situaciones que se pueden representar mediante anualidades generales.
- Utilizar el método de:
  - la tasa equivalente y el de
  - la renta equivalente para resolver problemas planteados en forma de anualidades generales, que le permita determinar
    - el monto,
    - el valor actual,
    - la renta,
    - el plazo o
    - la tasa de interés según sea necesario.
- Resolver ejercicios de anualidades generales mediante el empleo de la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®.

Términos y conceptos importantes

- Anualidad general
- Renta equivalente
- Tasa de interés equivalente

Fórmulas importantes

$$i' = (1+i)^p - 1 \tag{7.1}$$

$$M = R\frac{(1+i')^n - 1}{i'} \tag{7.2}$$

$$M = R'\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{7.3}$$

Si $q \neq (1+i)$:

$$A_{v(R;q)n]i} = R \times \frac{1-q^n \times (1+i)^{-n}}{(1+i)-q} \tag{7.4}$$

Si $q = (1+i)$ entonces aplica:

$$A_{v(R;q)n]i} = \frac{n \times R}{1+i} \tag{7.5}$$

$$A_{A(R;q)n]i} = R + \left[R \times \frac{1-q^{n-1} \times (1+i)^{-n-1}}{(1+i)-q} \right] \tag{7.6}$$

Ejercicios complementarios

1. ¿Qué es una anualidad general?
2. ¿Qué es una anualidad general anticipada?
3. ¿Qué es una anualidad general diferida?
4. Dé un ejemplo de anualidad general, cierta, vencida e inmediata.
5. Dé un ejemplo de una anualidad general anticipada.
6. Dé un ejemplo de una anualidad general diferida.
7. Encuentre el monto de un conjunto de 14 pagos vencidos e inmediatos de $1 816 cada dos meses si el interés es de 16.6% capitalizable mensualmente.
8. ¿Cuál es el valor actual (al principio de cada año) de 24 pagos quincenales vencidos de $146.90 si el interés es de 14% efectivo semestral?
9. ¿Cuál es el valor actual (al principio de cada año) de pagos quincenales anticipados de $5 000 si el interés es de 21% anual convertible semestralmente?
10. ¿Qué pago trimestral anticipado es equivalente a pagos quincenales vencidos de $100 si el interés es de 6% capitalizable mensualmente?
11. ¿Qué pago bimestral vencido es equivalente a pagos semestrales anticipados de $1 470, a 1.5% quincenal?
12. La señora Martínez compró una pantalla con precio de $8 900. Entregó 15% de enganche y se comprometió a pagar el saldo mediante 12 pagos mensuales vencidos con un interés de 20% efectivo anual. ¿Cuál es el importe de los pagos?
13. ¿Cuánto se necesita ahorrar cada fin de año en una cuenta que paga 5.55% capitalizable mensualmente para acumular $50 000 en el momento de realizar el quinto depósito?
14. Un estudiante tiene una calculadora que desea cambiar dentro de 6 meses. Considera que puede venderla dentro de 6 meses en $150 y que el valor de la que desea comprar en esa fecha será de $985. ¿Cuánto debe ahorrar cada quincena comenzando dentro de quince días, para tener el dinero que necesita si puede invertir sus ahorros con un interés de 10% efectivo semestral?
15. Se hicieron depósitos trimestrales de $150 vencidos a 6% capitalizable mensualmente. ¿Cuántos depósitos se hicieron si un mes después de realizado el último se tenía un monto de $15 078.72?
16. Una empresa desea invertir $300 000 en un proyecto que, según los planes, deberá producir un flujo de ingresos de $42 000 bimestrales vencidos durante dos años. ¿Qué tasa de interés efectivo anual rendiría el proyecto?
17. Encuentre el monto y el valor actual de 12 pagos bimestrales de $100 a 3% de interés capitalizable mensualmente si el primero de ellos se hace hoy?
18. A un estudiante se le asigna una beca que le otorga $1 850 mensuales y que comenzará a recibir dentro de 4 meses y medio. Calcule el valor actual de la beca si el interés es de 15% capitalizable bimestralmente y la beca tiene una duración de 2 años.
19. Una empresa debe $250 000 de impuestos. Para pagar se le ha concedido un plazo de gracia de 6 meses sin intereses y puede hacerlo mediante 6 pagos mensuales realizando el primero de ellos dentro de 6 meses. Si el interés que se le carga en el segundo semestre es de 12% capitalizable quincenalmente, ¿de qué cantidad deben ser los pagos mensuales?
20. A qué tasa efectiva anual equivale:
    a) 48% capitalizable semestralmente.
    b) 40% capitalizable mensualmente.
    c) 35% mensual efectivo.
    d) 15% semestral capitalizable bimestralmente.
    e) 0.5% mensual capitalizable quincenalmente.
21. ¿Qué tasa anual capitalizable mensualmente es equivalente a
    a) 2% efectivo mensual?
    b) 5% bimestral efectivo?
    c) 6% trimestral efectivo?
22. ¿A qué tasa efectiva anual creció una inversión de $604.23 bimestrales anticipados durante dos años si su monto, 4 meses después del inicio del último periodo de pago, fue de $10 500?

CAPÍTULO
8

Amortización y fondos de amortización

TEMARIO

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

- Explicar qué es amortización y fondo de amortización, así como sus semejanzas y diferencias
- Identificar situaciones en las que se aplican estos conceptos
- Construir tablas de amortización y de fondos de amortización
- Determinar el saldo acreedor y el deudor en cualquier tiempo en una operación de amortización
- Calcular el valor de los pagos o la tasa de interés o el plazo en operaciones de amortización
- Calcular el valor de los depósitos, la tasa de interés o el plazo en operaciones de fondo de amortización

8.1 Introducción

En el área financiera, *amortización* significa saldar gradualmente una deuda por medio de una serie de pagos que, generalmente, son iguales y que se realizan también a intervalos iguales. Aunque esta igualdad de pagos y de periodicidad es lo más común, también se llevan a cabo operaciones con ciertas variantes, por lo que aquí se analizan algunas de estas situaciones.

EJEMPLO 8.1.1

Sergio Campos contrae hoy una deuda de \$95 000 a 18% convertible semestralmente que amortizará mediante 6 pagos semestrales iguales, R, el primero de los cuales vence dentro de 6 meses. ¿Cuál es el valor de R?

Solución:
Los pagos constituyen una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata con valor actual de \$95 000.

$$R = ?$$
$$C = 95\ 000$$
$$i = 0.18/2 = 0.09$$
$$n = 6$$

Si

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{95\ 000(0.09)}{1-(1.09)^{-6}} = \frac{8\ 550}{0.403733}$$

$$R = 21\ 177.36$$

Seis pagos semestrales vencidos de \$21 177.36 *amortizan una deuda con valor actual de* \$95 000 con interés de 9% semestral.

Por otro lado, el concepto de *fondo de amortización* es el inverso del de *amortización*, ya que en el primero la deuda que se debe pagar es una cantidad en *valor actual* mientras que, en el caso del fondo se habla de una cantidad o deuda que se debe pagar en el *futuro*, para lo cual se *acumulan* los pagos periódicos con el objeto de tener en esa fecha futura la cantidad necesaria para amortizar la deuda.

EJEMPLO 8.1.2

Una empresa obtiene un préstamo por \$700 000 que debe liquidar al cabo de 6 años. El Consejo de administración decide que se hagan reservas anuales iguales con el objeto de pagar la deuda en el momento de su vencimiento. Si el dinero del fondo se puede invertir de manera que produzca 16% de interés, ¿cuánto se deberá depositar en el fondo para acumular \$700 000 al cabo de 6 años?

Solución:
En este caso, la deuda es el *monto* de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata:

$$R = ?$$
$$M = 700\ 000$$
$$i = 0.16$$
$$n = 6$$

$$M = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$R = \frac{700\ 000(0.16)}{(1.16)^{6}-1} = \frac{112\ 000}{1.436396}$$

$$R = \$77\ 972.91$$

En forma breve y simplificada:

- La amortización se refiere a la extinción, mediante pagos periódicos, de una *deuda actual.*
- Los fondos de amortización son *acumulación* de pagos periódicos para liquidar una *deuda futura.*

Este capítulo se divide en dos partes principales; en las secciones 2 a 7 se analiza lo referente a la amortización, mientras que las secciones 8 a 11 se ocupan de los fondos de amortización.

8.2 Tablas de amortización

Los pagos que se hacen para amortizar una deuda se aplican a cubrir los intereses y a reducir el importe de la deuda. Para visualizar mejor este proceso conviene elaborar una *tabla de amortización* que muestre lo que sucede con los pagos, los intereses, la deuda, la amortización y el saldo.

EJEMPLO 8.2.1

En el ejemplo 8.1.1 teníamos una deuda de $95 000 contratada a 18% convertible semestralmente, y que se amortizaría en pagos semestrales de $21 177.36. Para comprender mejor este tema, es necesario construir la tabla de amortización.

Solución:

Fecha	Pago semestral	Interés sobre saldo	Amortización	Saldo
En el momento de la operación	—	—	—	95 000.00
Fin del semestre 1	21 177.36	8 550.00	12 627.36	82 372.64
Fin del semestre 2	21 177.36	7 413.54	13 763.82	68 608.82
Fin del semestre 3	21 177.36	6 174.79	15 002.57	53 606.25
Fin del semestre 4	21 177.36	4 824.56	16 352.80	37 253.45
Fin del semestre 5	21 177.36	3 352.81	17 824.55	19 428.90
Fin del semestre 6	21 177.50	1 748.60	19 428.90	0.00
Totales	127 064.30	32 064.31	95 000.00	—

En la tabla se puede observar que:

- La suma de los pagos semestrales es igual a la suma de los intereses más la suma de las amortizaciones.
- El saldo, como ya se había visto, es igual al saldo anterior más los intereses menos el pago.
- Por ejemplo, el saldo $53 606.25 del fin del semestre 3 es igual al saldo anterior ($68 608.82) más los intereses del periodo ($6 174.79) menos el pago ($21 177.36) = 53 606.25:

$$53\,606.25 = 68\,608.82 + 6\,174.79 - 21\,177.36$$

- La amortización es igual al pago menos los intereses. En cada periodo subsecuente, cada vez va siendo mayor la parte del pago que se aplica a la amortización, ya que al mismo tiempo también disminuyen tanto el saldo como los intereses correspondientes.
- Se puede ver claramente cuánto es lo que resta por pagar al final de cada semestre: el saldo.
- El valor del último pago semestral se ajustó para que coincidiera exactamente con el saldo de la deuda: 1 748.60 + 19 428.90 = 21 177.50.

  Aunque el ajuste en este caso fue de sólo 14 centavos, en casi todas las operaciones es necesario hacerlo debido a pequeñas diferencias ocasionadas por redondeo.

- Además, en la tabla se puede apreciar:
  a) Los pagos: la cantidad que se paga en cada periodo en parte sirve para pagar los intereses correspondientes y en parte para *amortizar* el saldo de la deuda.
  b) Las amortizaciones: la parte de cada pago (pago menos intereses) que se aplica a la reducción del saldo deudor.

Como en las secciones siguientes se utilizarán las tablas de amortización por el momento es suficiente con esta ilustración.

De lo que se ha visto hasta aquí, se puede apreciar que las operaciones de amortización se resuelven utilizando las fórmulas de anualidades de acuerdo con las condiciones de amortización planteadas. Como el tema de anualidades ya ha sido cubierto ampliamente, en las secciones siguientes se hace hincapié en el análisis de las cuatro principales incógnitas que se pueden plantear en una operación de este tipo, a saber:

- El importe de los pagos.
- El número de pagos.
- La tasa de interés.
- Los derechos adquiridos por el deudor y el saldo a favor del acreedor.

8.3 Importe de los pagos en una amortización

EJEMPLO 8.3.1

Calcule el valor de los pagos y elabore una tabla de amortización para saldar un adeudo de $4 000 000 con un interés de 36% convertible bimestralmente, si la deuda debe ser saldada al cabo de un año, haciendo pagos bimestrales que comienzan dentro de 2 meses.

SOLUCIÓN:

$$C = 4\ 000\ 000$$
$$n = 6$$
$$i = 0.36/6 = 0.06$$
$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{4\ 000\ 000(0.06)}{1-(1.06)^{-6}} = \frac{240\ 000}{0.29503946}$$
$$R = 813\ 450.514$$

Tabla del ejemplo 8.3.1

Fecha	Pago bimestral	6% sobre saldo insoluto	Amortización	Saldo
Al contratar	—	—	—	4 000 000.00
Fin bimestre 1	813 450.514	240 000.00	573 450.51	3 426 549.49
Fin bimestre 2	813 450.514	205 592.97	607 857.54	2 818 691.94
Fin bimestre 3	813 450.514	169 121.52	644 329.00	2 174 362.94
Fin bimestre 4	813 450.514	130 461.78	682 988.74	1 491 374.20
Fin bimestre 5	813 450.514	89 482.45	723 968.06	767 406.15
Fin bimestre 6	813 450.514	46 044.37	767 406.15	0.00
Totales	4 880 703.08	880 703.08	4 000 000.00	

EJEMPLO 8.3.2

Una deuda de $100 000 se debe amortizar en 12 meses mediante tres pagos de $30 000 al final de otros tantos periodos de 3 meses y un pago que salde la deuda al cabo de 12 meses. Si el tipo de interés es de 28% capitalizable trimestralmente, elabore una tabla de amortización de la deuda.

Solución:

Tabla del ejemplo 8.3.2

Fecha	Pago bimestral	7% sobre saldo insoluto	Amortización	Saldo
Al contratar	—	—	—	100 000.00
Fin trimestre 1	30 000.000	7 000.00	23 000.00	77 000.00
Fin trimestre 2	30 000.000	5 390.00	24 610.00	52 390.00
Fin trimestre 3	30 000.000	3 667.30	26 332.70	26 057.30
Fin trimestre 4	27 881.311	1824.01	26 057.30	0.00
Totales	117 881.31	17 881.31	100 000.00	—

Observe que si se conoce el importe de los primeros pagos se puede ir construyendo directamente la tabla para, al llegar exactamente al último periodo, calcular el valor del último pago sumando el saldo a los intereses (26 057.30 + 1 824.01 = 27 881.31).

8.4 Derechos adquiridos por el deudor y saldo en favor del acreedor

Resulta fácil ver que, por ejemplo, en una operación de compra-venta a crédito, después de que el deudor ha realizado algunos pagos, ha adquirido parcialmente el bien, mientras que el acreedor, al haberlos recibido, ya no es propietario de *todos* los derechos sobre el bien sino sólo de una parte (el saldo a su favor). En general, en cualquier operación de amortización de una deuda, y en cualquier momento:

$$\text{Derechos del deudor} + \text{Derechos del acreedor} = \text{Valor de la operación}$$

Para ilustrar lo que decimos:

EJEMPLO 8.4.1

En el ejemplo 8.2.1 se tenía una deuda de $95 000 contratada a 18% convertible semestralmente que se iba a liquidar con 6 pagos semestrales de $21 177.36. Por conveniencia, se reproduce en seguida la correspondiente tabla de amortización:

Fecha	Pago semestral	Interés sobre saldo	Amortización	Saldo
Al momento de la operación	—	—	—	95 000.00
Fin del semestre 1	21 177.36	8 550.00	12 627.36	82 372.64
Fin del semestre 2	21 177.36	7 413.54	13 763.82	68 608.82
Fin del semestre 3	21 177.36	6 174.79	15 002.57	53 606.25
Fin del semestre 4	21 177.36	4 824.56	16 352.80	37 253.45
Fin del semestre 5	21 177.36	3 352.81	17 824.55	19 428.90
Fin del semestre 6	21 177.50	1 748.60	19 428.90	0.00
Totales	127 064.30	32 064.31	95 000.00	—

Resulta claro que, por ejemplo, los $68 608.82 que es el saldo al final del segundo semestre son los derechos aún en propiedad del acreedor, mientras que los derechos del deudor serían:

$$95\,000 - 68\,608.82 = 26\,391.18$$

Sin necesidad de elaborar la tabla se podrían calcular estas cantidades de la siguiente manera:

a) Derechos del acreedor (saldo):

$$95\,000(1.09)^2 - 21\,177.36\frac{(1.09)^2-1}{0.09} =$$
$$112\,869.50 - 44\,260.68 = 68\,608.82$$

en donde

- Los \$112 869.50 son el valor de la deuda al cabo de los dos semestres.
- Los \$44 260.68 son el valor de los dos pagos realizados al final del segundo semestre.

b) Derechos del deudor:

$$21\,177.36\frac{(1.09)^2-1}{0.09} - [(95\,000)(1.09)^2 - 95\,000] =$$
$$44\,260.68 - 17\,869.50 = \$26\,391.18$$

en donde, otra vez, los \$44 260.68 son el valor de los pagos realizados al final del segundo semestre y los \$17 869.50 son los intereses ocasionados por el uso o disfrute (usufructo) de los \$95 000 objeto del préstamo.

EJEMPLO 8.4.2

La señora Guajardo compra un departamento en condominio valuado en \$2 800 000, por el cual paga un enganche de \$800 000. El resto se financia con un préstamo bancario a 15 años, con interés a 36% convertible mensualmente. Hallar:

a) El valor de los pagos mensuales.
b) El saldo insoluto al final del décimo año.

Solución:

$$R = ?$$
$$n = 15(12) = 180$$
$$i = 0.36/12 = 0.03$$
$$C = 2\,800\,000 - 800\,000 = 2\,000\,000$$

a) $$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{2\,000\,000(0.03)}{1-(1.03)^{-180}} = \frac{60\,000}{0.99511010} = \$60\,294.84$$

El pago mensual sería de \$60 294.84

b) $$2\,000\,000(1.03)^{120} - 60\,294.84\frac{(1.03)^{120}-1}{0.03} =$$

$$= 2\,000\,000(34.710987) - 60\,294.84(1\,123.699571)69\,421\,974 - 67\,753\,285.85 =$$
$$\$1\,668\,688.15$$

Así, en 10 años se habrían liquidado menos de \$331 311.85 del préstamo original.

EJEMPLO 8.4.3

Una persona adquiere un automóvil a crédito. El vehículo cuesta \$187 500. Si da un enganche de \$75 000 y comienza a pagar mensualidades vencidas de \$4 484.89, ¿qué proporción del saldo habrá amortizado exactamente al pagar la duodécima mensualidad si se pactó un interés de 25.2% convertible mensualmente?

Solución:

Para determinar esa proporción primero es necesario calcular el monto de los derechos adquiridos por el deudor en el momento del pago número 12:

$$C = 112\ 500$$
$$R = 4\ 484.89$$
$$n = 12$$
$$i = 0.252/12 = 0.0210$$

$$\left[4\ 484.89\frac{(1.0210)^{12}-1}{0.0210}\right] = 60\ 491.13$$

Por otro lado, el valor de la deuda al duodécimo mes es de:

$$112\ 500(1.021)^{12} = 144\ 364.84$$

Por lo tanto, la proporción pagada del saldo es:

$$\frac{60\ 491.13}{144\ 364.84} = 0.419, \text{ o sea, } 41.9\%$$

8.5 Número de pagos en una amortización

EJEMPLO 8.5.1

¿Cuántos pagos mensuales de \$15 000 son necesarios para saldar una deuda de \$180 000 contratada hoy a 18% convertible mensualmente?

Solución:

$$C = 180\ 000$$
$$i = 0.18/12 = 0.015$$
$$R = 15\ 000$$
$$n = ?$$

De

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{Ci}{R} - 1 = -(1+i)^{-n}$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{Ci}{R}$$

$$-n\log(1+i) = \log\left(1-\frac{Ci}{R}\right)$$

$$n = -\frac{\log\left(1-\frac{Ci}{R}\right)}{\log(1+i)} = -\frac{\log\left[1-\frac{180\ 000(0.015)}{15\ 000}\right]}{\log(1.015)}$$

$$= -\frac{\log(0.82)}{\log(1.015)} = -\frac{(-0.0861861476)}{0.0064660422249} = 13.32904$$

sería necesario:

a) Hacer 12 pagos de \$15 000 y un pago final mayor o
b) hacer 13 pagos de \$15 000 y un pago final menor.

A saber:

a) Al final del pago 12 el saldo insoluto sería (derechos del acreedor):

$$180\ 000(1.015)^{12} - 15\ 000\frac{(1.015)^{12}-1}{0.015}$$

$$= 215\ 211.27 - 195\ 618.17 = 19\ 593.10$$

Este saldo quedaría en manos del deudor otro mes, por lo que su valor al final de éste sería:

$$19\,593.10(1.015) = 19\,887$$

que sería lo que habría de pagar en el decimotercer mes para liquidar totalmente la deuda.

b) Como otra alternativa de pago, si abona 13 mensualidades de \$15 000 el saldo al cabo del decimocuarto pago sería:

$$180\,000(1.015)^{13} - 15\,000\frac{(1.015)^{13} - 1}{0.015}$$

$$= 218\,439.44 - 213\,552.44 = \$4\,887$$

Si realiza el último pago en el mes 14, el valor de este saldo en ese momento sería:

$$4\,887(1.015) = \$4\,960.31$$

y con este pago se liquida también totalmente la deuda.

Debe notarse que las dos maneras de liquidar el pago final son equivalentes; la adopción de una u otra alternativa dependerá de lo que resulte más conveniente para acreedor y deudor.

EJEMPLO 8.5.2

Una persona recibe una herencia de \$2 500 000 y decide depositarla en una cuenta que paga 6% convertible mensualmente con la intención de hacer retiros mensuales de \$20 000. ¿Cuántos retiros completos de esa cantidad podrá hacer antes de que se agote su herencia?

Solución:

$$C = 2\,500\,000$$
$$R = 20\,000$$
$$i = 0.06/12 = 0.005$$
$$n = ?$$

$$2\,500\,000 = 20\,000\frac{1-(1.005)^{-n}}{0.005}$$

$$\frac{2\,500\,000(0.005)}{20\,000} - 1 = -(1.005)^{-n}$$

$$-0.375 = -(1.005)^{-n}$$

$$(1.005)^{-n} = 0.375$$

$$-n \ln 1.005 = \ln 0.375$$

$$n = -\frac{\ln 0.375}{\ln 1.005} = -\left(\frac{-0.980829253}{0.0049875415}\right)$$

$$n = 196.66$$

El beneficiario podrá hacer 196 retiros mensuales de \$20 000, después de lo cual sólo le sobraría otro poco de dinero (menos de \$20 000).

En este ejemplo, resulta interesante observar que si el heredero retira sólo los intereses que producen sus \$2 500 000, tendría a su disposición 2 500 000(0.005) = \$12 500 mensuales en forma indefinida, si la tasa de interés permanece constante.

8.6 Tasa de interés en una amortización

En ocasiones es necesario determinar la tasa de interés que se carga en la operación.

EJEMPLO 8.6.1

Una máquina de coser usada cuesta $820 al contado. El plan a crédito es de $270 de enganche y 10 pagos quincenales de $58. ¿Cuál es la tasa de interés que se cobra en la operación?

Solución:

$$C = 550$$
$$R = 58$$
$$n = 10$$
$$i = ?$$

$$550 = 58\frac{1-(1+i)^{-10}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{10}}{i} = 9.48275862$$

Para determinar i, en primer lugar, se ensayan diferentes valores de i que arrojen el valor

$$\frac{1-(1+i)^{-10}}{i}$$

más próximo posible a 9.48275862:

para $i = 0.02$ $\quad \dfrac{1-(1.02)^{-10}}{0.02} = 8.98258501$

$i = 0.01$ $\quad \dfrac{1-(1.01)^{-10}}{0.01} = 9.47130453$

$i = 0.0095$ $\quad \dfrac{1-(1.0095)^{-10}}{0.0095} = 9.496757904$

$i = 0.0097$ $\quad \dfrac{1-(1.0097)^{-10}}{0.0097} = 9.48656454$

Interpolando (para revisar el procedimiento, vea el capítulo 4):

9.48656454	9.48275862	9.47130453
0.0097	i	0.01

$$\frac{i-0.0097}{0.01-0.0097} = \frac{9.48275862-9.48656454}{9.47130453-9.48656454} = 0.24940482$$

$$i = 0.0097 + (0.0003)(0.24940482) = 0.0097 + 0.00007482$$
$$i = 0.00977482$$

Luego, para verificar que tenemos el valor correcto:

$$\frac{1-(1.00977482)^{-10}}{0.00977482} = 9.48275526$$

con sólo una diferencia pequeña y despreciable debida al redondeo. Así pues, la tasa de interés que se cobra en la operación es de 0.97% quincenales (23.46% anual convertible quincenalmente).

EJEMPLO 8.6.2

Si Cristina contrae una deuda de $6 000 y conviene en liquidarla con 5 pagos bimestrales de $1 380, el primero pagadero dentro de dos meses, ¿cuál es la tasa nominal, capitalizable bimestralmente, que se le carga?

SOLUCIÓN:

$$C = \$6\,000$$
$$R = \$1\,380$$
$$n = 5$$
$$i = ?$$

$$6\,000 = 1\,380\,\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-5}}{i} = \frac{6\,000}{1\,380} = 4.34782609$$

Ensayando valores de i:

$$\text{si } i = 0.05 \qquad \frac{1-(1.05)^{-5}}{0.05} = 4.32947667$$

$$\text{si } i = 0.048 \qquad \frac{1-(1.048)^{-5}}{0.048} = 4.35351768$$

$$\text{si } i = 0.049 \qquad \frac{1-(1.049)^{-5}}{0.049} = 4.34147087$$

$$\text{si } i = 0.0485 \qquad \frac{1-(1.0485)^{-5}}{0.0485} = 4.34748768$$

Entonces i se encuentra entre 0.0485 y 0.0480 interpolando:

4.35351768	4.34782609	4.34748768
0.048	i	0.0485

$$= \frac{4.34782609 - 4.35351768}{4.34748768 - 4.35351768} = \frac{i - 0.048}{0.0485 - 0.048}$$

$$-\frac{0.00569159}{0.00603000} = \frac{i-0.048}{0.0005}$$

$$-0.94387894 = \frac{i-0.048}{-0.0005}$$

$$i - 0.048 = 0.00047194$$
$$i = 0.048 + 0.00047194$$
$$i = 0.04847194$$

Comprobando: $$\frac{1-(1.04847194)^{-5}}{0.04847194} = 4.34782574$$

Cifra similar a la que se determinó anteriormente, salvo, nuevamente, una ligera despreciable diferencia debida al redondeo.

Por lo tanto, se carga en la operación aproximadamente 29.08% (0.04847194 × 6 × 100) convertible bimestralmente.

8.7 Otros casos de amortización

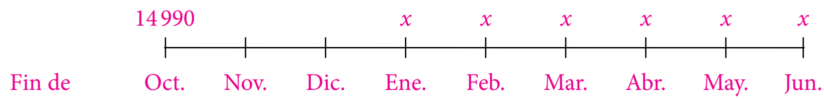
Entre la amplia gama de condiciones en la que pueden presentarse casos de amortización se ilustran en seguida algunas posibilidades:

EJEMPLO 8.7.1

Se difiere (pospone) el inicio de los pagos. En septiembre, un almacén ofrece en venta un aparato de televisión en $14 990 a pagar en 6 abonos mensuales iguales con 36% de interés convertible mensualmente. El primer pago se debe realizar el 31 de enero del año siguiente. Si una persona adquiere uno de estos aparatos el 31 de octubre:

a) ¿Cuál es el valor de cada uno de los pagos?
b) Construya una tabla de amortización que muestre el comportamiento de la operación.

SOLUCIÓN:
Para visualizar mejor la operación conviene presentarla en un diagrama:



$$i = 0.36/12 = 0.03$$

Para manejar los cálculos con las fórmulas de las anualidades simples ciertas, vencidas e inmediatas conviene observar que el cliente disfrutará del televisor desde el 31 de octubre, por lo que contrae la deuda desde este día y, por ello, el valor de su compromiso al 31 de diciembre es:

$$14\,990(1.03)^2 = 14\,990(1.0609) = \$15\,902.89$$

Ahora se puede visualizar la operación como una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata:

$$C = 15\,902.89$$
$$i = 0.03$$
$$n = 6$$
$$R = ?$$

a) Por lo tanto, el pago que debe realizar el cliente cada mes es de:

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$= \frac{15\,902.89(0.03)}{1-(1.03)^{-6}} = \frac{477.08673}{0.1625157} = 2\,935.63$$

b) Tabla de amortización:

Fecha	Pago por periodo	0.03 de interés sobre el saldo	Amortización	Saldo
31 de octubre	—	—	—	14 990.00
30 de noviembre	—	449.70	—	15 439.70
31 de diciembre	—	463.19	—	15 902.89
31 de enero	2 935.63	477.09	2 458.55	13 444.34
28 de febrero	2 935.63	403.33	2 532.30	10 912.04
31 de marzo	2 935.63	327.36	2 608.27	8 303.77
30 de abril	2 935.63	249.11	2 686.52	5 617.25
31 de mayo	2 935.63	168.52	2 767.12	2 850.13
30 de junio	2 935.63	85.50	2 850.13	0.00
Totales	17 613.78	2 623.80	15 902.89	—

Observe que la cantidad que se amortiza es el valor de la deuda al 31 de diciembre, y que la suma de los intereses incluye el total de los pagados. Las diferencias que existen en los centavos se deben al redondeo.

EJEMPLO 8.7.2

Pagos desiguales. Una deuda de $8 000 se debe amortizar mediante 5 pagos mensuales vencidos; los dos primeros por $1 500 y el tercero y cuarto por $2 000. Calcule el importe del quinto pago para saldar totalmente la deuda si la operación se pactó con un interés de 28% anual convertible mensualmente.

Solución:
Conviene visualizar la operación con una tabla.

Fecha	Pago	2.33% de interés sobre saldo	Amortización	Saldo
Al contratar la operación	—	—	—	8 000.00
Fin mes 1	1 500.00	186.40	1 313.60	6 686.40
Fin mes 2	1 500.00	155.79	1 344.21	5 342.19
Fin mes 3	2 000.00	124.47	1 875.53	3 466.67
Fin mes 4	2 000.00	80.77	1 919.23	1 547.44
Fin mes 5	1 583.50	36.06	1 547.44	0.00
Totales	8 583.50	583.49	8 000.00	—

Al llegar al fin del quinto mes sabemos que el importe del pago final debe cubrir tanto el saldo al cuarto mes como los correspondientes intereses o:

$$1\,547.44 + 36.06 = \$1\,583.50$$

que es, precisamente, el importe del último pago.

EJEMPLO 8.7.3

Cambios en la tasa de interés, amortización constante. Es necesario elaborar una tabla de amortización para un crédito que se contrata el 3 de junio por $20 000 que debe pagarse mediante cuatro pagos bimestrales, si en los dos primeros meses se aplica una tasa de 24% anual y en los últimos dos meses de 20%, ambas con capitalización bimestral, y si, además, se debe amortizar una cuarta parte de la deuda por cada pago.

Solución:
Se construye directamente la tabla:

Fecha	Pago por periodo	Interés sobre saldo	Amortización	Saldo
3 de junio	—	—	—	20 000
3 de agosto	5 800.00	800.00	5 000	15 000
3 de octubre	5 600.00	600.00	5 000	10 000
3 de diciembre	5 333.33	333.33	5 000	5 000
3 de febrero	5 166.67	166.67	5 000	0
Totales	21 900.00	1 900.00	20 000	—

EJEMPLO 8.7.4

Amortización variable. Es necesario elaborar una tabla de amortización de una deuda de $10 000 a pagar en 3 meses mediante abonos vencidos, con 15% semestral con capitalización mensual, amortizando 50, 30 y 20% de la deuda en el primero, segundo y tercer pagos, respectivamente.

SOLUCIÓN:

Fecha	Pago	Interés sobre el saldo 2.5% mensual (0.15/6)	Amortización	Saldo
Al contratar la operación	—	—	—	10 000
Fin del mes 1	5 250	250	5 000	5 000
Fin del mes 2	3 125	125	3 000	2 000
Fin del mes 3	2 050	50	2 000	—
Totales	10 425	425	10 000	—

Ejercicios de las secciones 8.2 a 8.7

1. ¿Qué es amortizar?
2. ¿Qué es una tabla de amortización?
3. Una deuda de $12 000 debe amortizarse mediante 4 pagos bimestrales iguales, el primero dentro de 2 meses, con intereses de 4% bimestral sobre saldos insolutos.
   a) Calcular el importe de cada uno de los pagos.
   b) Construir una tabla de amortización.
4. ¿Cuál sería el pago final que liquida una deuda de $23 000 contratada a 27% efectivo anual a pagar mediante 3 pagos anuales vencidos de $10 000 y un pago final que debe realizarse al término de 4 años?
5. Una deuda de $7 250 se debe pagar en un año mediante pagos trimestrales iguales vencidos. Si el interés pactado es de 36% anual convertible trimestralmente:
   a) Determine el importe de cada pago.
   b) Construya una tabla de amortización.
6. Construya un cuadro de amortización de pagos mensuales vencidos de $1 025 hasta la extinción total de una deuda de $5 800 pactada a 20% anual convertible mensualmente, calculando también el pago final que extinga la deuda.
7. Una pareja de recién casados adquiere una casa en condominio que cuesta $1 600 000. Paga un enganche de $500 000 y acuerda pagar el resto mediante 24 mensualidades iguales con 24% de interés convertible mensualmente. Haga una tabla de amortización que muestre los dos primeros y los dos últimos meses de la operación.
8. Una persona adquiere un automóvil que cuesta $135 000. Paga $40 500 en efectivo y el resto con un préstamo de interés social otorgado por una institución de seguridad social que le cobra 0.4% quincenal de interés. Calcule el valor de los derechos adquiridos por el comprador en el momento de realizar el vigésimo octavo pago si lo acordado fue liquidar el saldo en 5 años mediante pagos quincenales vencidos.
9. En el ejercicio anterior, ¿cuál es el saldo en favor de la institución de seguridad social?
10. El licenciado Montiel adquiere a crédito un despacho en condominio que cuesta $185 000. Paga 30% de enganche y se compromete a pagar el saldo mediante pagos mensuales anticipados durante 3 años. Si la tasa de interés que paga es de 14% anual convertible mensualmente, ¿qué cantidad tendría que pagar al cabo del trigésimo mes para adquirir la totalidad de los derechos sobre el despacho?

11. ¿Con cuántos pagos semestrales iguales y vencidos de $9 500 y un último de mayor cuantía se pagaría la adquisición de un terreno que cuesta $59 540 si se carga una tasa anual de 10.5% convertible mensualmente? Elabore la tabla de amortización correspondiente.
12. Una persona tiene una deuda de $16 000 que convino en pagar con cuotas bimestrales vencidas e iguales durante un año con intereses de 18% convertible cada 2 meses. ¿Cuántos pagos debe hacer si el saldo de su deuda es de $8 354.47?
13. El doctor Villazán tiene una deuda de $3 500 contraída el 15 de octubre, con intereses de 27% anual convertible mensualmente y que acordó pagar en 12 abonos mensuales vencidos e iguales. ¿Cuántos pagos ha realizado si ha adquirido derechos sobre la deuda por $1 271.90?
14. ¿Cuál es el valor de los derechos adquiridos sobre un mueble de sala por un cliente que lo compró a crédito si el precio fue de $8 999 y se convino en pagarlo mediante 6 abonos mensuales vencidos con 15% de interés convertible mensualmente y ha realizado 3 pagos?
15. Determine el número de pagos necesarios para amortizar totalmente la compra a crédito de un automóvil que cuesta $198 000 y se vende con un enganche de 40% y el resto a pagar en mensualidades vencidas de $5 592.33 con interés de 12% convertible mensualmente.
16. En una operación de crédito se salda una deuda de $15 000 mediante pagos trimestrales vencidos e iguales por $3 002.68 durante año y medio. ¿Cuál es la tasa de interés nominal anual con capitalización trimestral que se pagó? ¿Cuáles eran los derechos del acreedor después del tercer pago?
17. Una aspiradora se vende en $1 072 al contado o mediante 4 pagos mensuales anticipados de $280. ¿Cuál es la tasa efectiva mensual que se paga al adquirir ese aparato a crédito?
18. En el ejercicio 17, ¿cuál es la tasa efectiva anual? ¿Cuál es el monto total de intereses pagados?
19. En el ejercicio 17, ¿cuál es la tasa nominal anual con capitalización mensual?
20. Haga una tabla de amortización que muestre la forma en que se extinguiría una deuda de $32 000 mediante 4 pagos mensuales vencidos si la tasa que se carga es de 29% anual convertible mensualmente si en cada uno de los 2 primeros abonos se paga 30% de la deuda, en el tercero 25% y en el último 15%.

8.8 Depósitos a un fondo de amortización

Como se vio en la introducción, el caso de *fondo de amortización* se distingue porque aquí la deuda que se va a amortizar se plantea a *futuro*, y lo que se hace es constituir una *reserva* o *fondo* depositando determinadas cantidades (generalmente iguales y periódicas) en cuentas que devengan intereses, con el fin de *acumular* la cantidad o monto que permita pagar la deuda a su vencimiento.

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra el caso en el que es necesario determinar el valor de los depósitos.

EJEMPLO 8.8.1

Una empresa debe pagar dentro de 6 meses la cantidad de $400 000. Para asegurar el pago, el contralor propone, dado que hay liquidez en la empresa, acumular un fondo mediante depósitos mensuales a una cuenta que paga 9% convertible mensualmente.

a) ¿De cuánto deben ser los depósitos?
b) Haga una tabla que muestre la forma en que se acumula el fondo.

Solución:

a) En este caso, los $400 000 son un *monto*, ya que su valor es a *futuro* por lo que:

$$M = 400\ 000$$
$$R = ?$$

$$i = 0.09/12 = 0.0075$$
$$n = 6$$

y
$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1} = \frac{400\,000(0.0075)}{(1.0075)^6 - 1} = \frac{3\,000}{0.045852} = 65\,427.56$$
$$R = 65\,427.56$$

b) La tabla:

Fecha	Depósito por periodo	Intereses	Total que se suma al fondo	Saldo
Fin del mes 1	65 427.56	—	65 427.56	65 427.56
Fin del mes 2	65 427.56	490.71	65 918.27	13 1345.83
Fin del mes 3	65 427.56	985.09	66 412.65	197 758.48
Fin del mes 4	65 427.56	1 483.19	66 910.75	264 669.23
Fin del mes 5	65 427.56	1 985.02	67 412.58	332 081.81
Fin del mes 6	65 427.58	2 490.61	67 918.19	400 000.00
Totales	392 565.38	7 434.62	400 000.00	—

Observe que se incrementó el último depósito mensual en dos centavos para ajustar el fondo exactamente a $400 000.

EJEMPLO 8.8.2

Una persona adquiere a crédito un departamento en condominio por el que, aparte de un enganche y abonos mensuales, debe pagar, al final de cada uno de los 3 primeros años, una anualidad de $165 000. Para prevenir el pago de estas anualidades decide acumular un fondo mediante depósitos quincenales en una cuenta que paga 12% convertible mensualmente. ¿Cuánto debe depositar cada quincena para acumular lo que necesita para amortizar su deuda cada fin de año?

SOLUCIÓN:
En este caso, se debe advertir que el periodo de capitalización no coincide con el periodo de los depósitos, por lo que se hace necesario determinar, en primer lugar, la tasa efectiva quincenal equivalente a una tasa de 0.12/12 = 0.01 efectiva mensual, para lo cual, como se vio antes:

$$(1+i)^2 = 1.01$$
$$1+i = \sqrt{1.01}$$
$$i = \sqrt{1.01} - 1 = 0.00498756$$

Así:
$$M = 165\,000$$
$$R = ?$$
$$i = 0.00498756 \text{ quincenal}$$
$$n = 24 \text{ quincenas}$$

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i};\ R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1}$$
$$R = \frac{165\,000(0.00498756)}{(1.00498756)^{24} - 1} = \frac{822.9479}{0.126825}$$
$$R = \$6\,488.84$$

8.9 Total acumulado en un fondo de amortización y saldo insoluto de la deuda

EJEMPLO 8.9.1

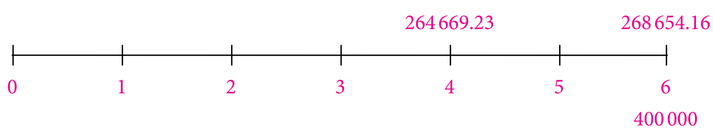
Observe la tabla de fondo de amortización que se elaboró para el ejemplo 8.8.1. En ella se puede ver el total acumulado en el fondo al final de cada uno de los 6 meses que se contemplan. Por ejemplo, al final del cuarto mes hay \$264 669.23. Si sólo se deseara identificar esta cantidad sin construir la tabla, se le podría calcular sabiendo que es el monto de una anualidad vencida.

$$M = ?$$
$$R = 65\,427.56$$
$$n = 4$$
$$i = 0.0075$$
$$M = 65\,427.56\frac{(1+0.0075)^4-1}{0.0075} = \frac{0.030339}{0.0075}(65\,427.56)$$
$$M = 264\,669.23$$

Por otro lado, si \$264 669.23 es el monto acumulado en el fondo al final del cuarto mes y, al mismo tiempo, la deuda es de \$400 000, el saldo insoluto es:

$$400\,000 - 264\,669.23(1.0075)^2 = 400\,000 - 268\,654.16 = \$131\,345.84$$

que, para su mejor comprensión, conviene plantear en forma de ecuación de valores equi–valentes.



Observe que:

- \$264 669.23 es lo acumulado en el fondo al final del cuarto mes.
- \$264 669.23$(1.0075)^2$ = \$268 654.16 es el valor acumulado en el fondo al final del cuarto mes, llevando su valor al final del sexto mes, que es el momento al que está planteada la deuda.
- 400 – 268 654.16 = 131 345.84 es el saldo insoluto de la deuda.

EJEMPLO 8.9.2

Si se depositan \$1 000 mensuales en un fondo de inversión que rinde 0.8% mensual efectivo, ¿cuál sería el valor acumulado en el fondo al cabo de 7 años?

SOLUCIÓN:

$$M = ?$$
$$R = 1\,000$$
$$i = 0.008$$
$$n = 7(12) = 84$$
$$M = 1\,000\frac{(1.008)^{84}-1}{0.008} = 1\,000(119\,115.14)$$
$$M = \$119\,115.14$$

EJEMPLO 8.9.3

Con los datos del ejemplo anterior, ¿en cuánto se incrementa el fondo del mes 83 al 84 por concepto de intereses?

$$= 1\,000\frac{1.008^{83}-1}{0.008} = 1\,000(117.1777155) = 117\,177.72$$

$$\begin{array}{rr} & \text{Al mes 84 } \$119\,115.14 \\ - & \text{Al mes 83 } \$117\,177.72 \\ \hline & \$1\,937.42 \end{array}$$

De esta cantidad en que aumenta el fondo del mes 83 al 84, \$1 000 corresponden al depósito que se hace cada mes y \$937.42 a los intereses. Esto se puede verificar si se observa que los intereses de \$117 177.72 del mes 83 al 84 son:

$$117\,177.72(0.008) = 937.42$$

8.10 Número de depósitos en un fondo de amortización

Dos ejemplos de este caso:

EJEMPLO 8.10.1

¿Cuántos depósitos mensuales sería necesario realizar en un fondo de amortización que se invierte en un instrumento que paga 9% anual convertible mensualmente si se quiere liquidar una deuda que vale \$4 800 a su vencimiento y si se realizan depósitos de \$850?

SOLUCIÓN:

$$M = 4\,800$$
$$i = 0.09/12 = 0.00750$$
$$R = 850$$
$$n = ?$$

$$4\,800 = 850\frac{(1.0075)^n - 1}{0.0075}$$

$$(1.0075)^n = \frac{4\,800(0.0075)}{850} + 1 = 1.04235294$$

$$n = \frac{\log 1.04235294}{\log 1.0075} = \frac{0.01801480}{0.003245} = 5.55$$

Se podría pagar con 5 depósitos de \$850 más un sexto depósito de:

$$\left[850\frac{(1.0075)^5 - 1}{0.0075}\right](1.0075) + x = 4\,800 = 4\,346.59 + x$$

$$x = 4\,800 - 4\,346.59 = 453.41$$

EJEMPLO 8.10.2

Una persona debe pagar \$7 500 el 2 de junio y decide formar un fondo de amortización depositando \$1 216.06 mensuales en una inversión que rinde 14.03% efectivo anual. ¿El día 2 de qué mes debe hacer el primer depósito para acumular con el del 2 de junio la cantidad que adeuda?

Solución:

$$M = \$7\,500$$
$$n = ?$$
$$R = 1\,216.06$$
$$i = 0.1403 \text{ efectivo anual}$$

En primer lugar es necesario determinar cuál es la tasa efectiva mensual, ya que los depósitos serán mensuales y la tasa dada es efectiva anual:

$$(1 + i)^{12} = 1.1403$$

Esto se puede resolver por medio de logaritmos:

$$12 \log (1 + i) = \log 1.1403$$
$$\log (1 + i) = (1/12)(\log 1.1403) = (1/12)(0.057019)$$
$$\log (1 + i) = 0.00475159$$
$$1 + i = \text{antilog } 0.00475159$$
$$1 + i = 1.0110$$
$$i = 0.0110$$

que es la tasa efectiva mensual. Luego, para calcular el número de pagos:

$$7\,500 = 1\,216.06\frac{(1.0110)^n - 1}{0.0110}$$

$$(1.0110)^n = \frac{7\,500(0.0110)}{1\,216.06} + 1 = 1.067842$$

$$n \log 1.0110 = \log 1.067842$$

$$n = \frac{\log 1.067842}{\log 1.0110} = \frac{0.028507}{0.004751} = 6$$

Entonces, si el último depósito se debe realizar el 2 de junio y es necesario hacer 6 depósitos, el primero de ellos deberá realizarse el 2 de enero.

8.11 Tasa de interés en un fondo de amortización

En esta sección se presentan ejemplos de circunstancias en las que es necesario calcular la tasa de interés que se carga en operaciones que se realizan a través de fondos de amortización.

EJEMPLO 8.11.1

Una deuda que vencía el 25 de septiembre, por un monto de \$250 000, se liquidó con un fondo acumulado mediante 8 depósitos mensuales vencidos por \$30 492.386. ¿Cuál fue la tasa de interés mensual que rendía el fondo?

Solución:

$$M = 250\,000$$
$$i = ?$$
$$n = 8$$
$$R = 30\,492.386$$

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{M}{R}$$

$$\frac{(1+i)^8-1}{i}=\frac{M}{R}=\frac{250\,000}{30\,492.386}$$

$$\frac{(1+i)^8-1}{i}=8.198768047$$

Ensayando valores de i para aproximar el valor que buscamos:

Si $$i=0.01 \qquad \frac{(1.01)^8-1}{0.01}=8.285671$$

$$i=0.009 \qquad \frac{(1.009)^8-1}{0.009}=8.256587399$$

$$i=0.008 \qquad \frac{(1.008)^8-1}{0.008}=8.22762007$$

$$i=0.007 \qquad \frac{(1.007)^8-1}{0.007}=8.198768147$$

y, como 8.198768145 es precisamente el valor que buscamos, no resulta necesario interpolar para saber que la tasa cargada en la operación es de 0.7% mensual.

EJEMPLO 8.11.2

Una deuda de \$10 000 con vencimiento el 12 de octubre se amortizó mediante un fondo que se constituyó a través de 5 depósitos de \$1 966.29 realizados los días 12 de los meses de junio a octubre. ¿Cuál fue la tasa efectiva anual que pagó el fondo?

SOLUCIÓN:

$$M=10\,000$$
$$n=5$$
$$R=1\,966.29$$
$$i=?$$

$$10\,000=1\,966.29\,\frac{(1+i)^5-1}{i}$$

$$\frac{(1+i)^5-1}{i}=\frac{10\,000}{1\,911.29}=5.085725576$$

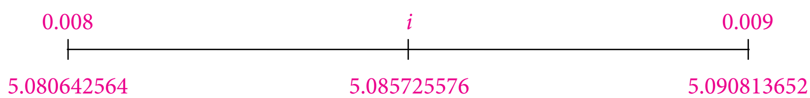
En primer lugar se determina la tasa efectiva mensual ensayando valores de i:

Si $$i=0.01 \qquad \frac{(1.01)^5-1}{0.01}=5.10100501$$

$$i=0.009 \qquad =5.090813651$$

$$i=0.008 \qquad =5.080642564$$

Así, la tasa mensual está entre 0.8 y 0.9%, y para aproximarla interpolamos entre estos valores:



y:
$$\frac{i-0.008}{0.009-0.008}=\frac{5.085725576-5.080642564}{5.090813652-5.080642564}$$
$$\frac{i-0.008}{0.001}=\frac{0.005083012}{0.010171088}=0.4997510591$$
$$i-0.008=(0.001)(0.4997510591)=0.00049975$$
$$i=0.00849975$$
$$i=0.0085$$

Verificando:
$$\frac{(1.0085)^5-1}{0.0085}=5.085725575$$

La tasa efectiva mensual es de aproximadamente 0.0085 y la tasa efectiva anual:
$$(1.0085)^{12}-1=0.10691$$
o una tasa aproximada de 10.69% anual.

8.12 Comparación entre amortización y fondo de amortización

Cuando se amortiza una deuda, se hacen pagos periódicos y del importe de cada uno de ellos se liquidan los intereses causados hasta ese momento y el resto se aplica a la amortización o disminución del importe de la deuda.

Por otro lado, bajo el concepto de fondo de amortización, tal como se vio antes, el valor de la deuda está planteado a futuro y lo que se hace es realizar depósitos periódicos en alguna inversión, de manera que se acumule la cantidad necesaria para el momento en que es necesario pagar.

En este caso puede suceder, entre otras combinaciones posibles, que los intereses causados por la deuda se incluyan en el valor a futuro que se le asigna o que se paguen por separado.

Para ilustrar su interrelación y su comportamiento, se analiza el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8.12.1

Si la tasa vigente en el mercado para cierto tipo de inversiones es de 18% anual, convertible mensualmente, determinar la forma en que se podría saldar una deuda de:

a) \$1 000, contraída el día de hoy y que se debe amortizar mediante 4 pagos mensuales iguales.

b) Una deuda de \$1 061.36 que debe pagarse exactamente dentro de 4 meses, con un fondo de amortización constituido mediante 4 depósitos mensuales iguales, el primero de los cuales debe hacerse dentro de un mes.

c) Hacer una tabla para comparar el comportamiento de las operaciones planteadas en *a*) y *b*).

SOLUCIÓN:

a)
$$C = \$1\,000$$
$$n = 4$$
$$i = 0.18/12=0.015$$
$$R=\frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}=\frac{1\,000(0.015)}{1-(1.015)^{-4}}=\frac{15}{1-0.94218423}=\frac{15}{0.057815}$$

El valor del pago mensual es de \$259.45.

b)
$$M = \$1\,061.36$$
$$i = 0.015$$
$$n = 4$$

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1} = \frac{1\,061.36(0.015)}{(1.015)^4 - 1} = \frac{15.9204}{0.06136355} = 259.45$$

El valor del *depósito mensual* es de \$259.45, lo cual se debe a que \$1 061.36 es, precisamente, el monto de \$1 000 después de 4 meses a 18% convertible mensualmente (salvo un ligero ajuste por redondeo).

Se le fijó así en el ejemplo para ilustrar que en las mismas condiciones de pago (básicamente interés y plazo), una y otra forma de amortización son equivalentes.

c) Tabla de amortización:

Fecha	Pago mensual	0.015 interés sobre saldo	Amortización	Saldo
Al momento de la operación	—	—	—	1 000.00
Fin del mes 1	259.45	15.00	244.45	755.55
Fin del mes 2	259.45	11.33	248.12	507.43
Fin del mes 3	259.45	7.61	251.84	255.59
Fin del mes 4	259.43*	3.83	255.60	0.00
Totales	1 037.78	37.78	1 000.00	—

* Las diferencias se deben al redondeo.

Tabla de fondo de amortización:

Fecha	Depósito mensual	Intereses	Total que se suma al fondo	Saldo
Fin del mes 1	259.45	—	259.45	259.45
Fin del mes 2	259.45	3.89	263.34	522.79
Fin del mes 3	259.45	7.84	267.29	790.08
Fin del mes 4	259.43*	11.85	271.28	1 061.36
Totales	1 037.78	23.58	1 061.36	—

* Las diferencias se deben al redondeo.

Resulta sencillo visualizar que, si se obtiene en préstamo una cantidad de dinero que se pueda invertir a una tasa de interés mayor que la que se paga, ello resulta conveniente para quien obtiene el préstamo.

EJEMPLO 8.12.2

Una persona obtiene un préstamo de \$100 000 que debe pagar en 6 meses, mediante abonos mensuales iguales y con intereses de 6% anual convertible mensualmente. Si esta persona deposita los \$100 000 en un fondo de inversión que rinde 1.0% mensual y de allí paga su deuda, ¿cuánto saldrá ganando al final de los 6 meses?

Solución:

$C = \$100\,000$
$i = 0.06/12 = 0.005$ (el interés que tiene que pagar)
$n = 6$

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{100\,000(0.005)}{1-(1.005)^{-6}} = \frac{500}{0.029482} = \$16\,959.55$$

Debe pagar \$16 959.55 cada mes para saldar su deuda, pero si invierten los \$100 000 en el fondo a 0.01% mensual, lo que sucede es:

Fecha	Intereses que se acumulan al fondo	Abono a la deuda	Total en el fondo de inversión
Al momento de la operación	—	—	100 000.00
Fin del mes 1	1 000.00	16 959.55	84 040.45
Fin del mes 2	840.40	16 959.55	67 921.30
Fin del mes 3	679.21	16 959.55	51 640.97
Fin del mes 4	516.41	16 959.55	35 197.83
Fin del mes 5	351.98	16 959.55	18 590.26
Fin del mes 6	185.90	16 959.55	1 816.61

Por lo tanto, al final del sexto mes la persona que obtuvo el préstamo y que lo invierte en esas condiciones habría logrado una utilidad de $1 816.61.

También se puede ver fácilmente que no conviene pedir dinero prestado para sólo invertirlo en algún instrumento que rinda menos de lo que se paga de interés, pues esto daría como resultado una pérdida.

8.13 Aplicaciones

EJEMPLO 8.13.1

Salvador Díaz adquiere un condominio de interés social (en condiciones especiales), que tiene un valor de $300 000. Si paga 20% de enganche y el saldo es a 15 años con abonos mensuales de $2 349.33, ¿qué tasa de interés anual nominal, convertible mensualmente, está pagando?

Solución:

$$C = 300\,000 - [300\,000(0.20)] = 300\,000 - 60\,000 = \$240\,000$$
$$n = 12(15) = 180$$
$$R = 2\,349.33$$
$$i = ?$$

$$C = R\frac{1-(i+i)^{-n}}{i} = 240\,000 = 2\,349.33\frac{1-(i+i)^{-180}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-180}}{i} = \frac{240\,000}{2\,349.33} = 102.1567851$$

Ensayando valores de i:

Si $$i = 0.01 \quad \frac{1-(1.01)^{-180}}{0.01} = 83.321664$$

$$i = 0.008 \quad \frac{1-(1.008)^{-180}}{0.008} = 95.2138$$

$$i = 0.006 \quad \frac{1-(1.006)^{-180}}{0.006} = 109.884466$$

Como 109.884466 es mayor que el valor que buscamos de 102.156779 ensayamos con una tasa de interés mayor:

$$i = 0.007 \quad \frac{1-(1.007)^{-180}}{0.007} = 102.156878$$

El valor determinado con una tasa de 0.007 es 102.156878 y es prácticamente el mismo que buscamos de 102.156779, por lo que podemos afirmar que es la tasa aplicada al préstamo.

Verificando: $$240\,000 = 2\,349.33\frac{1-(1.007)^{-180}}{0.007}$$

$$240\,000 \approx 2\,349.33(102.156878) = 240\,000.22^{*}$$

Así, 0.007 es la tasa mensual efectiva y, para encontrar la tasa anual nominal, convertible mensualmente:

$$0.007(12) = 0.084$$

esto es, 8.4% anual convertible mensualmente.

* La diferencia existente se debe al redondeo.

EJEMPLO 8.13.2

Un automóvil que cuesta \$138 500 se vende con 30% de enganche y el saldo a pagar en 18 mensualidades con 2% de interés "global mensual". Calcular:

a) El valor de los 18 pagos mensuales.
b) La tasa efectiva anual que se está cargando.

SOLUCIÓN:

a) Al hablar de interés "global mensual" los comerciantes se refieren a que se carga 2% de interés sobre el saldo inicial, en *cada uno de los periodos de pago*; en este caso, los 18 meses. Así, el enganche es de \$138 500(0.30) = \$41 550.

$$C = 138\,500 - 41\,550 = \$96\,950$$

Como el interés se carga sobre este saldo inicial, entonces:

$$\text{interés mensual} = 96\,950(0.02) = 1\,939$$

y el saldo dividido entre los 18 pagos:

$$96\,950/18 = \$5\,386.11$$

por lo que el importe de cada uno de los 18 pagos mensuales es:

$$R = 5\,386 + 1\,939 = \$7\,325.11$$

b) $$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Ahora, para calcular la tasa que se carga:

$$96\,950 = 7\,325.11\frac{1-(1+i)^{-18}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-18}}{i} = \frac{96\,950}{7\,325.11} = 13.235296$$

Ensayando la i:

Si $$i = 0.034 \quad \frac{1-(1.034)^{-18}}{0.034} = 13.299693$$

Si $$i = 0.035 \quad \frac{1-(1.035)^{-18}}{0.035} = 13.189682$$

Interpolando:

0.034	i	0.035
13.299693	13.235296	13.189682

$$\frac{i-0.034}{0.035-0.034}=\frac{13.235296-13.299693}{13.189682-13.299693}$$
$$=\frac{-0.064397}{-0.110011}=0.585369$$
$$i=0.034+(0.001)(0.585369)$$
$$i=0.034+0.000585$$
$$i=0.034585$$

Como se puede apreciar, la tasa efectiva mensual se aproxima a 3.46%, que es considerablemente superior a la de 2% "global mensual" planteada en la transacción.

Ahora, la tasa efectiva anual es de:

$$(1.034585)^{12}-1=1.503820-1=0.503820$$

O sea, aproximadamente 50.38%.

EJEMPLO 8.13.3

Sandra compra una estufa que cuesta \$2 000 al contado, paga \$800 de enganche y conviene en amortizar el resto mediante 6 pagos bimestrales iguales con un interés a razón de 30% convertible bimestralmente.

a) Encontrar el valor de los pagos.
b) Construir una tabla que muestre la forma en que se va amortizando la deuda.
c) Determine el valor de los derechos que el comprador ha adquirido sobre la estufa inmediatamente *antes* del cuarto pago.

SOLUCIÓN:

a)

$$C = 2\,000-800=1\,200$$
$$n = 6$$
$$i = 0.30/6=0.05$$
$$R=\frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}=\frac{1\,200(0.05)}{1-(1.05)^{-6}}=\frac{60}{0.25378460}$$
$$=\$236.42$$

b)

Fecha	Pago bimestral	5% de interés sobre saldo	Amortización	Saldo
Al momento de la operación				1 200.00
Fin del bimestre 1	236.42	60.00	176.42	1 023.58
Fin del bimestre 2	236.42	51.18	185.24	838.34
Fin del bimestre 3	236.42	41.92	194.50	643.84
Fin del bimestre 4	236.42	32.19	204.23	439.61
Fin del bimestre 5	236.42	21.98	214.44	225.17
Fin del bimestre 6	236.43	11.26	225.17	0
Totales	1 418.53	218.53	1 200.00	

c) Los intereses causados en 4 meses por la posesión de la estufa son:

$$1\,200[(1+0.05)^4-1]=258.61$$

El valor de los 3 primeros pagos en el momento de realizar el tercero es:

$$236.42\frac{(1.05)^3-1}{0.05}=236.42(3.1525)=745.31$$

El valor de \$745.31 al final del cuarto mes:

$$745.31(1.05) = 782.58$$

Por lo tanto, el valor de los derechos adquiridos por el comprador hasta inmediatamente antes de realizar el cuarto pago asciende a:

$$782.58 - 258.61 = \$523.97$$

Ejercicios de las secciones 8.8 a 8.11

21. Se deben pagar \$29 000 dentro de 12 meses por una deuda contraída con anterioridad. Si para pagarla se decide constituir un fondo mediante depósitos bimestrales vencidos, ¿cuál sería el importe de los mismos si se colocan en un instrumento de inversión que rinde 6.8% convertible mensualmente?
22. Haga una tabla de amortización para el ejercicio 21.
23. Para pagar una deuda de \$154 000 que vence dentro de 5 meses se va a constituir un fondo mediante depósitos mensuales anticipados. Si los depósitos se colocan en un fondo de inversiones que rinde 12% anual convertible mensualmente, determine su importe.
24. Haga una tabla de amortización para el ejercicio 23.
25. Elabore una tabla que muestre la forma en que se amortizaría una deuda de \$150 000 contratada hoy y que debe pagarse en 3 meses con interés de 3% trimestral capitalizable mensualmente si se decide constituir un fondo mediante depósitos quincenales vencidos en una cuenta de inversiones que rinde 0.7% mensual efectivo.
26. Ernesto Torres contrae una deuda por \$80 000 a pagar en 14 meses con 0.8% de interés efectivo mensual. Desea amortizarla con un fondo constituido mediante depósitos mensuales vencidos. ¿Cuál deberá ser el importe de los depósitos si el fondo se coloca a 6% anual convertible mensualmente?
27. ¿Cuál debe ser el importe de cada uno de 8 depósitos mensuales anticipados que se colocan en un fondo de inversión que rinde 8% convertible mensualmente con el objeto de amortizar una deuda de \$8 888.88 que vence exactamente dentro de 8 meses?
28. El licenciado Vidriera ha ahorrado \$200 cada 2 meses desde hace año y medio en una cuenta de inversión de renta fija que paga 10% anual convertible mensualmente. Lo que pretende es pagar dentro de 6 meses una deuda que a esa fecha tiene un valor de \$3 000.

    a) ¿Le alcanzará con lo que acumule en el fondo para pagar su deuda?
    b) ¿Cuánto le sobrará o cuánto le faltará?

29. Un comerciante decide crear una reserva para adquirir un local más amplio para su negocio. Deposita cada semana \$1 750 en un fondo de inversiones que paga 6% anual convertible mensualmente. ¿Cuánto habrá acumulado en el fondo al cabo de 6 meses si se consideran 52 semanas por año?
30. Un chofer desea adquirir el taxi que maneja y que pertenece al señor Urrutia. Éste ha convenido en venderle el auto y el permiso de taxi dentro de año y medio en \$117 500. ¿Cuánto debe depositar semanalmente el chofer en un fondo de inversión que paga 5% convertible mensualmente para acumular la cantidad que necesita?
31. Si el mismo chofer del ejercicio 30 hiciera los depósitos cada tercer día, ¿cuánto necesitaría depositar? Considere años de 360 días y meses de 30 días.
32. Una persona debe liquidar \$7 700 al 15 de diciembre. Si ese día recibe \$3 200 de aguinaldo y lo va a aplicar al pago de su deuda, y el resto lo va a pagar con lo que acumule en un fondo de inversión, ¿cuánto deberá depositar mensualmente en el fondo que paga 8% anual convertible mensualmente, si el primer depósito lo va a hacer el 15 de junio?
33. Se constituyó un fondo con depósitos mensuales de \$1 000. Durante 2 años el fondo obtuvo intereses de 9% convertible mensualmente y al principio del tercer año el rendimiento

descendió a 8% también convertible mensualmente. ¿Cuánto se había acumulado en el fondo al terminar el tercer año?

34. Un agente de ventas calcula que debe comprarle llantas nuevas a su automóvil cada 5 meses. Decide formar un fondo para acumular el dinero que necesitará para el próximo juego de llantas que calcula le costarán \$6 000 dentro de 5 meses. ¿Cuánto dinero deberá depositar quincenalmente en un fondo de inversiones que paga 0.75% mensual para reunir los \$6 000?
35. Se contrae hoy una deuda por \$24 000 pagadera a 7 meses sin intereses. Si se depositan \$3 000 mensuales en un fondo que paga 0.5% mensual de interés, ¿qué proporción de la deuda se habrá amortizado al momento de hacer el sexto depósito?
36. El ingeniero López debe pagar \$6 350 el 13 de noviembre. Ha acumulado 6 depósitos mensuales de \$800 en un fondo que paga 1.025% mensual y realizó el sexto depósito el 6 de septiembre. ¿Cuánto tendría que depositar en el fondo el 13 de octubre para poder liquidar su deuda al vencimiento?
37. Para pagar 30% de enganche de un inmueble que vale al contado \$ 1 427 500 (al momento de la entrega) se constituyó un fondo mediante depósitos mensuales realizados desde 8 meses antes de la operación. Si los depósitos mensuales fueron de \$52 141.80, ¿cuál fue la tasa de interés que rindió el fondo?
38. El licenciado Candelaria debe liquidar \$35 000 dentro de 6 meses y \$5 500 dentro de un año. Para pagar, decide formar un fondo mediante depósitos iguales cada mes en una cuenta de inversión que paga 0.6% mensual. ¿Qué cantidad debe depositar cada mes para amortizar cada una de sus deudas en sus respectivos vencimientos?
39. Si se depositan \$500 quincenales en un fondo de inversiones que paga 14% efectivo anual, ¿en qué tiempo se reunirán \$10 000?
40. Haga una tabla que muestre el comportamiento de un fondo de amortización constituido mediante depósitos mensuales de \$600 a un fondo que rinde 10% anual convertible mensualmente si al momento de realizar el segundo depósito el interés cambia a 8%, con la misma capitalización y se hacen 3 depósitos más por \$600 cada uno.
41. Se depositaron \$180 semanales en una cuenta de ahorros. Si al cabo de 6 meses se acumularon \$4 746.18, ¿qué tasa de interés efectiva anual se paga en esa cuenta? Considérense 52 semanas por año.
42. ¿A qué tasa de interés tendrían que hacerse 8 depósitos mensuales vencidos de \$420 para acumular \$3 550 al momento de hacer el octavo depósito?

8.14 Uso de Excel

8.14.1 Introducción (sección 8.1)

En el ejemplo 8.1.1 se busca el valor *R* de 6 pagos semestrales iguales que debe hacer el señor Campos para amortizar una deuda de \$95 000 que contrae a 18% anual convertible semestralmente. Como la situación representa una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata, el ejemplo se puede resolver mediante la función PAGO de Excel, como sigue:

=PAGO(0.09,6,95 000)

Que arroja el valor –\$21 177.38 que es el que se busca (la pequeña diferencia respecto al valor que aparece en la sección 8.1 se debe, como en muchos otros casos, a redondeo).

En el ejemplo 8.1.2 se busca la renta de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata que, acumulada en un fondo que paga 16% anual permita acumular \$700 000 al cabo de 6 años.

De nueva cuenta, utilizando “=PAGO(0.16,6,,700 000)”, se obtiene el resultado que se busca: –\$77 972.91 que, para recordar lo comentado antes, en Excel aparece en color rojo y con signo negativo, dado que se trata de una erogación.

8.14.2 Tablas de amortización (sección 8.2)

El ejemplo 8.2.1 es una ilustración de una tabla de amortización, construida con los datos del ejemplo 8.1.1, en donde se tenía una deuda de $95 000, contratada a 18% convertible semestralmente y que se determinó que se iba a amortizar mediante 6 pagos semestrales de $21177.36. La tabla de amortización correspondiente, que es la que muestra cómo se va comportando el crédito a todo lo largo de su existencia, es la que se reproduce en seguida:

Fecha	Pago semestral	Interés sobre saldo	Amortización	Saldo
Inicio	—	—	—	95 000.00
Fin semestre 1	21 177.38	8 550.00	12 627.38	82 372.62
Fin semestre 2	21 177.38	7 413.54	13 763.84	68 608.78
Fin semestre 3	21 177.38	6 174.79	15 002.59	53 606.19
Fin semestre 4	21 177.38	4 824.56	16 352.82	37 253.36
Fin semestre 5	21 177.38	3 352.80	17 824.58	19 428.78
Fin semestre 6	21 177.38	1 748.59	19 428.79	0.00
Totales	127 064.28	32 064.28	95 000.00	—

El procedimiento que se siguió para elaborar esa tabla de amortización fue:

Primero se colocan los encabezados de columna y de renglón. Aquí note que, si se anota “Fin semestre 1” y luego se coloca el puntero del ratón en la esquina inferior derecha de la celda, el símbolo cambia de una flecha a una cruz y, si se arrastra esta cruz hacia abajo, automáticamente Excel va copiando el “Fin semestre “ y va cambiando el número a 2, 3, y así sucesivamente hasta el arrastre al sexto renglón.

Posteriormente, se coloca el valor del pago semestral, $21 177.38, y, como es igual en todos los semestres, simplemente se copia a todos los cinco renglones restantes.

El primer renglón del interés sobre el saldo es 9% del préstamo inicial, $95 000. Si se coloca este valor en la celda E2 (habiendo colocado el primer renglón y la primera columna de la tabla en el renglón A1), se determina este valor con la fórmula “=0.09*E2”, la cual produce el resultado de $8 550.

La amortización de la deuda al final del primer semestre, el primer renglón de la columna “Amortización”, la columna C es la diferencia entre lo que se pagó, $21 177.38 y los intereses generados, $8 550, o sea, en Excel: “=B3–C3”, fórmula que se coloca en la celda D3, con lo que se obtiene el valor correspondiente, $12 627.38.

Para terminar con los cálculos de final del primer semestre, sólo resta determinar el nuevo saldo del adeudo que es la diferencia entre el saldo anterior, el inicial y la amortización del semestre: $95 000 – 12 627.38 = 82 372.62. En Excel: “=E2–D3”.

Una vez completado el primer renglón, la tabla se llena copiando las fórmulas que se acaban de introducir en el renglón 3 de las columnas C, D y E. Se hace esto, marcando con el ratón las tres celdas y, después, arrastrándolas hacia abajo, hasta el renglón 8, que corresponde al final del semestre 6.

Para calcular las sumas de las columnas B, C y D se pueden seguir dos caminos:

a) Anotar, por ejemplo para la columna B, en la celda B9 la fórmula “=Suma(B3:B8)”, o
b) Colocar el cursor en la celda B9 y marcar con el ratón el símbolo de la sumatoria, la letra griega mayúscula sigma, Σ, que suele estar en la barra de íconos de la parte superior, con lo que automáticamente aparece la fórmula de la suma y ya sólo falta oprimir la tecla “Intro” para que aparezca la suma.

8.14.3 Importe de los pagos en una amortización (sección 8.3)

En el ejemplo 8.3.1 se pide elaborar una tabla de amortización para saldar un adeudo de $4 000 000, contratado a 36% convertible bimestralmente, a un plazo de un año y con pagos bimestrales.

En la sección 8.3 se determinó este pago, $813 450.514, como la renta de una ACSVI, y con este dato, se puede construir la tabla de amortización siguiendo el mismo procedimiento que se usó en el ejemplo anterior:

a) Se anotan los encabezados de la tabla, empezando por la celda A1 (por supuesto, se puede utilizar cualquier otra posición pero aquí se sigue con A1 para no complicar las explicaciones).
b) Se ingresa el pago bimestral, $813 450.514 en las celdas correspondientes.
c) Se introduce la fórmula para el cálculo de los intereses "=E2*0.06" en la celda C3.
d) Se anota la fórmula de la amortización en la celda D3: "=B3–C3".
e) Se teclea la fórmula del saldo en la celda E3: "=E2–D3".
f) Se "jalan" las celdas B3, C3 y D3 hacia abajo, hasta el renglón del último pago, el renglón 8.
g) Se calculan las sumas de las columnas B, C y D. Se puede hacer esto de dos maneras:

- Anotar, por ejemplo para la columna B, la fórmula "=Suma(B3:B8)" en la celda B9, o
- Se coloca el cursor en la celda B9 y se marca con el ratón el símbolo de la sumatoria, la letra griega mayúscula sigma, Σ, que suele estar en la barra de íconos de la parte superior, con lo que automáticamente aparece la fórmula de la suma y ya sólo falta oprimir la tecla "Intro" para que aparezca la suma.

Fecha	Pago bimestral	6% sobre saldo insoluto	Amortización	Saldo
Al contratar	—	—	—	4 000 000.00
Fin bimestre 1	813 450.514	240 000.00	573 450.51	3 426 549.49
Fin bimestre 2	813 450.514	205 592.97	607 857.54	2 818 691.94
Fin bimestre 3	813 450.514	169 121.52	644 329.00	2 174 362.94
Fin bimestre 4	813 450.514	130 461.78	682 988.74	1 491 374.21
Fin bimestre 5	813 450.514	89 482.45	723 968.06	767 406.15
Fin bimestre 6	813 450.514	46 044.37	767 406.15	0.00
Totales	4 880 703.080	880 703.08	4 000 000.00	—

En este ejemplo, como se utilizó un pago con tres cifras decimales, no es necesario redondear el saldo final porque da exactamente cero.

En el ejemplo 8.3.2 se desea saldar en un año una deuda de $100 000, mediante tres pagos trimestrales de $30 000 y un pago en el cuarto trimestre que salde la deuda, con un interés de 28% capitalizable trimestralmente.

En este caso, se procede directamente a elaborar la tabla de amortización hasta el tercer semestre, con el procedimiento descrito antes y sólo se extiende el cálculo de los intereses hasta el cuarto trimestre:

Fecha	Pago bimestral	6% sobre saldo insoluto	Amortización	Saldo
Al contratar	—	—	—	100 000.00
Fin trimestre 1	30 000.000	7 000.00	23 000.00	77 000.00
Fin trimestre 2	30 000.000	5 390.00	24 610.00	52 390.00
Fin trimestre 3	30 000.000	3 667.30	26 332.70	26 057.30
Fin trimestre 4	27 881.311	1824.01	26 057.30	0.00
Totales	117 881.311	17 881.31	100 000.00	—

En este punto, se sabe que el saldo al tercer trimestre es de $26 057.30, y que los intereses generados al final del cuarto periodo son $1824.01, por lo que se sabe también que el pago necesario para saldar la deuda es la suma de estas dos cantidades. Y, entonces, se anota en la celda B6 "=C6+E5", con lo que se obtiene el cero en la columna de saldo. Y, en este punto, sólo falta calcular los totales.

8.14.4 Derechos adquiridos por el deudor y saldo a favor del acreedor (sección 8.4)

En el ejemplo 8.4.1 se utilizan los datos y la tabla del ejemplo 8.1.1 para ilustrar los conceptos de los derechos adquiridos por el deudor y el saldo en favor del acreedor y se explica cómo estos conceptos están contenidos en la tabla y cómo se pueden también calcular directamente con las fórmulas conocidas de anualidades, sin necesidad de elaborar una tabla.

El ejemplo 8.4.2 trata de la compra de un departamento que cuesta $2 800 000 y por el cual se paga un enganche de $800 000. El resto se paga con un préstamo bancario a 15 años con interés de 36% convertible mensualmente y se pide encontrar el valor de los pagos mensuales y el saldo insoluto al final del décimo año.

En primer lugar, para determinar el valor de los pagos mensuales, se utiliza la función PAGO de Excel, de la siguiente manera: =PAGO(0.03,180,2 000 000), la cual produce el resultado que se desea, –$60 294.84.

Ahora, para determinar el saldo insoluto al final del décimo año, se resta al valor de la deuda el valor de los pagos, en esa fecha:

=(2 000 000*(1.03)^120)–VF(0.03,120,–60 294.84),

la cual arroja el valor de $1 668 688.42, que es el que se busca, con una pequeña diferencia debida a redondeo.

El ejemplo 8.4.3 es el caso de la compra de un automóvil que cuesta $187 500 y por el cual se paga un enganche de $75 000 y mensualidades vencidas de $4 484.89. Se busca determinar la proporción del saldo que se habría amortizado al pagar la duodécima mensualidad si el interés pactado fue de 25.2% convertible mensualmente.

Para determinar esa proporción, en primer lugar se determina el valor de la deuda al realizar ese duodécimo pago. Con Excel, se busca el monto, es decir, el valor futuro con interés compuesto: =(187 500–75 000)*((1+(0.252/12))^12), que produce $144 364.84, y por otro lado, el valor acumulado de los pagos que se han hecho es: =VF(0.252/12,12,–4 484.89) que produce ese saldo de $60 491.13. Por lo tanto, la proporción del saldo que se ha liquidado a esa fecha es:

$$\frac{60\,491.13}{144\,364.84} = 0.4190, \text{ es decir, } 41.9\%.$$

8.14.5 Número de pagos en una amortización (sección 8.5)

En el ejemplo 8.5.1 se busca el número de pagos mensuales necesarios para saldar una deuda de $180 000 con pagos mensuales de $15 000 e intereses a 18% convertible mensualmente.

En primer lugar se determina el número de pagos que es necesario hacer, con la función NPER: =NPER(0.015,–15 000,180 000) que produce como resultado 13.32904183.

Y, entonces, tal como se ve en el ejemplo, se tienen dos alternativas:

a) Hacer 12 pagos de $15 000 y un decimotercer pago final mayor, o
b) hacer 13 pagos de $15 000 y un decimocuarto pago final menor.

Para determinar el decimotercer pago final mayor, se debe calcular el saldo restante después de haber realizado el decimosegundo pago y, después, calcular el valor de este saldo un mes después, que es cuando se liquidaría la deuda. En Excel:

=((180 000*(1.015)^12)–VF(0.015,12,–15 000))*1.015 produce el valor de 19 886.99, que es el que se busca y en donde la diferencia que se observa con respecto al valor encontrado en el ejemplo resuelto con una calculadora se debe a error de redondeo.

Para determinar un decimocuarto pago menor, con Excel:

=((180 000*(1.015)^13)–VF(0.015,13,–15 000))*1.015, produce el valor que se busca, 4 960.30.

En el ejemplo 8.5.2 se busca determinar cuántos retiros mensuales de $20 000 podría hacer una persona que recibe una herencia de $2 500 000 si la deposita en una cuenta que produce 6% de interés capitalizable mensualmente. Con Excel:

=NPER(0.005,–20 000,2 500 000) da como resultado n = 196.6558576, que es el valor que se busca.

8.14.6 Tasa de interés en una amortización (sección 8.6)

En el ejemplo 8.6.1 se desea determinar la tasa de interés que se paga al comprar una máquina de coser usada que cuesta de contado $820 y se liquida con un enganche de $270 y 10 pagos quincenales de $58.

Con Excel: =TASA(10,–58, 820–270) da como resultado 0.0097748, que es el valor que se busca.

Aunque se nota también en otros ejemplos, en el cálculo de estas tasas el uso de Excel es especialmente útil, ya que evita la necesidad de ensayar valores hasta llegar a una aproximación aceptable.

En el ejemplo 8.6.2 se busca la tasa nominal anual capitalizable bimestralmente que se carga al contraer una deuda de $6 000 y pagarla con 5 pagos bimestrales vencidos de $1 380. De nuevo, es fácil resolver este ejemplo usando Excel, con: =TASA(5,–1 380,6 000), que arroja el resultado, muy preciso, de 0.0484719105210. Con esta tasa efectiva bimestral se calcula la tasa nominal anual capitalizable bimestralmente, simplemente multiplicándola por 6: $0.0484719105210 \times 6 = 0.290831$, o 29.08%.

8.14.7 Otros casos de amortización (sección 8.7)

El ejemplo 8.7.1 trata del caso en el que se difiere el inicio de los pagos y se trata de la compra de una televisión de $14 990 que se va a pagar mediante 6 abonos iguales e intereses a 36% convertible mensualmente. La compra se lleva a cabo el 31 de octubre y los pagos se comenzarían a pagar el 31 de enero del año siguiente y se busca el valor de cada uno de los pagos y se pide construir una tabla de amortización para la operación.

El valor de los pagos mensuales se determina llevando el valor del aparato del 31 de octubre al 31 de diciembre para usar este valor futuro como el valor actual de la anualidad que se va a comenzar a pagar el 31 de enero. En Excel: =PAGO(0.03,6,(14 990*(1.03)^2)), produce el valor del pago mensual, $2 935.63 y con este valor se elabora la tabla de amortización con el procedimiento revisado antes, excepto por los tres primeros renglones, ya que en los dos primeros meses no se hicieron pagos:

- Se escriben los encabezados de la tabla, empezando por la celda A1 (por supuesto, se puede utilizar cualquier otra posición pero aquí se sigue con A1 para no complicar las explicaciones).
- Se anota el pago mensual $2 935.63 en las celdas correspondientes, es decir, empezando en el renglón B5, que corresponde al 31 de enero, que es cuando se comenzó a pagar.
- Se introduce la fórmula para el cálculo de los intereses "=E2*0.03" en la celda C3 y se extiende hacia abajo hasta la C10.
- Se ingresa la fórmula de la amortización en la celda D5: "=B5–C5".
- Se teclea la fórmula del saldo en la celda E5: "=E4–D5".
- Se "jalan" las celdas B3 y D3 hacia abajo, hasta el renglón del último pago, el renglón 10.
- Por último, se calculan las sumas de las columnas B, C y D.

Fecha	Pago por periodo	0.03 de interés saldo insoluto	Amortización	Saldo
31 de octubre	—	—	—	14 990.00
30 de noviembre	—	449.70	—	15 439.70
31 de diciembre	—	463.19	—	15 902.89
31 de enero	2 935.63	477.09	2 458.54	13 444.35
28 de febrero	2 935.63	403.33	2 532.30	10 912.05
31 de marzo	2 935.63	327.36	2 608.27	8 303.78
30 de abril	2 935.63	249.11	2 686.52	5 617.26
31 de mayo	2 935.63	168.52	2 767.11	2 850.15
30 de junio	2 935.63	85.50	2 850.13	0.03
Totales	17 613.78	2 623.80	15 902.87	—

La pequeña diferencia de 0.03 en el saldo final se debe a errores de redondeo.

El ejemplo 8.7.2 ilustra el caso de pagos desiguales y se trata de una deuda de $8 000 que se debe amortizar mediante 5 pagos mensuales vencidos. Los dos primeros de $1 500 y el tercero y cuarto de $2 000. Al elaborar una tabla de amortización se puede visualizar el comportamiento del crédito y determinar el monto del quinto pago que salda completamente la deuda. El procedimiento que se sugiere seguir en Excel es aproximadamente el mismo que se utilizó antes, sólo que ahora se anotan los pagos desiguales en las celdas correspondientes: $1 500 para los dos primeros meses y $2 000 para los segundos dos meses.

A partir de aquí, se aplican igual que antes las fórmulas para el cálculo de intereses, amortización y saldos, hasta el final del cuarto mes. Ahora, si se arrastra el cálculo de los intereses hasta el mes quinto, celda C7, se obtiene la cantidad generada de intereses al quinto mes, 36.06 y, si se suma a estos intereses el saldo al final del cuarto mes, se obtiene la cantidad que se debe pagar al final del quinto mes para liquidar totalmente el adeudo. Es decir, se pueden sumar en la celda B7 las cantidades de las celdas C7 (intereses del quinto mes) y E6 (saldo al final del cuarto mes) para obtener ese pago final de 1 583.49 que salda la deuda.

Los pasos finales consisten en arrastrar los valores de amortización y saldo hasta el renglón 7 para terminar con los cálculos y determinar las sumas de las columnas B a D, con lo que se tiene, finalmente, la tabla de amortización que se presentó en este ejemplo 8.7.2 y que se reproduce en seguida para fácil referencia.

Fecha	Pago bimestral	2.33% sobre saldo insoluto	Amortización	Saldo
Al contratar	—	—	—	8 000.00
Fin mes 1	1 500.00	186.40	1 313.60	6 686.40
Fin mes 2	1 500.00	155.79	1 344.21	5 342.19
Fin mes 3	2 000.00	124.47	1 875.53	3 466.67
Fin mes 4	2 000.00	80.77	1 919.23	1 547.44
Fin mes 5	1 583.49	36.06	1 547.44	0.00
Totales	8 583.49	583.49	8 000.00	—

El ejemplo 8.7.3 ilustra el caso en el que se dan cambios en la tasa de interés y se mantiene constante la amortización. Se trata de un crédito de $20 000 que se contrata el 3 de junio y que se debe pagar mediante 4 pagos bimestrales, aplicando 24% anual en los primeros dos meses y 20% anual en los últimos 4 meses y en donde ambas tasas tienen capitalización bimestral. Se establece también que en cada uno de los cuatro pagos se debe amortizar una cuarta parte de la deuda.

En este caso se comienza de nuevo por anotar los encabezados de las columnas y de los renglones y se continúa inmediatamente con el llenado de la columna de amortizaciones puesto que se sabe que se debe amortizar una cuarta parte de la deuda en cada pago bimestral, o sea $5 000. En seguida se anotan las fórmulas para calcular los intereses de los dos primeros bimestres ((=E2*0.04) y (=E3*0.04)) en las celdas C3 y C4, respectivamente; y los de los dos últimos bimestres ((=E4*0.033) y (=E5*0.033)) en las celdas C5 y C6, respectivamente. Con esto ya se tienen llenas las columnas de amortización y de intereses y sólo falta, aparte de los totales de costumbre, las fórmulas para calcular el saldo y el pago bimestral. El saldo se calcula restándole a cada saldo previo, los $5 000 de amortización y el pago bimestral sumándole a esa amortización el importe de los intereses causados.

La tabla de amortización que se obtiene es la siguiente:

Fecha	Pago bimestral	4% los primeros dos bimestres y 3.33% los otros dos	Amortización	Saldo
03 de junio	—	—	—	20 000
03 de agosto	5 800	800	5 000	15 000
03 de octubre	5 600	600	5 000	10 000
03 de diciembre	5 330	330	5 000	5 000
03 de febrero	5 165	165	5 000	0
Totales	21 895	1 895	20 000	—

En el ejemplo 8.7.4 se ilustra el caso de una amortización variable. Y se solicita hacer una tabla de amortización para una deuda de $10 000 que se debe pagar en tres meses mediante abonos vencidos, a 15% semestral con capitalización mensual, amortizando, 50, 30 y 20% de la deuda en cada pago, en ese orden.

De nuevo, se comienza por poner los títulos de la tabla para, después anotar las amortizaciones establecidas, que serían, entonces, de $5 000, $3 000 y $2 000 en los meses 1, 2 y 3, respectivamente y son cantidades que se colocan en los renglones 3, 4, 5 de la columna D de la tabla. Se coloca además, igual que antes, en la celda E2 el valor original de la deuda, $10 000.

Para llenar el resto de la tabla, primero se anotan las fórmulas necesarias en el renglón 3. Para determinar el interés, se multiplica el saldo (E2) por el interés, 0.025 y entonces se anota la fórmula =E2*0.025 en la celda C3. Luego, para determinar el pago se suma el interés a la amortización (=C3+D3) y se anota esta fórmula en la celda B3 y para llenar el renglón, se anota en la celda E3 el nuevo saldo (=E2–D3).

Para finalizar la tabla, simplemente se arrastran las fórmulas de las celdas B, C y D del renglón 3 hasta el renglón 5 para, finalmente, calcular los totales de columna como se ha venido haciendo. Después de esto, se llega a la correspondiente tabla de amortización, que se reproduce en seguida:

Fecha	Pago bimestral	0.025 mensual	Amortización	Saldo
Al contratar	—	—	—	10 000
Fin mes 1	5 250	250	5 000	5 000
Fin mes 2	3125	125	3 000	2 000
Fin mes 3	2 050	50	2 000	0
Totales	10 425	425	10 000	—

8.14.8 Depósitos a un fondo de amortización (sección 8.8)

En el ejemplo 8.8.1 se tiene a una empresa que debe pagar $400 000 seis meses después y decide acumular un fondo mediante depósitos mensuales vencidos en una cuenta que paga 9% anual convertible mensualmente. Se pide *a*) determinar el valor de los depósitos que se deben hacer y *b*) hacer una tabla que muestre cómo se comporta el fondo de amortización.

Lo primero que hay que hacer es determinar el valor de los depósitos. Como se trata de depósitos vencidos, se aplica la función PAGO de Excel: =PAGO(0.09/12,6,,400 000). Note la doble coma dentro del paréntesis. Se hace así porque la sintaxis de esta función implica que el tercer valor dentro del paréntesis, separado por comas, corresponde al valor actual de una anualidad y en este caso de lo que se dispone es del valor futuro o monto, que debe ocupar el cuarto lugar y en la fórmula el primer valor es la tasa, luego hay una coma, seguida del número de periodos o depósitos en este caso, luego una segunda coma y una tercera coma, de manera que el monto ocupa, precisamente, el cuarto lugar, como se desea. Esta fórmula arroja el valor que se busca: –$65 427.56. Se anota este valor en las celdas 2 a 7 de la columna B.

Lo que sigue es muy similar a lo que se hizo para tablas de amortización. En primer lugar, se anotan los encabezados de la tabla, sólo que en este caso, como se trata de acumular un fondo, los encabezados de las columnas cambian a:

Fecha	Depósito por periodo	Interés	Total que se suma al fondo	Saldo

Después se anotan los encabezados de los renglones, empezando con “Fin del mes” puesto que es el momento cuando se empieza a acumular el capital y aún no se generan intereses. Se anota, entonces $65 427.56 también en la celda E2.

Posteriormente, se anota la fórmula de los intereses en la celda C3 (=E2*0.0075), la cual produce el valor de 490.71. El total que se suma al fondo, celda D3, se determina sumando al depósito mensual de $65 427.56 los intereses generados (=B3+C3). El nuevo saldo acumulado de la celda E3 se calcula sumando este total al saldo anterior (=D3+E2). Y se terminan los cálculos arrastrando estas fórmulas de las celdas C3, D3 y E3 hasta el renglón 7. Y ahora lo único que resta es calcular las sumas de las columnas B, C y D, con lo que se completa la tabla siguiente:

Fecha	Depósito por periodo	Interés	Total que se suma al fondo	Saldo
Fin mes 1	65 427.56	—	—	65 427.56
Fin mes 2	65 427.56	490.71	65 918.27	131 345.83
Fin mes 3	65 427.56	985.09	66 412.65	197 758.48
Fin mes 4	65 427.56	1 483.19	66 910.75	264 669.23
Fin mes 5	65 427.56	1 985.02	67 412.58	332 081.81
Fin mes 6	65 427.56	2 490.61	67 918.17	399 999.98
Totales	392 565.36	7 434.62	334 572.42	—

Y, de nueva cuenta, los 2 centavos que faltan para completar los $400 000 de la deuda es un simple error de redondeo.

El ejemplo 8.8.2 trata de una persona que adquiere a crédito un departamento en condominio por el que debe pagar, aparte de otros conceptos, una anualidad de $165 000 al final de cada uno de los tres primeros años. El comprador decide acumular un fondo de amortización para cumplir con este compromiso haciendo depósitos quincenales en una cuenta que paga 12% convertible mensualmente. Se pide determinar cuánto debe depositar cada quincena para acumular lo que necesita pagar cada fin de año.

Aquí se tiene el monto ($165 000) de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata y se sabe que el interés es de 1% efectivo mensual y que se deben hacer 24 depósitos quincenales.

En primer lugar, para determinar la tasa efectiva quincenal que equivale a 1% efectivo mensual: =(1.01^(0.5))–1 produce el valor que se busca, 0.004987562. Un detalle que vale la pena observar aquí es que en la fórmula se utilizaron paréntesis para separar la operación de potenciación "=(1.01^(0.5))" de la de la resta, "–1" y para separar la potencia de la base, "1.01^(0.5)". Se hizo así para enfatizar el orden de las operaciones pero, por otro lado, se pudo haber obtenido el mismo resultado sin esos paréntesis, usando solamente =1.01^0.5–1, conociendo el orden de prioridad con el que Excel ejecuta las operaciones: primero realiza las más complejas (potenciación en este caso) y después las más sencillas (la resta en este caso), que es precisamente lo que se quería hacer.

Después de determinar la tasa aplicable, se usa la función PAGO, de la siguiente manera: =PAGO(1.01^0.5–1,24,,165 000), con la que se obtienen los –$6 488.84 que se buscan. Nótese que, por supuesto, se pudo haber colocado directamente en la función PAGO la fórmula para determinar la tasa quincenal efectiva y aquí se calculó aparte al principio para recordar este detalle que se estudió antes en el capítulo 3 de interés compuesto.

8.14.9 Total acumulado en un fondo de amortización y saldo insoluto de la deuda (sección 8.9)

En el ejemplo 8.9.1 se explican los conceptos de total acumulado y de saldo insoluto de un fondo de amortización utilizando la tabla de amortización que se elaboró para el ejemplo 8.8.1.

En el ejemplo 8.9.2 se pide determinar la cantidad acumulada en un fondo de inversión que rinde 0.8% mensual efectivo si se hacen depósitos mensuales de $1 000 durante 7 años. Aquí se trata simplemente de encontrar un monto, con tasa de 0.008, renta de $1 000 y 7 × 12 = 84 periodos. Con Excel: =VF(0.008,84,–1 000) produce el monto que se busca: $119 115.14.

En el ejemplo 8.9.3 se pide utilizar los datos del ejemplo anterior, el 8.9.2, para determinar en cuánto se incrementa el fondo del mes 83 al mes 84 por concepto de intereses.

Ya se determinó que el valor del fondo en el mes 84 es de $119 115.14 y se determina ahora el monto al mes 83: =VF(0.008,83,–1 000) = $117 177.72.

Por lo que 119 115.14 – 117 177.72 = $1 937.42 es lo que se incrementa el fondo de un mes al otro y de esa cantidad $1 000 corresponden al depósito mensual por lo que el incremento por intereses es de: $937.42.

8.14.10 Número de depósitos en un fondo de amortización (sección 8.10)

En el ejemplo 8.10.1 se busca determinar el número de depósitos mensuales de $850 que son necesarios para liquidar una deuda de $4 800 a su vencimiento, si el fondo gana 9% convertible mensualmente.

Con Excel: =NPER(0.09/12,–850,,4 800) = 5.55 (note, de nuevo, la doble coma).

Así, se puede reunir la cantidad necesaria para pagar la deuda haciendo 5 depósitos de $850, más un sexto depósito de: =4 800–((VF(0.09/12,5,–850))*1.0075) = 453.41.

Se puede apreciar en esta fórmula que al monto de la deuda se le resta el valor al sexto mes de lo acumulado al quinto mes.

El ejemplo 8.10.2 trata de una persona que debe pagar $7 500 el 2 de junio y que forma un fondo de amortización depositando $1 216.06 mensuales en una inversión que rinde 14.03% efectivo anual y se pregunta en el día 2 de qué mes se debe hacer el primer depósito para reunir la cantidad que se adeuda precisamente el 2 de junio.

Aquí también se debe encontrar la tasa efectiva mensual correspondiente a 14.03% efectivo anual. Es decir, se desea determinar la i que satisface la siguiente ecuación:

$$(1 + i)^{12} = 1.1403$$

Despejando la i: $i = 1.1403^{1/12} - 1$ se obtiene la tasa que se requiere y, tal como se ha visto antes, no es necesario resolver esta ecuación, sino que se puede anotar directamente en la función de Excel. Para encontrar cuándo se deben iniciar los depósitos, es necesario determinar el número de periodos, por lo que: =NPER(1.1403^(1/12)–1,–1 216.06,,7 500) = 6 indica que se requieren seis depósitos vencidos para acumular la cantidad necesaria y, entonces, si se debe pagar el 2 de junio, se debe comenzar el 2 de enero.

8.14.11 Tasa de interés en un fondo de amortización (sección 8.11)

En el ejemplo 8.11.1 se busca determinar la tasa de interés que paga un fondo mediante el cual se pagó una deuda de $250 000 acumulando 8 depósitos mensuales vencidos de $30 492.386. En este caso se utiliza la función TASA de la siguiente manera: =TASA(8,–30 492.386,,250 000) = 0.007, o sea 0.7%.

En el ejemplo 8.11.2 se pide calcular cuál fue la tasa efectiva anual que pagó un fondo que se constituyó mediante 5 depósitos mensuales vencidos de $1 966.29 y que permitió acumular $10 000 que se requerían para pagar una deuda.

Utilizando de nuevo TASA: =TASA(5,–1 966.29,,10 000) = 0.0084994.

O sea, 0.85%. A partir de esta tasa efectiva mensual, la tasa efectiva anual: =(1.0085^12)–1 = 0.1069, o 10.69%.

8.14.12 Comparación entre amortización y fondo de amortización (sección 8.12)

En el ejemplo 8.12.1 se ilustra cómo la amortización y los fondos de amortización son operaciones simétricas. Se analiza una situación en la que se tiene una deuda de $1 000, a valor actual que, a 18% anual, con capitalización mensual, equivale a un monto de $1 061.36 dentro de 4 meses. En primer lugar, se puede verificar con Excel esta equivalencia con: =1 000*1.015^4 = 1 061.36. Por supuesto, la relación inversa también se cumple: =1 061.36*(1.015^(–4)) = 1 000. (En ambos casos con minúsculas diferencias debidas a redondeo).

También en ambos casos la renta es la misma:

=PAGO(0.015,4,1 000) = 259.44 para valor actual
=PAGO(0.015,4,,1 061.36) = 259.44 para monto o valor futuro

Y, siendo así, las tablas de amortización y de fondo de amortización son las siguientes, que se construyen también utilizando el procedimiento que se ha usado repetidamente antes:

Tabla de amortización

Fecha	Pago bimestral	1.5% sobre saldo insoluto	Amortización	Saldo
Al contratar	—	—	—	1 000.00
Fin mes 1	259.44	15.00	244.44	755.56
Fin mes 2	259.44	11.33	248.11	507.45
Fin mes 3	259.44	7.61	251.83	255.63
Fin mes 4	259.44	3.83	255.61	0.02
Totales	1 037.76	37.78	999.98	—

Tabla de fondo de amortización

Fecha	Depósito por periodo	1.5% de interés	Total que se suma al fondo	Saldo
Fin mes 1	259.44	0.00	259.44	259.44
Fin mes 2	259.44	3.89	263.33	522.77
Fin mes 3	259.44	7.84	267.28	790.05
Fin mes 4	259.44	11.85	271.29	1 061.34
Totales	1 037.76	23.58	1 061.34	—

Y, al igual que en otros casos, la diferencia de 2 centavos en ambas tablas se debe a redondeo.

En el ejemplo 8.12.2 se analiza el caso de una persona que trabaja en un banco y que obtiene un préstamo de $100 000 que debe pagar mediante 6 abonos mensuales con intereses de 6% convertible mensualmente. Como este trabajador puede invertir el préstamo a 1% mensual, se pregunta cuánto ganaría al final de los 6 meses si efectivamente lo invierte y de ahí paga el préstamo.

Para resolver este ejemplo, se construye una tabla que muestre el comportamiento de ambos contratos y se empieza, igual que antes, por anotar los encabezados de columna y de renglón. Se podría, en seguida, determinar el monto de las mensualidades que debe pagar para liquidar el adeudo: =PAGO(0.06/12,6,100 000) = $16 959.55.

Después se anota esta cantidad en los seis renglones de la columna de "Abono a la deuda". Se anota la fórmula de los intereses generados en el fondo (=D2*0.01) en la celda B3 y se anota el saldo nuevo de cada mes, en la celda D3: =D2+B3–C3, con lo que se completa el renglón 3 y ahora sólo resta arrastrar estas fórmulas hasta el renglón 8, con lo que se obtiene la siguiente tabla, en la que se puede ver que esta persona obtiene una utilidad de $1 816.61 en la operación.

Fecha	Intereses acumulados al fondo	Abono a la deuda	Total en el fondo de inversión
Al contratar	—	—	100 000.00
Fin mes 1	1 000.00	16 959.55	84 040.45
Fin mes 2	840.40	16 959.55	67 921.30
Fin mes 3	679.21	16 959.55	51 640.97
Fin mes 4	516.41	16 959.55	35 197.83
Fin mes 5	351.98	16 959.55	18 590.26
Fin mes 6	185.90	16 959.55	1 816.61

8.14.13 Aplicaciones (sección 8.13)

El ejemplo 8.13.1 trata de la adquisición de un departamento de interés social con valor de $300 000, pagando 20% de enganche y el saldo a 15 años con abonos mensuales de $2 349.33 y se pide determinar la tasa de interés anual nominal, convertible mensualmente, que se paga en la operación. Utilizando la función TASA: =TASA(180,–2 349.33,240 000), se obtiene fácilmente el valor = 0.007 que es la tasa efectiva mensual. La tasa nominal anual convertible mensualmente se obtiene, en forma igualmente fácil, multiplicando 0.007 por 12, o sea, 0.084, que equivale a 8.4%.

En el ejemplo 8.13.2 se pide encontrar el valor de 18 pagos mensuales y la tasa efectiva anual que se cobra en la compra de un automóvil que cuesta $138 500 con 30% de enganche y saldo a 18 mensualidades con 2% de interés "global mensual".

Tal como se vio al resolver este ejemplo con calculadora, el interés "global" significa que se cobra esa tasa sobre el saldo inicial, para cada uno de los 18 meses del plazo.

Entonces, el valor del vehículo menos el enganche es, en Excel, =138 500*0.8 = 96 950.

Y sobre esta cantidad se calculan los intereses de cada mes: =96 950*0.02 = 1939

El abono mensual al capital es de =96 950/18 = 5 386.11.

Por lo que los pagos mensuales ascienden a: =5 386.11+1 939 = 7 325.11.

Ya teniendo estos valores, se utiliza la función TASA para determinarla en este caso:

=TASA(18,–7 325.11,96 950) = 0.0345839, o sea una tasa efectiva mensual de 3.45839%

De donde, la tasa efectiva anual es =1.0345839^12–1 = 0.5038 o 50.38%.

En el ejemplo 8.13.3 se analizan las condiciones de la compra de una estufa que cuesta $2 000 al contado y se paga mediante un enganche de $800 y 6 pagos bimestrales iguales con interés de 30% convertible bimestralmente. Se pide:

a) Encontrar el valor de los pagos.
b) Construir una tabla de amortización.
c) Determinar el valor de los derechos adquiridos por la compradora inmediatamente antes del cuarto pago.

Entonces:

a) El pago bimestral, con Excel: =PAGO(0.3/6,6,1 200) = $236.42.
b) La tabla de amortización:

Fecha	Pago bimestral	3% sobre saldo insoluto	Amortización	Saldo
Al contratar	—	—	—	1 200.00
Fin mes 1	236.42	60.00	176.42	1 023.58
Fin mes 2	236.42	51.18	185.24	838.34
Fin mes 3	236.42	41.92	194.50	643.84
Fin mes 4	236.42	32.19	204.23	439.61
Fin mes 5	236.42	21.98	214.44	225.17
Fin mes 6	236.43	11.26	225.17	0.00
Totales	1 418.53	218.53	1 200.00	—

Las fórmulas:

En la celda C3: =0.05*E2
En la celda D3: =B3–C3
En la celda E3: =E2–D3

Se arrastran estas tres celdas hasta el fin del mes seis y se calculan totales, como antes.

c) Para determinar los derechos adquiridos por la compradora inmediatamente antes del cuarto pago se calcula primero el valor de los tres primeros pagos, al final del cuarto mes. En Excel: =(VF(0.05,3,–236.42))*1.05 = 782.579753.

A este valor se le deben restar los intereses generados por el crédito durante esos cuatro meses: =1 200*((1.05)^4–1) = 258.6075.

Los derechos adquiridos por la compradora inmediatamente antes de realizar el segundo pago: 782.61 – 258.61 = $523.97.

O, en una sola fórmula: =((VF(0.05,3,–236.43))*1.05) – 1 200*((1.05)^4–1)) = 524.

Y, de nueva cuenta, las ligeras diferencias contra los resultados obtenidos en calculadora se deben a redondeo.

8.15 Resumen

Amortizar es *extinguir* una deuda actual mediante pagos periódicos. Un fondo de amortización es una reserva que se acumula mediante *depósitos* periódicos con el objeto de extinguir una deuda futura. Los valores de las amortizaciones y de los fondos de amortización se calculan con la fórmula de anualidades adecuada según la situación. Los conceptos son equivalentes: la renta de una anualidad es el pago periódico de una amortización o el depósito de un fondo de amortización. Las tablas de amortización y de fondo de amortización muestran la forma en que se van modificando las condiciones de un periodo a otro.

Comprobación del capítulo

Si ha leído el capítulo completo, el lector debe:

- Definir y explicar el concepto de amortización.
- Definir y explicar el concepto de fondo de amortización.
- Identificar situaciones en las que puedan aplicarse estos conceptos.
- Plantear y resolver ejemplos de amortización y de fondo de amortización encontrando:
    - El pago o depósito periódico.
    - El valor actual o futuro a pagar.
    - La tasa de interés.
    - El plazo.
    - El número de pagos periódicos o depósitos necesarios según se requiera.
- Elaborar tablas de amortización y de fondo de amortización.

Términos y conceptos importantes

- Amortización
- Depósito periódico
- Derechos del acreedor
- Derechos del deudor
- Fondo de amortización
- Pago periódico
- Saldo

Ejercicios complementarios

1. Haga una tabla que muestre cómo se amortiza una deuda de \$40 000 contratada hoy y que debe pagarse mediante 5 pagos mensuales iguales y vencidos si se carga 9% anual convertible mensualmente.
2. ¿Cuál sería el importe de cada uno de 15 pagos bimestrales iguales y vencidos necesarios para pagar un automóvil que cuesta \$127 800, si se da un enganche de \$27 800 y se cobra un interés de 1.2% mensual sobre saldos insolutos?
3. El señor Ramírez compra un juego de muebles de sala en \$14 500. Paga 15% de enganche y 3 mensualidades de \$3 000 cada una a los 30, 60 y 90 días de realizada la operación, respectivamente. Si convino en liquidar el resto mediante 2 mensualidades más a los 120 y 150 días, ¿cuál será el importe de cada uno de estos pagos iguales si la transacción se contrató a 1.5% mensual sobre saldos insolutos?
4. Un abogado debe liquidar mediante 13 pagos mensuales vencidos una deuda de \$10 000 que contrae hoy. Si paga intereses a razón de 1.8% mensual sobre saldos insolutos y conviene en pagar 12 mensualidades iguales de \$850, ¿cuál debe ser el importe del último pago para amortizar totalmente su deuda?
5. Haga una tabla de amortización que muestre las condiciones de una deuda en los dos primeros y en los 2 últimos periodos si el importe del débito es de \$5 450 y se convino en amortizarlo mediante 24 pagos bimestrales vencidos y la tasa es de 0.9% mensual sobre saldos insolutos.

6. Se compró un automóvil con \$42 000 de enganche y un saldo de \$126 000 a pagar en 24 mensualidades iguales con 17% anual capitalizable mensualmente. ¿A cuánto ascendían los derechos adquiridos por el comprador sobre el automóvil exactamente después de realizar el decimotercer pago?
7. Al comprar un refrigerador que cuesta \$12 900, un cliente pagó 25% de enganche y acordó pagar el saldo con 5 pagos mensuales vencidos iguales y con intereses de 1.5% mensual sobre saldos insolutos. ¿A cuánto ascendían los derechos adquiridos por el cliente inmediatamente antes de realizar el tercer pago?
8. ¿Cuál sería el saldo insoluto de una deuda de \$9 380 contratada hoy y para pagar mediante 6 pagos bimestrales iguales y vencidos con interés de 2% bimestral efectivo, exactamente al realizar el segundo pago?
9. Daniel obtiene un préstamo hoy por \$20 000. Conviene en pagarlo mediante abonos quincenales de \$1 000. Si el interés que pagará es de 1.8% efectivo mensual, ¿cuál será el saldo de su deuda inmediatamente antes de realizar el décimo pago?
10. Se va a amortizar una deuda de \$8 000 con 12 pagos mensuales iguales con 15% anual convertible bimestralmente. Calcule el saldo de la deuda al realizar el sexto pago y determine de este sexto pago qué proporción es de intereses y qué proporción corresponde a amortización.
11. Se adquiere un departamento que cuesta \$800 000 con \$60 000 de enganche y el saldo a pagar a 15 años, con interés variable y abonos mensuales. Si durante el primer año se carga 14% anual convertible mensualmente y se pagan 12 mensualidades de \$12 000 y durante el segundo año se carga 12% anual convertible mensualmente y se pagan 6 mensualidades de \$1 000, hallar el saldo insoluto al hacer el decimoctavo pago.
12. Se paga una deuda de \$8 370 con 15 pagos mensuales vencidos iguales, con 25% de interés efectivo anual. ¿Qué cantidad se paga en total de intereses?
13. El señor López obtiene un préstamo de \$71 500 para comprar un automóvil usado. Va a liquidar el préstamo con pagos mensuales durante 3 años con 24.5% efectivo anual. ¿Qué cantidad paga de intereses durante el segundo año?
14. ¿Por qué en una operación de amortización la parte de los pagos que se aplica a la amortización misma va siendo cada vez mayor?
15. Una persona adquiere muebles a crédito para su casa por valor de \$18 000 que conviene en amortizar mediante 24 mensualidades con 1.5% de interés mensual. Seis meses después de realizada la compra obtiene un préstamo de una institución de seguridad social, con el cual liquida el saldo de su deuda que queda con 0.5% de interés mensual y al mismo plazo. ¿Cuánto se ahorró de intereses?
16. ¿Cuántos pagos bimestrales vencidos de \$948.62 serían necesarios para amortizar una deuda de \$9 500 si el interés es de 1.7% mensual efectivo?
17. ¿Cuántos pagos mensuales de \$1 000 serían necesarios para pagar una deuda de \$5 000 si se carga interés de 26% efectivo anual? ¿De qué cantidad tendría que ser el último pago (menor que \$1 000) para amortizar completamente la deuda?
18. Una empresa adquiere tres vehículos de carga usados que cuestan en total \$238 000 mediante 10 pagos bimestrales de \$32 500. ¿Qué tasa anual efectiva se pagó?
19. Un equipo modular cuesta \$6 800 de contado. En abonos se vende con \$2 000 de enganche y 6 pagos mensuales vencidos de \$900.80. ¿Qué tasa de interés nominal anual con capitalización mensual se carga en la operación?
20. ¿Qué cantidad tendría que depositar cada mes el señor Lozano para acumular \$50 000 dentro de 6.5 años si los depósitos los hace en un fondo de inversión que paga 1% mensual?
21. Construya una tabla de amortización que muestre la forma en que se acumula un fondo, durante 6 meses, mediante depósitos mensuales vencidos de \$100 a 10% anual efectivo.
22. Construya una tabla de amortización que muestre la forma en que se acumularían \$5 000 en un fondo de amortización, al cabo de 6 meses, mediante depósitos mensuales vencidos si el instrumento de inversión en que se coloca el fondo rinde 6% anual capitalizable trimestralmente.
23. Romeo y Julieta desean ahorrar \$60 000 para dar el enganche de un departamento. Si ahorran \$1 500 mensuales en una cuenta bancaria de inversión, ¿cuántos depósitos necesitarían hacer y cuál sería el valor del último depósito, superior a \$1 500, si su fondo gana interés a razón de 0.9% mensual?
24. Jorge York necesita tener \$78 500 dentro de 3 años para liquidar una deuda contraída en su negocio. Encuentre los depósitos trimestrales que tendría que hacer a un fondo de amortización que paga 9.8% anual convertible mensualmente y construya una tabla que muestre el comportamiento del fondo durante los 3 primeros y los 3 últimos trimestres.
25. Una comerciante puede obtener un préstamo por \$14 000 que puede pagar de 2 modos:

    a) Amortizándolo mediante 24 pagos mensuales con interés a 2.5% mensual sobre saldos insolutos.
    b) Pagar intereses sobre el préstamo a 30% anual efectivo y formar un fondo de amortización mediante 24 depósitos mensuales en un fondo que paga el 22% anual efectivo.
    c) ¿Qué plan resulta más económico y en qué cantidad mensual?

26. ¿Qué tipo de interés tendría que rendir un fondo de amortización que se crea con 6 depósitos bimestrales de \$159.50 para acumular al realizar el sexto depósito \$1 000?

Matemáticas en internet. Anualidades anticipadas

8.1 Introducción

- Alguna información teórica de amortización. Contiene datos interesantes y también se nos habla del enfoque contable.
  http://ciberconta.unizar.es/LECCION/costprod/100.HTM

8.2 Tablas de amortización

- Proporciona información referente a la amortización de un préstamo, algunas fórmulas para amortizar un préstamo:
  - Amortizaciones con pago de capital único.
  - Amortizaciones con pago de capital fraccionado en cuotas.

  http://centros4.pntic.mec.es/~santam24/economat/amortizacion.htm
- Tasas de interés en la amortización.
  http://usuarios.lycos.es/matematic/segunda.htm#tasas

8.3 Importe de los pagos en una amortización

- Mismas ligas que sección 8.2.

8.4 Derechos adquiridos por el deudor y saldo en favor del acreedor

- Mismas ligas que sección 8.2.
  http://www.fordcredit.com/
- Contiene un simulador de pagos para la adquisición de un crédito de la línea de automóviles Ford. Aquí puedes poner el plazo al que quieres tu crédito, la cantidad de enganche, etcétera.
  http://www.fordcredit.com/

8.5 Número de pagos en una amortización

- Mismas ligas que sección 8.2.
- Contiene un simulador de pagos para la adquisición de un crédito de la línea de automóviles Ford. Aquí puedes poner el plazo al que quieres tu crédito, la cantidad de enganche, etcétera.
  http://www.fordcredit.com/

8.11 Tasa de interés en un fondo de amortización

- Tasas de interés en la amortización.
  http://usuarios.lycos.es/matematic/segunda.htm#tasas

CAPÍTULO

9

Inversión en bolsa de valores

TEMARIO

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

- Explicar las características fundamentales de los títulos-valor que se negocian en la Bolsa Mexicana de Valores
- Exponer las formas en que se pueden obtener rendimientos a través de estos valores
- Calcular las tasas efectivas de rendimiento de esos valores, a cualquier plazo y en diversas circunstancias

9.1 Introducción

El mercado de valores representa, por un lado, una de las más importantes fuentes de financiamiento para las organizaciones tanto del sector público como del privado y, por otra parte, una amplia gama de alternativas de inversión, ahorro y manejo de excedentes monetarios.

La Bolsa de Valores, reglamentada mediante la Ley del Mercado de Valores, es la institución (mercado) en cuyo piso de remates se realizan transacciones de compraventa de valores de los documentos (valores) que formalizan operaciones. En el presente capítulo se describen brevemente las características de los diversos instrumentos bursátiles y se revisan los procedimientos que se aplican para calcular sus rendimientos efectivos en distintas circunstancias.

9.2 Rendimientos de valores bursátiles

Las tres formas en las que se obtienen ingresos (rendimientos) sobre las inversiones bursátiles son:

- interés,
- dividendos y
- ganancias de capital.

El *interés* es el pago que se pacta por el uso de capital ajeno. Los *dividendos* son las utilidades que obtienen las empresas y que reparten entre sus accionistas. Estos dividendos se pueden pagar en efectivo o en acciones. Se obtienen *ganancias de capital* cuando se venden títulos a un precio superior al que se paga en el momento de comprarlos. Es la forma más común de obtener rendimientos en la bolsa de valores e incluye el caso de diversos instrumentos que se venden por debajo de su valor nominal, con la consiguiente ganancia de capital. Incluye también, por supuesto, el caso de valores cuyo precio varía en el mercado, lo cual ocasiona diferencias entre el valor de compra y el de venta, como es el caso de las acciones y otros instrumentos. En este renglón de ganancias de capital se incluyen el aumento de valor que experimentan algunos instrumentos por el hecho de que su precio está asociado al tipo de cambio peso-dólar o a las Udis (unidades de inversión). Este concepto es importante, ya que las ganancias de capital están exentas del pago de impuesto sobre la renta, mientras que los ingresos por intereses o dividendos sí son gravados por este concepto. Por supuesto, esta diferencia tiene efecto sobre el rendimiento efectivo que el inversionista obtiene.

9.3 Los valores bursátiles

Los instrumentos que se negocian actualmente en la Bolsa Mexicana de Valores se clasifican según el emisor. En los siguientes incisos se describe a cada uno de ellos y se explica la forma en que pueden generar rendimientos; luego se muestran ejemplos de los diferentes tipos de cálculos que se requieren para evaluar los rendimientos.

Emitidos por entidades gubernamentales

- Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (Bondes).
- Bonos de Protección al Ahorro (BPA).
- Bonos de Regulación Monetaria del Banco de México (Brems).
- Certificados Bursátiles (Cebur).
- Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes).
- Pagarés de Indemnización Carretera (PIC-FARAC).
- Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en Udis (Udibonos).

Más adelante se describen sus principales características.

Emitidos por empresas

- Acciones de empresas comerciales, industriales y de servicios.
- Acciones de sociedades de inversión.
- Aceptaciones bancarias.

- Bonos bancarios.
- Certificados bursátiles.
- Certificados de depósito.
- Certificados de participación:
  - Ordinarios (CPO).
  - Inmobiliarios (CPI).
- Obligaciones.
- Pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento.
- Pagaré de mediano plazo.
- Pagaré financiero.
- Papel comercial.

1. Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (Bondes) son títulos de crédito a largo plazo creados a partir de un decreto publicado en el *Diario Oficial de la Federación* el 22 de septiembre de 1987. Su propósito es financiar los proyectos de largo plazo del gobierno federal, fungiendo éste como garante. Los rendimientos que ofrecen son intereses pagaderos mensualmente, aunque en la Bolsa de Valores suelen intercambiarse a un precio distinto a su valor nominal, por lo cual también se obtienen ganancias o pérdidas de capital. Se colocan en el mercado a descuento, con un rendimiento pagadero cada 28 días (Cetes a 28 días o TIIE, la que resulte más alta).
2. Los Bonos de Protección al Ahorro (BPA) son emitidos por el Instituto Bancario de Protección al Ahorro con el fin de hacer frente a sus obligaciones contractuales. Tienen un valor nominal de $100 amortizables al vencimiento de los títulos, en una sola exhibición y a un plazo de tres años. Se colocan en el mercado a descuento y sus intereses son pagaderos cada 28 días. La tasa de interés será la mayor entre la tasa de rendimiento de los Cetes a un plazo de 28 días y la tasa de interés anual más representativa que el Banco de México dé a conocer para los pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento (PRLV) en el plazo de un mes.
3. Los Bonos de Regulación Monetaria del Banco de México (Brem), como su nombre lo indica, son emitidos por el banco central mexicano a plazos de entre uno y tres años y tienen un valor nominal de $100. Pagan intereses cada 28 días de acuerdo con una tasa variable, la cual se calcula capitalizando todos los días y durante todo el periodo de pago de interés la tasa a la cual las instituciones de crédito realizan operaciones de compra-venta y reporto a plazo de un día hábil con títulos bancarios, que es conocida en el mercado como *tasa ponderada de fondeo de títulos bancarios*, la cual publica diariamente el propio Banco de México.
4. Los Certificados Bursátiles son títulos de crédito que se emiten en serie o en masa que pueden colocarse a descuento o con pago de intereses según el programa correspondiente de colocación; las emisiones pueden tener valor nominal de $100 o 100 Udis. Los emisores pueden ser sociedades anónimas, entidades de la administración pública federal o paraestatal, entidades federativas, municipios y entidades financieras que actúen en calidad de fiduciarias. Los hay de corto y de largo plazos.
5. Los Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes) fueron creados en 1977 para financiar la inversión productiva del gobierno federal, regular el circulante, influir sobre las tasas de interés y propiciar un sano desarrollo del mercado de valores. Debido a que se venden con descuento, los rendimientos que se obtienen son a través de ganancias de capital. Las emisiones suelen ser a 28, 91, 182 y 364 días, aunque se han realizado emisiones a plazos mayores.
6. Los pagarés de indemnización carretera, también conocidos como PIC-FARAC (por pertenecer al Fideicomiso de Apoyo al Rescate de Autopistas Concesionadas), son pagarés avalados por el Gobierno Federal a través del Banco Nacional de Obras y Servicios, S.N.C., en el carácter de fiduciario. Tienen valor nominal de 100 Udis, un plazo de 5 a 30 años y el rendimiento en moneda nacional de este instrumento dependerá del precio de adquisición, con pago de la tasa de interés fija cada 182 días.
7. La primera emisión de los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en Udis o Udibonos se realizó el 30 de mayo de 1996. Estos bonos pagan una tasa de interés real sobre un valor nominal de 100 Udis (Unidades de Inversión), el cual se actualiza de acuerdo con el incremento del Índice Nacional de Precios al Consumidor, por lo que sus rendimientos son a través tanto de ganancias de capital como de intereses. Son emitidos a plazos de 3 y 5 años y pagan intereses de manera semestral.

Emitidos por empresas

1. Las acciones de empresas, sean comerciales, industriales o de servicio, son títulos que representan la propiedad de sus tenedores sobre una de las partes iguales en que se divide el capital de la sociedad anónima correspondiente. En estas acciones, las ganancias que se pueden obtener son de dos tipos: ganancias de capital y dividendos (en acciones o en efectivo).
2. Las acciones de sociedades de inversión (las hay de varios tipos) son títulos que representan la participación (propiedad) de sus tenedores sobre las partes iguales en que se divide un fondo destinado a inversiones financieras. Las ganancias que pueden obtenerse mediante estos instrumentos se logran a través de ganancias de capital.
3. Las aceptaciones bancarias son letras de cambio emitidas por empresas y avaladas por bancos, con base en créditos que la institución aceptante (banco) concede a las emisoras. Con aceptaciones bancarias se pueden obtener rendimientos mediante ganancias de capital, ya que se venden con descuento.
4. Los bonos bancarios son títulos que documentan préstamos a largo plazo, que por lo general rebasan el año. Estos valores otorgan rendimientos principalmente a través del pago de intereses, aunque también existen bonos que no hacen pagos periódicos de interés, sino que capitalizan estos pagos, pero ello no altera el concepto del rendimiento mediante interés. Los bonos bancarios de desarrollo son emitidos por los bancos de desarrollo. El propósito de estos bonos es, de hecho, fomentar el desarrollo nacional en el área de competencia del banco emisor.
5. Los certificados de depósito son, precisamente, constancias de depósito en instituciones bancarias que se negocian a través de las casas de bolsa. Estos certificados pagan intereses.
6. Los certificados de participación son documentos de varios tipos que representan los derechos sobre un fideicomiso organizado respecto a determinados bienes. Los certificados de participación ordinarios, como los Certificados de plata (Ceplatas), representan los derechos de sus tenedores sobre un fideicomiso constituido con plata y el rendimiento que proporcionan corresponde a ganancias de capital.
7. Los certificados de participación inmobiliarios representan los derechos que sus tenedores tienen sobre determinados inmuebles comprometidos como patrimonio de un fideicomiso y otorgan rendimientos por medio de pagos periódicos de interés y a través de ganancias de capital.
8. Las obligaciones son títulos-valor nominativos a través de los cuales se documenta el préstamo que una sociedad anónima (o una sociedad nacional de crédito) obtienen de un conjunto de inversionistas. El rendimiento se concreta en pagos periódicos de interés y ganancias de capital. Al igual que otros instrumentos, las hay de varios tipos. Las obligaciones hipotecarias están garantizadas por bienes inmuebles, y ofrecen rendimientos principalmente por pagos periódicos de interés (las más de las veces son pagos mensuales) y, secundariamente, mediante ganancias de capital.

    Las obligaciones quirografarias no tienen garantías específicas, aparte de la solvencia de la emisora, aunque sus rendimientos se dan en las mismas formas que las obligaciones hipotecarias.

    Por su parte, las obligaciones convertibles ofrecen a su tenedor la opción de obtener acciones de la empresa emisora en su fecha de vencimiento, en vez de obtener su valor nominal en efectivo.

    Las obligaciones indizadas otorgan rendimientos aplicando a su valor nominal el crecimiento del Índice Nacional de Precios al Consumidor. Esta actualización se lleva a cabo cada 91 días.

    Las obligaciones con rendimiento capitalizable, como su nombre lo indica, son aquellas en las que los intereses que se generan no se pagan en efectivo al tenedor, sino que pasan a aumentar el capital invertido.

    A las obligaciones subordinadas se les llama así porque, en caso de liquidación de la emisora, se pagan a prorrata después de haber cubierto todas las deudas restantes de la institución, pero antes de repartir a los tenedores de las acciones el remanente del haber social.
9. Los pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento son títulos emitidos por instituciones bancarias que se negocian en la Bolsa Mexicana de Valores.
10. Los pagarés de mediano plazo son títulos de deuda emitidos por sociedades mercantiles mexicanas que gozan de la facultad de contraer pasivos y suscribir títulos de crédito. Tienen un valor nominal de $100 o 100 Udis, con un plazo que va de uno a siete años y pagan intereses perió-

dicamente (cada mes, trimestre, semestre o año) con base en tasas revisables establecidas. Las garantías pueden ser quirografarias avaladas o con garantía fiduciaria.

11. El papel comercial está constituido por pagarés que se utilizan para documentar créditos, usualmente entre empresas. Los rendimientos que ofrecen son ganancias de capital pues se pactan mediante tasa de descuento.

En las secciones siguientes se dan ejemplos de cómo calcular el rendimiento nominal y el rendimiento efectivo de los diversos instrumentos bursátiles, según el tipo de ganancia o rendimiento que principalmente permiten y, para facilitar el análisis, en la tabla 9.1 se resumen los tipos de rendimiento que cada uno de ellos ofrece. Con respecto a esta tabla es conveniente observar que sólo se esquematizan los rendimientos que estos valores suelen ofrecer, ya que no es raro que se emitan valores con características peculiares, tal como puede ejemplificarse con los Udibonos que, como se mencionó, permiten obtener ganancias de capital de acuerdo con el aumento de la inflación, al tiempo que pagan una tasa de interés real.

Tabla 9.1 Rendimientos de las diversas alternativas de inversión en la Bolsa Mexicana de Valores

Título-valor	Tipo de rendimiento		
	Intereses	Ganancias de capital	Dividendos
Emitidos por entidades gubernamentales:			
Bondes	Sí	Sí	No
Brems	Sí	Sí	No
Certificados bursátiles	Sí	Sí	No
Cetes	No	Sí	No
PIC-FARAC	Sí	Sí	No
Udibonos	Sí	Sí	No
Emitidos por empresas:			
Acciones de empresas	No	Sí	Sí
Acciones de sociedades de inversión	No	Sí	No
Aceptaciones bancarias	No	Sí	No
Bonos bancarios	Sí	Sí	No
Certificados bursátiles	Sí	Sí	No
Certificados de depósito	Sí	Sí	No
Certificados de participación ordinarios	Sí	Sí	No
Certificados de participación inmobiliarios	Sí	Sí	No
Obligaciones	Sí	Sí	No
Pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento	Sí	No	No
Pagaré de mediano plazo	Sí	Sí	No
Papel comercial	No	Sí	No

9.4 Rendimiento de valores que ofrecen ganancias de capital

Como antes se expuso, las ganancias de capital se obtienen al comprar un título y venderlo a un precio superior. Esta diferencia entre el precio de compra y el de venta se da, en un caso muy frecuente, en valores que se venden con descuento. Esto quiere decir que los valores se venden a un precio inferior al que tienen a su vencimiento (valor nominal); el precio de venta se determina mediante una **tasa de descuento**, la cual permite determinar el precio inferior al de vencimiento al que se venden los títulos en el momento de su colocación en el mercado.

El otro caso es el que surge por cambios en los precios de los valores en las operaciones de compraventa que se realizan en la Bolsa de Valores (precio de mercado), y que ilustran clásicamente las acciones de empresa y las acciones de sociedades (fondos) de inversión. En ambos casos, el cálculo del rendimiento se hace de manera muy simple, pues se divide la ganancia entre el precio pagado por el título, el cual a veces coincide con el valor nominal.

9.4.1 Acciones de sociedades de inversión

En la tabla 9.2 se presentan los precios, para diversas fechas, de algunas sociedades de inversión seleccionadas. Estos precios se pueden consultar en la sección financiera de los principales periódicos del siguiente día hábil.

Tabla 9.2 Precio de cierre de acciones de sociedades de inversión. Meses de 2012

Deuda	2-May	27-Jul	31-Jul	16-Ago
Afirmes A	178.882823	180.534638	180.605507	180.832311
Awlasa A	37.540652	37.856768	37.869424	37.916709
Fonser1 B1	32.373403	32.402309	32.403943	32.409639
Hzliq A	1.694277	1.697056	nd	nd
Scotia1 A	1.45917	1.473901	1.474611	1.477296
Discrecional				
Alterna A	3.30204	3.345444	3.346005	3.351623
Maya A	nd	nd	29.735936	29.620563
Hzes A	3.0183	3.032969	nd	nd
Inburex A	23.214913	23.65262	nd	nd
Inters1 A	25.065831	26.400349	26.379135	26.084924
Variable				
Accipat A	143.5282	149.522606	149.5566	149.755027
Gbmagr A	1.090459	1.163363	1.173109	1.175516
Ing-Ipc A	7.255482	7.598899	7.664527	7.568393
Valmx20 A	7.86022	7.86022	nd	nd
Awlloyd A	11.715006	11.715006	nd	nd

El procedimiento para calcular la tasa efectiva de rendimiento de valores que tienen precios distintos en fechas diferentes, consiste en dividir el precio de la fecha posterior entre el capital. Este cociente menos uno da la tasa efectiva de rendimiento al plazo y con ésta se puede determinar la tasa efectiva a cualquier otro plazo conveniente para hacer comparaciones (normalmente un mes de 30 días o el año de 365). En símbolos:

$$i_p = \frac{M}{C} - 1 \tag{9.1}$$

Otra forma de considerar este rendimiento consiste en recordar que:

$$i_p = \frac{I}{C} \tag{9.2}$$

ya que se sabe que $M = C + I$. Sustituyendo esta expresión en (9.1):

$$i_p = \frac{C+I}{C} - 1 = \frac{C}{C} + \frac{I}{C} - 1 = 1 + \frac{I}{C} - 1 = \frac{I}{C}$$

que es la misma expresión (9.2).

Como en el análisis de rendimientos de valores bursátiles suelen manejarse muy diversos plazos, es común que ese plazo (p) no sea ni un mes ni un año y, como estos plazos son los que se utilizan frecuentemente para efectos de comparación, con frecuencia se deben convertir las tasas determinadas al plazo original del instrumento o de la operación a tasas mensuales o anuales. Para hacer esta operación, se recurre al siguiente procedimiento:

$$i_{30} = (1+i_p)^{30/p} - 1 \text{ o } i_{365} = (1+i_p)^{365/p} - 1$$

De acuerdo con lo anterior, se puede ver que si se utiliza n para representar el plazo al que se desea convertir la tasa original que se obtuvo:

$$i_n = (1+i_p)^{n/p} - 1 \qquad (9.3)$$

EJEMPLO 9.4.1.1

Las acciones de la sociedad de inversión cuya clave es Afirme A tuvieron un valor de 180.605507 y de 180.832311 el 31 de julio y el 16 de agosto, respectivamente, según se puede ver en la tabla 9.2. Se calcula la tasa efectiva de rendimiento a ese plazo y a 30 días.

Solución:

Entre las dos fechas transcurrieron 17 días, por lo que el rendimiento fue de:

$$i_{16} = \frac{I}{C} = \frac{M-C}{C} = \frac{180.832311 - 180.605507}{180.605507} = \frac{0.226804}{180.605507}$$

$$i_{16} = 0.0012558 \text{ o } 0.13\%$$

Es importante observar que se puede calcular directamente la tasa efectiva de rendimiento al plazo de 16 días de la siguiente manera:

$$i_{16} = \frac{\text{Precio al final del periodo}}{\text{Precio al principio del periodo}} - 1 = \frac{\text{Monto}}{\text{Capital}} - 1 = \frac{M}{C} - 1$$

$$i_{16} = \frac{180.832311}{180.605507} - 1 = 1.0012558 - 1 = 0.0012558$$

Una vez que se obtiene i_{16} se puede calcular la tasa efectiva de rendimiento mensual a 30 días:

$$i_{30} = (1 + i_p)^{30/p} - 1$$
$$i_{30} = 1.0012558^{30/16} - 1 = 1.0012558^{1.875} - 1$$
$$i_{30} = 0.00235592 \text{ o } 0.23\%$$

Un detalle que resulta útil visualizar en este ejercicio es que el 1 que se resta es, precisamente, el capital invertido.

EJEMPLO 9.4.1.2

Calcular la tasa efectiva de rendimiento mensual de las acciones de Awlasa A, Alterna A y Accipat A para el periodo del 2 de mayo al 31 de julio de 2012, de acuerdo con los precios de la tabla 9.2.

Solución:

Awlasa A $\quad i_{90} = \frac{Monto}{Capital} - 1 = \frac{37.869424}{37.540652} - 1 = 0.00875776$

$$i_{30} = 1.00875776^{30/90} - 1 = 0.00291 \text{ o } 0.29\%$$

Alterna A $\quad i_{90} = \frac{Monto}{Capital} - 1 = \frac{3.346005}{3.30204} - 1 = 0.0133145$

$$i_{30} = 1.0133145^{30/90} - 1 = 0.004419 \text{ o } 0.44\%$$

Accipat A

$$i_{90} = \frac{Monto}{Capital} - 1 = \frac{149.5566}{143.5282} - 1 = 0.0420015$$

$$i_{30} = 1.0420015^{30/90} - 1 = 0.01381 \text{ o } 1.38\%$$

En este ejemplo se puede observar que:

- Los rendimientos de las sociedades de inversión Awlasa A y Alterna A son similares. Además, son semejantes a los rendimientos de los instrumentos bancarios de inversión, como los certificados de depósito a plazo y los pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento.
- En el periodo que abarca del 2 de mayo al 31 de julio de 2012, el mercado accionario en su conjunto, medido a través del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, pasó de 39 597.42 a 40 704.28 puntos, o sea un aumento de 2.8% en 90 días, equivalente a 0.92% mensual.
- A su vez, la sociedad de inversión de renta variable Accipat A terminó el periodo con una ganancia de 1.38% mensual, lo cual refleja el comportamiento de su cartera.

Por otro lado, los rendimientos calculados para Awlasa A son rendimientos realmente efectivos, ya que los intermediarios bursátiles no cobran comisión en la compraventa de los títulos, por tratarse de sociedades de inversión en instrumentos de deuda. Sin embargo, cuando se trata de sociedades de inversión comunes, como Accipat A, entonces los rendimientos calculados se consideran como el rendimiento acumulado en el periodo, de acuerdo con el precio de mercado. Si efectivamente se hubieran comprado y vendido las acciones en esas fechas, se habría tenido que pagar comisión y, por ello, el precio de compra hubiera sido aproximadamente 1% más alto y el precio de venta 1% menor, con la consiguiente reducción del rendimiento efectivo.

EJEMPLO 9.4.1.3

Calcular el rendimiento que ofrecieron las acciones de la sociedad de inversión de renta variable Gbm del 27 al 31 de julio, de acuerdo con los datos de la tabla 9.2.

Solución:

El precio de las acciones fue de 1.173109 el 31 de julio y de 1.163363 el 27 de julio, con un plazo de 4 días. Así:

$$i_{31} = \frac{M - C}{C} = \frac{1.173109 - 1.163363}{1.163363} = \frac{0.009746}{1.163363} = 0.00837744$$

La tasa efectiva de rendimiento mensual es:

$$i_{30} = (1 + i_4)^{30/4} - 1 = 1.00837744^{30/4} - 1 = 0.06457$$

o sea, 6.46% efectivo mensual, que es una tasa muy elevada y sólo es posible con acciones de sociedades de inversión de renta variable.

EJEMPLO 9.4.1.4

Calcular la tasa efectiva de rendimiento mensual de un inversionista que adquirió acciones de Ing-IPC-A el 2 de mayo de 2012 y que vendió el 27 de julio del mismo año. La casa de bolsa cobra 1% de comisión.

Solución:

Ing-IPC-A:

Precio de compra = 7.255482 + 7.255482(0.01) = 7.32803682

o 7.255482(1.01) = 7.32803682

Precio de venta = 7.598899(0.99) = 7.52291

Y, entonces:

$$i_{86} = \frac{M}{C} - 1 = \frac{7.52291}{7.32803682} - 1 = 0.02659$$

O sea una ganancia de 2.66%. Por otra parte,

$$i_{30} = \left(1 + i_{86}\right)^{30/86} - 1 = 1.02659^{30/86} - 1 = 0.009197$$

es decir, 0.92% efectivo mensual.

9.4.2 Acciones de empresas

Se incluyen aquí las acciones de todas las empresas que cotizan en la bolsa: instituciones de seguros y fianzas, casas de bolsa, bancos, grupos financieros y, por supuesto, empresas industriales, comerciales y de servicios en general. Al igual que en el caso de las sociedades de inversión, los precios de mercado de las acciones de empresas se publican en los periódicos al día hábil siguiente. En la tabla 9.3 se presentan los precios de algunas de estas acciones en fechas seleccionadas.

Tabla 9.3 Precios de cierre (último hecho) de algunas acciones de empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (precios de 2012)

	17 de agosto	31 de julio	29 de junio	30 de mayo
ALFA A	222.1	212.53	213.2	179.98
CEMEX CPO	10.27	9.23	8.98	7.81
COMERCI UBC	29.8	30.4	30.5	25.72
ELEKTRA	625	625.2	537	551
FEMSA UBD	113.01	113.5	119.12	112.4
GCARSO A1	42.5	45.99	43.42	43.5
GEO B	14.26	13.98	15.01	13.73
GFINBUR O	36.7	35	29.99	28.85

EJEMPLO 9.4.2.1

El precio al que se cotizaron por última vez las acciones de Alfa A al cierre de las operaciones de los días 30 de mayo y 17 de agosto de 2006 fueron 179.98 y 222.10 respectivamente. Calcular la tasa efectiva de rendimiento de estas acciones, con el supuesto de que no hubo pago de dividendos en este lapso.

Solución:

Los días transcurridos entre estas dos fechas fueron 79, por lo que

$$i_{79} = \frac{M}{C} - 1 = \frac{222.10}{179.98} - 1 = 0.234026$$

o 23.40% efectivo a 79 días

e $$i_{30} = (1 + i_{79})^{30/79} - 1 = 1.234026^{0.379746835} - 1 = 0.083129$$

u 8.31% efectivo mensual.

Es importante notar que estos cálculos sólo reflejan el rendimiento del precio de la acción, según el comportamiento observado en ese periodo específico de 79 días y que, como se mencionó antes, no se toman en cuenta las comisiones que cobran los intermediarios bursátiles (casa o agentes de bolsa o bancos) cuando compran o venden acciones de empresas y de sociedades de inversión comunes, y que suele ser de 1% (en los ejemplos de comisiones se utiliza esta cantidad aunque se debe tener presente que no siempre es la misma, ya que es posible negociarla con los intermediarios).

EJEMPLO 9.4.2.2

Calcular el rendimiento de las acciones de Alfa A, en el mismo periodo del ejemplo anterior, si efectivamente se hubieran comprado y vendido en esas fechas, con una comisión de 1%.

Solución:
Precio de compra = 179.98(1.01) = 181.7798
Precio de venta = 222.10(0.99) = 219.879

De donde $$i_{79} = \frac{M}{C} - 1 = \frac{219.879}{181.7798} - 1 = 0.20958984$$

o 20.96% efectivo a 79 días

e $$i_{30} = (1 + i_{79})^{30/79} - 1 = 1.20958984^{0.37974835} - 1 = 0.074933$$

o 7.49% efectivo mensual.

Como era de esperar, si efectivamente se realizan las operaciones de compra y de venta, se pagaría comisión y el rendimiento sería menor al que se calcula utilizando sólo los precios de mercado.

El otro caso que se puede dar con las acciones de empresas es que paguen dividendos, ya sea en acciones o en efectivo. Si el pago lo hacen en acciones, el proceso de canje de acciones ocasiona ajustes en el precio de la acción en el mercado y en el número de acciones en circulación, en cuyo caso se pueden aplicar los procedimientos que ya se explicaron para calcular su rendimiento efectivo.

Si, por otro lado, el pago de dividendos se hace con dinero, el cálculo del rendimiento efectivo debe tomar en consideración la fecha y el monto de ese pago, como se ilustra en el ejemplo siguiente, en el que se utiliza una ecuación de valores equivalentes para determinar la tasa efectiva de rendimiento.

EJEMPLO 9.4.2.3

El precio de ciertas acciones fue de \$4.75 el 5 de agosto de 20XX y de 4.78 el 18 de septiembre del mismo año. Además, pagó un dividendo de \$0.158337513284434 por acción, a partir del 8 de agosto. Determinar la tasa efectiva de rendimiento mensual de estas acciones.

Solución:
Para simplificar el análisis con el propósito de resaltar los detalles referentes al planteamiento y resolución de la ecuación de valores equivalentes que se requiere:

- no se toma en cuenta la comisión de la casa de bolsa;
- tampoco se considera el impuesto sobre la renta que los tenedores de las acciones —personas físicas— deben pagar al fisco y, finalmente,
- se reducen los decimales del pago de dividendos a 5 posiciones, para quedar en 0.15834.

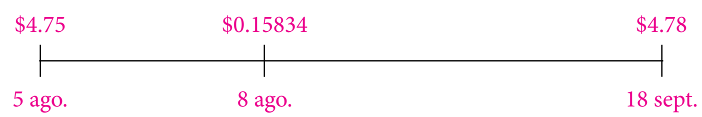


Figura 9.1 Diagrama del ejemplo 9.4.2.3.

Considerando lo anterior, conviene en primer lugar plantear las condiciones en una ecuación de valores equivalentes como la de la figura 9.1.

Los plazos entre las tres fechas son:

5-8 de agosto: 3 días
5 de agosto a 18 de septiembre: 44 días.

En términos de la simbología que se ha utilizado hasta acá, $M = 4.78$, $C = 4.75$ e $I = 0.15834$. Entonces, la ecuación de valores equivalentes que corresponde, utilizando el 5 de agosto como fecha focal, es:

$$4.75 = 0.15834(1 + i)^{-3} + 4.78(1 + i)^{-44}$$

Como no es posible despejar la i de este tipo de ecuaciones, su resolución se lleva a cabo ensayando valores de la i hasta encontrar uno que haga que se cumpla la igualdad. Para esto, conviene observar que, como el plazo está planteado en días (3 y 44), la tasa efectiva que se obtiene al resolver la ecuación es, por supuesto, una tasa efectiva diaria. Entonces, por ejemplo, si se da a la i un valor de 0.001, se tiene que:

$$\begin{aligned} 4.75 &= 0.15834(1.001)^{-3} + 4.78(1.001)^{-44} \\ &= 0.1578659 + 4.5743405 \\ &= 4.7322064 \end{aligned}$$

Como $4.7322064 < 4.75$, la siguiente aproximación se debe hacer con una tasa menor; si $i = 0.0009$:

$$\begin{aligned} 4.75 &= 0.15834(1.0009)^{-3} + 4.78(1.0009)^{-44} \\ &= 0.1579132 + 4.5944927 \\ &= 4.752406 \end{aligned}$$

Afinando aún más la aproximación con el procedimiento anterior de acercamientos sucesivos se comprueba que una i que arroja un valor aceptablemente cercano es 0.00091:

$$\begin{aligned} 4.75 &= 0.15834(1.00091)^{-3} + 4.78(1.00091)^{-44} \\ &= 0.1579085 + 4.5924735 \\ 4.75 &\approx 4.750382 \end{aligned}$$

Así, con esta tasa efectiva diaria (aproximada) se puede calcular la tasa efectiva mensual:

$$i_{30} = (1 + i_1)^{30/1} - 1 = (1 + i_1)^{30} - 1 = 1.00091^{30} - 1 = 0.0276633$$

o sea, una tasa efectiva mensual de 2.77%.

Como se puede observar, la realización manual de estos cálculos es bastante laboriosa, por lo que, en la práctica, si fuera necesario realizar muchas de estas operaciones o con frecuencia, convendría utilizar alguno de los paquetes de computación o calculadoras que permiten resolver este tipo de ecuaciones.

9.4.3 Valores con tasa de descuento

En esta categoría se encuentran principalmente los Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes), así como el papel comercial y las aceptaciones bancarias. Se dice que principalmente los Cetes porque los procedimientos para el papel y las aceptaciones hacen referencia a lo aplicable a Cetes, y porque las tasas de estos títulos son una referencia importante en el medio financiero mexicano.

El procedimiento general aplicable a este tipo de título es:

1. Calcular el precio descontado mediante la tasa de descuento. La fórmula que se maneja en el medio bursátil para calcular el precio es:

$$P = VN\left[1 - \frac{td}{360}\right] \tag{9.4}$$

en donde:

P = precio descontado
VN = valor nominal
t = plazo en días
d = tasa de descuento

2. Calcular el rendimiento al plazo, o descuento, que es:

$$D = VN - P \tag{9.5}$$

3. Determinar la tasa efectiva de rendimiento al plazo.
4. Calcular la tasa efectiva al plazo que se requiera (usualmente mensual o anual).

A continuación se expondrán algunos ejemplos.

EJEMPLO 9.4.3.1

En la figura 9.2 se reproduce el anuncio de colocación de Cetes del jueves 16 de agosto de 2012 que apareció en el periódico *El Universal*. Se puede observar que se emitieron Cetes a 3 plazos distintos, esto es, 28, 91 y 175 días, con sus correspondientes tasas de descuento y rendimiento.

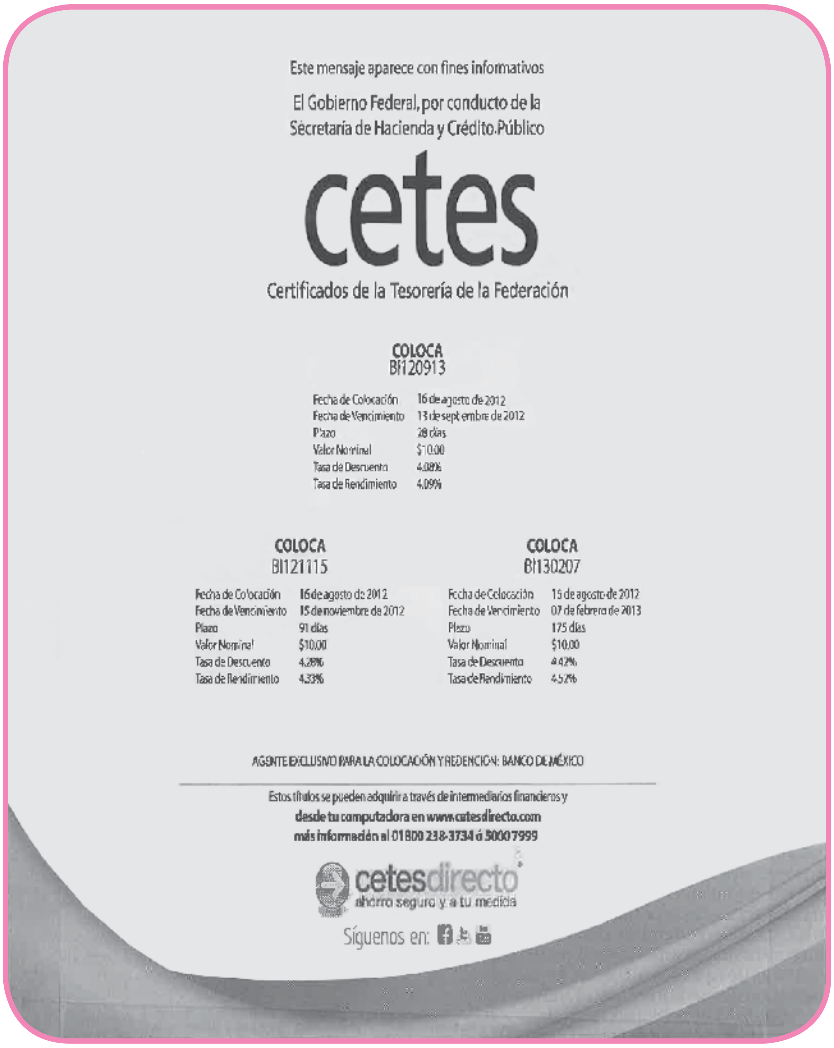


Figura 9.2 Aviso de colocación de Cetes del 16 de agosto de 2012.

Los cálculos correspondientes para los Cetes a 28 días son:

d = tasa de descuento 4.08%
j = tasa de rendimiento (nominal) 4.09%

1. Se calcula el precio descontado del título mediante la fórmula:

$$P = VN\left[1 - \frac{td}{360}\right] = 10\left[1 - \frac{28(0.0408)}{360}\right] = 10(0.99682667) = 9.9682667$$

2. El rendimiento al plazo de 28 días (o descuento) es:

$$D = VN - P$$
$$D = 10 - 9.9682667 = 0.0317333$$

3. La tasa efectiva de rendimiento al plazo:

$$i_{28} = \frac{D}{P} = \frac{0.0317333}{9.9682667} = 0.00318343$$

4. La tasa nominal de rendimiento anual:

$$i_{360} = \frac{i_t}{t}(360) = \frac{0.00318343}{28}(360) = 0.0409 \text{ o } 4.09\%, \text{ que es la que se publica.}$$

Como puede observarse, esta tasa de rendimiento es nominal, por lo que es necesario utilizar la tasa efectiva de rendimiento al plazo para calcular tasas efectivas a diferentes plazos o para realizar comparaciones con rendimientos de otras inversiones.

Además, es importante notar que se puede llegar a la tasa efectiva de rendimiento al plazo mediante un procedimiento más expedito, tal como el que se aplicó en las secciones 9.4.1 y 9.4.2, observando que el precio descontado equivale al capital (C), y el valor nominal al monto (M), de acuerdo con la simbología que se utiliza en este texto.

Por ello,

$$i_{28} = \frac{M}{C} - 1 = \frac{10}{9.9682667} - 1 = 0.00318343$$

que es la misma tasa que se determinó en el punto 3 anterior. Sin embargo, tratándose de este tipo de valores, es conveniente seguir el procedimiento planteado antes para hacer hincapié en que se trata de un descuento.

A continuación se repasa el cálculo de tasas efectivas a otros plazos.

EJEMPLO 9.4.3.2

La tasa efectiva de rendimiento anual i_{365} de los Cetes del ejemplo 9.4.3.1 se puede calcular de la siguiente manera:

$$i_{28} = 0.00318343$$
$$i_{365} = 1.00318343^{365/28} - 1 = 1.00318343^{13.035714} - 1 = 0.0423 \text{ o } 4.23\%$$

EJEMPLO 9.4.3.3

Se calcula la tasa efectiva de rendimiento anual de los Cetes a 91 días cuyo aviso de emisión aparece en la figura 9.2.

Solución:

1. Precio descontado:

$$P = VN\left[1 - \frac{td}{360}\right]$$

$$= 10\left[1 - \frac{91(0.0428)}{360}\right] = 10(1 - 0.01081889)$$

$$= 10(0.98918111) = \$9.8918111$$

2. El rendimiento al plazo de 91 días:

$$D = VN - P = 10 - 9.8918111 = \$0.1081889$$

3. Tasa efectiva de rendimiento al plazo de 91 días:

$$i_{91} = \frac{D}{P} = \frac{0.1081889}{9.8918111} = 0.01093722$$

4. Tasa nominal anual de rendimiento:

$$j_{360} = \frac{0.01093722}{91}(360) = 0.04327 \text{ o } 4.33\%, \text{ como se publica.}$$

5. Tasa efectiva de rendimiento anual:

$$i_{365} = (1 + i_t)^{365/t} - 1 = 1.01093722^{365/91} - 1 = 1.01093722^{4.010989011} - 1 = 0.044597 \text{ o } 4.46\%$$

En la tabla 9.4 se resumen los resultados de los ejemplos 1 a 3. Observe en ella las diferencias entre las tasas nominales y las tasas efectivas son considerables. Estas diferencias subrayan la importancia que tiene el cálculo de tasas efectivas, pues las tasas nominales son engañosas.

Tabla 9.4 Cálculo de rendimientos efectivos de Cetes

Plazo	Tasa de descuento	Nominal	Efectiva
28	4.08	4.09	4.23
91	4.28	4.33	4.46

Como se mencionó antes, el procedimiento de cálculo para aceptaciones bancarias y papel comercial es idéntico al de Cetes. Observe el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9.4.3.4

Determinar la tasa efectiva de rendimiento anual de certificados bursátiles emitido por PACCAR Financial, de acuerdo con la oferta pública que se reproduce en la figura 9.3 que se consultó en www.bmv.com.mx el 5 de septiembre de 2012.

Solución:

Datos: Plazo: 28 días
Tasa de descuento promedio ponderada: 4.54%
Valor nominal: $100

1. Precio descontado:

$$P = VN\left[1 - \frac{td}{360}\right] = 100\left[1 - \frac{28(0.0454)}{360}\right] = 99.6468889$$

2. Rendimiento al plazo (descuento):

$$D = VN - P = 100 - 99.6468889 = \$0.3531111$$

3. Tasa efectiva de rendimiento al plazo:

$$i_{28} = \frac{D}{P} = \frac{0.3531111}{99.6468889} = 0.00354362 \text{ o } 0.35\%$$

4. Tasa nominal de rendimiento anual:

$$\frac{0.00354362}{28}(360) = 0.04556 \text{ o } 4.56\%$$

5. Tasa efectiva de rendimiento anual:
Con base en la tasa efectiva al plazo de 28 días:

$$i_{365} = (1 + i_{28})^{365/28} - 1 = 1.00354362^{13.03571424} - 1 = 0.04719 \text{ o } 4.72\%$$

ESTE AVISO APARECE ÚNICAMENTE CON FINES INFORMATIVOS, YA QUE LA TOTALIDAD DE LOS VALORES HAN SIDO ADQUIRIDOS

AVISO DE COLOCACION

PACCAR FINANCIAL

CON BASE EN EL PROGRAMA DUAL REVOLVENTE DE CERTIFICADOS BURSÁTILES EN EL CUAL EL SALDO INSOLUTO DE PRINCIPAL DE LOS CERTIFICADOS BURSÁTILES DE CORTO PLAZO EN CIRCULACIÓN NO PODRÁ EXCEDER DE $5,000'000,000.00 (CINCO MIL MILLONES DE PESOS 00/100 M.N.) O SU EQUIVALENTE EN UNIDADES DE INVERSION ESTABLECIDO POR

PACCAR FINANCIAL MÉXICO, S.A. DE C.V., SOFOM, E.N.R.

POR UN MONTO DE HASTA

$10,000'000,000.00 DIEZ MIL MILLONES DE PESOS 00/100 M.N.)
O SU EQUIVALENTE EN UNIDADES DE INVERSIÓN

Se informa que el día 05 de Septiembre de 2012 se realizó el proceso de subasta de Certificados Bursátiles de Corto Plazo, proceso del cual fue asignado un monto de:

$160,000,000.00

CARACTERÍSTICAS DE LOS CERTIFICADOS BURSÁTILES DE CORTO PLAZO

EMISOR:	PACCAR FINANCIAL MÉXICO, S.A. DE C.V., SOFOM, E.N.R.
TIPO DE VALOR:	CERTIFICADOS BURSÁTILES DE CORTO PLAZO (LOS "CERTIFICADOS BURSÁTILES").
CLAVE DE PIZARRA:	PCARFM 05612
MONTO TOTAL AUTORIZADO DEL PROGRAMA, CON CARÁCTER REVOLVENTE:	HASTA $10,000'000,000.00 (DIEZ MIL MILLONES DE PESOS 00/100 M.N.) O SU EQUIVALENTE EN UNIDADES DE INVERSIÓN. EL SALDO INSOLUTO DE PRINCIPAL DE LOS CERTIFICADOS BURSÁTILES DE CORTO PLAZO EN CIRCULACIÓN NO PODRÁ EXCEDER DE $5,000'000,000.00 (CINCO MIL MILLONES DE PESOS 00/100 M.N.) O SU EQUIVALENTE EN UNIDADES DE INVERSION.
VIGENCIA DEL PROGRAMA:	5 (CINCO) AÑOS CONTADOS A PARTIR DE LA FECHA DEL OFICIO DE AUTORIZACIÓN DE LA COMISIÓN NACIONAL BANCARIA Y DE VALORES CON EL COMPROMISO POR PARTE DEL EMISOR DE ENTREGAR UNA NUEVA OPINIÓN LEGAL UNA VEZ TRANSCURRIDO 1 (UN) AÑO A PARTIR DE LA FECHA DE SUSCRIPCIÓN DE LA MISMA.
NO. DE EMISION AL AMPARO DEL PROGRAMA:	Nonagésima octava
CALIFICACIÓN OTORGADA POR STANDARD AND POOR'S, S.A. DE C.V.:	"**mxA-1+**", LA CUAL SIGNIFICA: EXTRAORDINARIAS CARACTERÍSTICAS SOBRE EL GRADO DE SEGURIDAD RESPECTO AL PAGO OPORTUNO DE INTERESES Y DEL PRINCIPAL. ESTA CALIFICACIÓN ES EL GRADO MÁS ALTO QUE OTORGA STANDARD & POOR'S EN SU ESCALA NACIONAL -CAVAL-. LA CALIFICACIÓN DEL EMISOR EN ESCALA NACIONAL -CAVAL- ES DE 'mxAAA' CON PERSPECTIVA 'ESTABLE'. LA CALIFICACIÓN OTORGADA POR STANDARD & POOR´S NO CONSTITUYE UNA RECOMENDACIÓN DE INVERSIÓN, Y LA MISMA PUEDE ESTAR SUJETA A ACTUALIZACIONES EN CUALQUIER MOMENTO DE CONFORMIDAD CON LA METODOLOGÍA UTILIZADA POR STANDARD & POOR´S.
CALIFICACIÓN OTORGADA POR FITCH MÉXICO, S.A. DE C.V.:	"**F1+(mex)**", LA CUAL SIGNIFICA: ALTA CALIDAD CREDITICIA. INDICA LA MÁS SÓLIDA CAPACIDAD DE PAGO OPORTUNO DE LOS COMPROMISOS FINANCIEROS RESPECTO DE OTROS EMISORES O EMISIONES DOMÉSTICAS. BAJO LA ESCALA DE CALIFICACIONES DOMÉSTICAS DE FITCH MÉXICO, ESTA CATEGORÍA SE ASIGNA A LA MEJOR CALIDAD CREDITICIA RESPECTO DE TODO OTRO RIESGO EN EL PAÍS, Y NORMALMENTE SE ASIGNA A LOS COMPROMISOS FINANCIEROS EMITIDOS O GARANTIZADOS POR EL GOBIERNO FEDERAL. CUANDO LAS CARACTERÍSTICAS DE LA EMISIÓN O EMISOR SON PARTICULARMENTE SÓLIDAS, SE AGREGA UN SIGNO "+" A LA CATEGORÍA. LA CALIFICACIÓN OTORGADA POR FITCH MÉXICO NO CONSTITUYE UNA RECOMENDACIÓN DE INVERSIÓN, Y LA MISMA PUEDE ESTAR SUJETA A ACTUALIZACIONES EN CUALQUIER MOMENTO DE CONFORMIDAD CON LA METODOLOGÍA UTILIZADA POR FITCH MÉXICO.
GARANTÍA:	LA PRESENTE EMISIÓN DE CERTIFICADOS BURSÁTILES NO CUENTA CON GARANTÍA ESPECÍFICA, POR LO TANTO, ES QUIROGRAFARIA.
VALOR NOMINAL DE LOS CERTIFICADOS	$100.00 (CIEN PESOS 00/100 M.N.) CADA UNO.
NÚMERO DE CERTIFICADOS DE LA EMISIÓN:	1,600,000 (UN MILLÓN SEISCIENTOS MIL)
PRECIO DE COLOCACION:	99.646761 Pesos
FECHA DE LA SUBASTA:	05 de Septiembre de 2012
MECANISMO DE SUBASTA:	LA SUBASTA SE LLEVÓ A CABO MEDIANTE EL SISTEMA DE SUBASTA DE BANCOMER.COM
TIPO DE SUBASTA:	A Tasa diferenciada
TIPO DE EMISIÓN:	A descuento
FECHA DE PUBLICACION DE LA CONVOCATORIA DE LA SUBASTA:	04 de Septiembre de 2012
FECHA DE PUBLICACION DE LOS RESULTADOS DE LA SUBASTA:	05 de Septiembre de 2012
MONTO DE LA EMISIÓN:	$ 160,000,000.00 (CIENTO SESENTA MILLONES DE PESOS 00/100 M.N.)
DEMANDA DE LOS CERTIFICADOS BURSÁTILES:	$ 347,987,133.31 (TRESCIENTOS CUARENTA Y SIETE MILLONES NOVECIENTOS OCHENTA Y SIETE MIL CIENTO TREINTA Y TRES PESOS 31/100 M.N.)
DEMANDA TOTAL DE LOS CERTIFICADOS BURSÁTILE RESPECTO DEL MONTO DE LA OFERTA:	2.17 VECES EL MONTO DE LA OFERTA
PLAZO DE LA EMISIÓN:	28 días
FECHA DE EMISION:	06 de Septiembre de 2012
FECHA DE REGISTRO EN BOLSA:	06 de Septiembre de 2012
FECHA DE LIQUIDACIÓN:	06 de Septiembre de 2012
FECHA DE VENCIMIENTO:	04 de Octubre de 2012
TASA DE RENDIMIENTO ANUAL MAXIMA ASIGNADA:	4.58%
TASA DE RENDIMIENTO ANUAL MINIMA ASIGNADA:	4.50%
TASA DE DESCUENTO PROMEDIO PONDERADA ASIGNADA A LA EMISIÓN:	4.54%
TASA DE RENDIMIENTO PROMEDIO PONDERADA ASIGNADA A LA EMISIÓN:	4.56%

AMORTIZACIÓN:
LOS CERTIFICADOS BURSÁTILES SERÁN AMORTIZADOS A SU VALOR NOMINAL, MEDIANTE TRANSFERENCIA ELECTRÓNICA, EN LA FECHA DE VENCIMIENTO, DE CONFORMIDAD CON EL TÍTULO QUE REPRESENTA LA PRESENTE EMISIÓN.

OBLIGACIONES DE HACER Y NO HACER DEL EMISOR:
EL EMISOR SE OBLIGA A PROPORCIONAR A LA COMISIÓN NACIONAL BANCARIA Y DE VALORES, A LA BOLSA MEXICANA DE VALORES, S.A.B. DE C.V. Y AL PÚBLICO INVERSIONISTA LA INFORMACIÓN FINANCIERA, ECONÓMICA, CONTABLE Y ADMINISTRATIVA QUE SE SEÑALA EN LAS DISPOSICIONES DE CARÁCTER GENERAL APLICABLES A LAS EMISORAS DE VALORES Y A OTROS PARTICIPANTES DEL MERCADO DE VALORES. EL EMISOR NO CUENTA CON OBLIGACIONES DE HACER Y NO HACER DISTINTAS A AQUELLAS QUE SE DERIVEN DE LA SUSCRIPCIÓN DEL PRESENTE TÍTULO.

INCUMPLIMIENTO EN EL PAGO DE PRINCIPAL :
EN CASO DE QUE EL EMISOR NO REALICE EL PAGO OPORTUNO DEL PRINCIPAL DE LOS CERTIFICADOS BURSÁTILES EN LA FECHA DE VENCIMIENTO O, EN SU CASO, INCUMPLA CON EL PAGO DE LOS INTERESES ORDINARIOS DERIVADOS DE LOS CERTIFICADOS BURSÁTILES, EL REPRESENTANTE COMÚN CONVOCARÁ A LA ASAMBLEA GENERAL DE TENEDORES EN UN PLAZO NO MENOR A LOS TRES DÍAS HÁBILES NI MAYOR A CINCO DÍAS HÁBILES SIGUIENTES A AQUEL EN EL QUE SE HAYA VERIFICADO LA FALTA DE PAGO.

INTERESES MORATORIOS:
EN CASO DE INCUMPLIMIENTO EN EL PAGO DE PRINCIPAL DE LOS CERTIFICADOS BURSÁTILES SE GENERARÁN INTERESES MORATORIOS QUE SE CALCULARÁN A UNA TASA ANUALIZADA EQUIVALENTE A LA TIIE MÁS 2 (DOS) PUNTOS PORCENTUALES APLICABLE DURANTE CADA PERIODO EN QUE OCURRA EL INCUMPLIMIENTO.

PARA LOS EFECTOS DEL PÁRRAFO ANTERIOR, TIIE SIGNIFICA LA TASA DE INTERÉS INTERBANCARIA DE EQUILIBRIO A PLAZO DE HASTA 28 (VEINTIOCHO) DÍAS DETERMINADA Y PUBLICADA POR EL BANCO DE MÉXICO EN EL DIARIO OFICIAL DE LA FEDERACIÓN (SEGÚN RESOLUCIÓN DEL PROPIO BANCO DE MÉXICO PUBLICADA EN EL DIARIO OFICIAL DE LA FEDERACIÓN DEL 23 DE MARZO DE 1995). EN EL EVENTO DE QUE EL BANCO DE MÉXICO POR CUALQUIER CAUSA DEJARE DE UTILIZAR LA TIIE, SE TOMARÁ COMO REFERENCIA LA TASA QUE LA SUSTITUYA, PUBLICADA POR EL BANCO DE MÉXICO EN EL DIARIO OFICIAL DE LA FEDERACIÓN, TOMANDO PARA ELLO LA PUBLICACIÓN DE LOS DÍAS JUEVES DE CADA SEMANA DEL PERIODO EN EL QUE SE DEVENGUEN LOS INTERESES.

Figura 9.3

En el sitio de internet del Banco de México (www.banxico.gob.mx) se pueden consultar series históricas de muchos indicadores económicos mexicanos, entre los cuales se encuentran las tasas de rendimiento de los Cetes en sus distintos plazos. Sin embargo, se publican solamente los datos de rendimientos y no los de descuento por lo cual se cuenta sólo con las tasas de descuento nominales, como se ha comentado. Para poder determinar tasas efectivas es necesario revertir el proceso de cálculo que se ha ilustrado hasta aquí y que parte de las tasas de descuento que se publican y partir, entonces, de las tasas de rendimiento disponibles en el Banco de México, que son las mismas que se publican también en otras fuentes. En el ejemplo siguiente se ilustran estos cálculos.

EJEMPLO 9.4.3.5

El 5 de septiembre de 2012, en http:/www.banxico.gob.mx, se informó que la tasa de rendimiento promedio mensual de los Cetes a 28 días que se emitieron en agosto de 2012 fue de 4.13%. Determinar *a*) la tasa efectiva de rendimiento a 28 días, y *b*) la tasa de descuento anual correspondiente.

SOLUCIÓN:

a) En primer lugar, se sabe que 4.13% es la tasa de rendimiento nominal a 360 días y, para determinar la tasa efectiva de rendimiento a 28 días:

$$i_{360} = 0.0413 = 360\frac{i_{28}}{28},$$

por lo que

$$i_{28} = \frac{0.0413(28)}{360} = 0.00321222$$

que es, entonces, la tasa efectiva de rendimiento a 28 días, a partir de la cual se puede reconstruir la de descuento que se publicó en su oportunidad.

b) Esta tasa efectiva a 28 días se obtuvo mediante la siguiente relación:

$$\frac{D}{P} = i_{28}$$

Sin embargo, como además se sabe que el precio al que se vendieron estos Cetes se calcula restándole al valor nominal de \$10 el descuento, o sea,

$$P = 10 - D$$

Luego, si se sustituye esta expresión en la anterior, se obtiene:

$$\frac{D}{P} = 0.00321222 = \frac{D}{10 - D}$$

de donde

$$0.00321222(10 - D) = D$$

$$0.00321222 - 0.00321222D = D$$

y

$$D(1 + 0.00321222) = 0.00321222$$

y, finalmente,

$$D = \frac{0.00321222}{1.00321222} = 0.00320226$$

A partir de este descuento se puede obtener el precio al que se vendieron estos títulos:

$$P = 10 - 0.00320226 = 9.99679774$$

Ejercicios de las secciones 9.1 a 9.4

1. ¿Cuántas y cuáles son las formas en que se pueden obtener rendimientos en el mercado de valores?

2. ¿Qué son las ganancias de capital?
3. ¿Cuáles rendimientos de los valores bursátiles están exentos de impuestos?
4. Si se compran acciones de una sociedad de inversión de renta fija a $9.99 cada una y se venden 60 días después a $10.07, ¿cuál es la tasa efectiva de rendimiento al plazo que se obtiene?
5. Para el ejercicio anterior, ¿cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual (a treinta días)?
6. ¿Cuánto cobran de comisión los intermediarios bursátiles por operaciones de compra y venta de acciones de empresas y sociedades de inversión comunes?

Resuelva los ejercicios del 7 al 15 con los datos de la tabla 9.2.

7. ¿Cuál es el plazo, en días, entre el 2 de mayo y el 16 de agosto?
8. ¿Qué tasa efectiva de rendimiento mensual otorgaron las acciones de FONSER1 B1 entre el 2 de mayo y el 16 de agosto? (Vea tabla 9.2).
9. ¿Qué tasa efectiva de rendimiento mensual otorgaron las acciones de FONSER1 B1 entre el 31 de julio y el 16 de agosto? (Vea tabla 9.2).
10. ¿Qué tasa efectiva de rendimiento mensual otorgaron las acciones de GBMAGR A entre el 2 de mayo y el 16 de agosto? (Vea tabla 9.2).
11. ¿Qué tasa efectiva de rendimiento anual obtuvieron las acciones de INTERS1 A entre el 2 de mayo y el 16 de agosto? (Vea tabla 9.2).
12. ¿Qué tasa efectiva de rendimiento anual otorgaron las acciones de SCOTIA1 A entre el 27 de julio y el 16 de agosto y cuál fue el plazo? (Vea tabla 9.2).
13. ¿Qué tasa efectiva de rendimiento mensual obtuvo en el ejercicio 12?
14. ¿Qué tasa efectiva de rendimiento semanal obtuvo en el ejercicio 12?
15. Sin considerar la comisión de la casa de bolsa, ¿cuál fue la tasa efectiva de rendimiento de las acciones de VALMX20 entre el 27 de julio y el 16 de agosto?
16. ¿Cuál es la respuesta al ejercicio 15, si se considera que efectivamente se compraron y vendieron las acciones a los precios que aparecen en la tabla?
17. Si el 27 de mayo se negociaron acciones de la sociedad de inversión en instrumentos de deuda FONBCH a $11.03658, el 9 de julio a $11.0504 y el 8 de agosto a $11.25722:

    a) ¿Cuál fue la tasa efectiva de rendimiento entre el 27 de mayo y el 9 de julio?
    b) ¿Cuál fue la tasa efectiva de rendimiento entre el 27 de mayo y el 8 de agosto?
    c) ¿Cuál fue la tasa efectiva de rendimiento entre el 9 de julio y el 8 de agosto?

18. ¿Cuál es la relación entre las tres tasas que se dieron como respuesta al ejercicio anterior?

Exprese la respuesta en forma de ecuaciones.

19. Busque, en periódicos, información sobre precios de mercado de acciones de sociedades comunes y de instrumentos de deuda y determine los rendimientos que dichos valores obtuvieron durante el último mes; resulta interesante y conveniente para los inversionistas saber cuáles de ellas han ofrecido mayores rendimientos.
20. El 21 de julio se pagó un dividendo de $0.20 por acción de GFINBURO; a continuación se enumeran algunos precios de mercado con sus correspondientes fechas:

11 de junio	$17.18
18 de julio	18.10
7 de agosto	21.00
23 de septiembre	20.00

¿Cuál fue la tasa efectiva de rendimiento de las acciones de GFINBURO entre el 11 de junio y el 7 de agosto, sin considerar las comisiones de compra y venta? ¿Cuál fue la tasa efectiva de rendimiento mensual?

21. ¿Cuál es la respuesta al ejercicio 20 si se toman en cuenta las comisiones?
22. ¿Cuál fue la tasa efectiva de rendimiento mensual de las acciones de GFINBURO entre el 18 de julio y el 23 de septiembre, sin considerar las comisiones de compra y venta?

23. ¿Cuál es la respuesta al ejercicio 22 si se toman en cuenta las comisiones?

24. ¿Cuál fue la tasa efectiva de rendimiento anual de las acciones de GFINBURO entre el 11 de junio y el 7 de agosto, sin considerar las comisiones de compra y venta?

25. ¿Cuál es la respuesta al ejercicio 24 si se toman en cuenta las comisiones?

26. El 18 de agosto se pagó a los accionistas de COMERCIUBC un dividendo de \$0.04 por acción. A continuación se enumeran algunos precios de mercado en distintas fechas:

30 de mayo	\$19.70
25 de julio	21.50
28 de agosto	20.50
23 de septiembre	22.00

¿Cuál fue la tasa efectiva de rendimiento mensual de las acciones de COMERCI UBC entre el 30 de mayo y el 23 de septiembre si, de hecho, se llevó a cabo la compraventa de los títulos?

27. Diga cuál fue la tasa efectiva de rendimientos anual de las acciones de COMERCI UBC, sin tomar en cuenta las comisiones, entre las siguientes fechas:

a) 25 de julio y 28 de agosto.
b) 30 de mayo y 28 de agosto.
c) 25 de julio y 23 de septiembre.

28. Localice, en periódicos, información sobre precios de mercado, en distintas fechas, de diversas acciones de empresas comerciales, industriales, de servicios y financieras y determine los rendimientos que se obtuvieron. Ponga especial atención a periodos de alzas o bajas pronunciadas del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores: los resultados pueden ser sorprendentes.

A continuación se presentan algunos datos de Cetes publicados en el sitio de internet del Banco de México. (Observe que se trata de la tasa de rendimiento nominal anual).

Resultados de las subastas de Cetes
Tasa de rendimiento (nominal anual)

Fecha	Plazo	Tasa	Plazo	Tasa	Plazo	Tasa
09 de agosto de 2012	28	4.09	91	4.31	182	4.52
16 de agosto de 2012	28	4.09	90	4.33	175	4.52
23 de agosto de 2012	28	4.23	91	4.29	182	4.50
30 de agosto de 2012	28	4.15	91	4.27	175	4.48
06 de septiembre de 2012	28	4.17	91	4.25	182	4.48

Fuente: http://www.banxico.gob.mx/, 5 de septiembre de 2012.

29. ¿Cuál es la tasa de descuento anual que corresponde a los datos de la emisión a 91 días del 09 de agosto de 2012?

30. ¿Cuál es la tasa anual de rendimiento efectivo que corresponde a los datos de la emisión a 175 días del 16 de agosto de 2012?

31. ¿Cuál es la tasa anual de rendimiento efectivo que corresponde a los datos de la emisión de 91 días del 30 de agosto de 2012?

32. ¿Cuál es la tasa mensual de rendimiento efectivo que corresponde a los datos de la emisión a 182 días del 06 de septiembre de 2012?

33. Si se tiene que una emisión de Cetes a 90 días arroja una tasa efectiva de rendimiento mensual de 0.0348, ¿cuál es la tasa anual de rendimiento nominal?

34. Localice en algunos periódicos recientes de los jueves, dos o tres anuncios de colocación de Cetes y determine las correspondientes tasas efectivas de rendimientos mensual y anual.

Con los siguientes datos de tasas de descuento de papel comercial:

Fecha	Emisora	Plazo (días)	Tasa de descuento (%)
21 de agosto	IASASA	7	4.92
21 de agosto	TLVISA	60	5.01
21 de agosto	FINAFAC	14	4.35
5 de septiembre	CUNA	28	4.55

35. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual del papel de IASA?
36. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual del papel TELEVISA?
37. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual del papel FINAFA?
38. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual del papel CUNA?
39. Localice, en periódicos, algunos datos sobre emisiones de certificados bursátiles y de aceptaciones bancarias y determine las correspondientes tasas efectivas de rendimiento.

9.5 Rendimiento de valores que pagan intereses (y que también permiten ganancias de capital)

En esta sección se analiza la manera de evaluar los rendimientos efectivos de los valores bursátiles que otorgan intereses como principal forma de rendimiento aunque, como se verá, prácticamente todos ofrecen también ganancias (o pérdidas) de capital.

Los valores bursátiles que caen en esta categoría son todos los bonos: bonos bancarios (de desarrollo, de desarrollo industrial, para la vivienda), Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (Bondes) y Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en Udis (Udibonos). Se encuentran también en esta categoría los pagarés, las obligaciones de todo tipo (hipotecarias, quirografarias, convertibles, indizadas, subordinadas y con rendimiento capitalizable) y los relativamente recientes y abundantes certificados bursátiles.

Se dice que estos títulos que otorgan intereses también ofrecen ganancias de capital porque todos ellos, además de los intereses que se especifican, presentan cambios en los precios de compra y de venta en el momento de realizar las correspondientes operaciones. Sin embargo, también se pueden distinguir dos casos. En el primero se encuentran los bonos bancarios, los Bondes y las obligaciones de todo tipo; en este caso, las fluctuaciones de los precios de compra y venta se deben a variaciones que se producen en el mercado mismo y que, aparte de ser relativamente reducidas, se deben principalmente a las características propias del título-valor, como su fecha de vencimiento y a las peculiaridades de la oferta y la demanda, entre otras. Por otro lado, aunque en los cambios en los precios de compra y venta de los Udibonos también intervienen los factores de la oferta y la demanda, sus variaciones de precio son mucho más significativos que en el caso anterior y ello se debe a que sus valores nominales están "indizados", es decir, asociados al comportamiento de la inflación; a estos valores se les aplica un ajuste a sus precios nominales, de acuerdo con el valor del Índice Nacional de Precios al Consumidor que publica el Banco de México en el *Diario Oficial de la Federación.*

El procedimiento que se aplica para calcular los rendimientos de este tipo de valores es, en esencia, igual al que se revisó en la sección anterior en el caso de las acciones de empresas que pagan dividendos en efectivo y que implica determinar el precio o el valor de compra (o de colocación), el precio o valor de venta (o de vencimiento) y el pago o los pagos de interés. En el caso de los valores que se analizan en esta sección, existen diversas maneras de calcular estas distintas cantidades, por lo que se comenzará en la sección siguiente revisando tres conceptos importantes, para terminar en las últimas secciones de este capítulo con ejemplos de cálculos aplicables a algunos de estos instrumentos.

9.5.1 Conceptos importantes

9.5.1.1 Fechas de compraventa y de pago de intereses

Existen dos situaciones posibles respecto a estas fechas que ocasionan diferencias considerables en los procedimientos. Es necesario analizar dichas situaciones para evaluar los rendimientos efectivos.

Dichas situaciones se refieren a: 1) cuando las fechas de las transacciones de compraventa y las fechas de pagos de intereses coinciden y 2) cuando no coinciden. En seguida se plantea en forma esquemática el procedimiento que se debe seguir en cada caso:

1. Cuando las fechas de las operaciones y las de pagos de intereses coinciden, puede procederse a:

- Determinar los precios de compra y de venta de los títulos.
- Determinar los intereses que pagan los instrumentos en el momento de la venta.
- Sumar estos intereses al precio de venta para obtener lo que puede llamarse "ingresos a la venta".
- Dividir los "ingresos a la venta" entre el precio de compra, y restar al resultado una unidad para determinar la tasa efectiva de rendimiento al plazo, a partir de la cual se pueden calcular tasas efectivas a cualquier otro plazo. La fórmula aplicable aquí es la (9.1), que ya se explicó con anterioridad:

$$i_p = \frac{M}{C} - 1 \tag{9.1}$$

Este procedimiento es aplicable cuando no existen fechas de pago de intereses entre las fechas de compra y de venta. En caso de que sí las haya, se aplica el procedimiento que se explica más adelante, excepto en lo que se refiere a "intereses devengados". Esto es así porque en el caso que nos ocupa los "egresos a la compra" son iguales al precio de compra, y los "ingresos a la venta" son iguales al precio de venta.

2. Cuando las fechas de las operaciones no coinciden con las fechas de pago de intereses, lo que se hace es:

- Determinar los precios de compra y de venta.
- Determinar los intereses devengados por los títulos, desde la última fecha de pago de intereses previa a la compra hasta la fecha en que ésta se realiza. Estos intereses deben ser pagados por el comprador a quien vende, por lo que deben sumarse al precio de compra para conformar los "ingresos a la venta".
- Determinar cualesquiera pagos de interés entre las fechas de compra y de venta.
- Con las cantidades anteriores se constituye una ecuación de valores equivalentes.
- Resolver la citada ecuación, ya sea mediante aproximaciones sucesivas o utilizando algún paquete de computación que permita resolver ecuaciones polinomiales.

Estos dos últimos pasos se ilustraron en el ejemplo 9.4.2.3, que se refiere a acciones de empresas.

9.5.1.2 Comisiones

Aunque ya se mencionó, conviene tener presente que la necesidad de pagar comisiones a los intermediarios bursátiles ocasiona también diferencias en el procedimiento de cálculo de rendimientos efectivos. Estas divergencias consisten en que se debe sumar al precio la comisión para obtener el "precio neto de compra" y se le debe restar al precio de venta para obtener el "precio neto de venta". Por supuesto, a estos precios netos se les deben restar o sumar cualesquiera intereses devengados, según sea necesario dadas las circunstancias que se explicaron en la subsección anterior. Sobre este particular, vale la pena recordar que se incluyen las comisiones sólo cuando:

a) El intermediario las cobra para el título específico.
b) Cuando el caso evaluado lo amerita.

En otras palabras, se puede estar revisando un título por el que sí se cobra comisión, pero al mismo tiempo es posible que no se lleven realmente a cabo las operaciones de compra y de venta, y que no sea necesario incluir las comisiones para el propósito del análisis.

Ahora se presentan los ejemplos de los valores bursátiles más importantes que pagan intereses. Aunque los procedimientos son prácticamente iguales y sólo dependen de que las operaciones se realicen en fechas de pago de intereses o en fechas que no lo son, se divide el análisis en dos partes: Bondes y Certificados Bursátiles, porque son los instrumentos más representativos.

9.5.2 Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (Bondes)

El rendimiento de los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal proviene de dos fuentes: intereses pagaderos cada 28 días (o en el plazo que lo sustituya en caso de días inhábiles) y las ganancias de capital que se logran al adquirir los títulos con descuento. Además, como los ingresos para los intermediarios bursátiles que realizan operaciones con esta clase de valores se obtienen mediante diferencias entre los precios de compra y venta, a los inversionistas no se les cobra comisión alguna.

Tal como puede apreciarse en la figura 9.4, la tasa de interés "será variable" y se calculará capitalizando todos los días durante todo el periodo de interés la tasa a la cual las instituciones de crédito y casas de bolsa realizan operaciones de compra-venta y reporto a plazo de un día hábil con títulos bancarios, conocida en el mercado como "tasa ponderada de fondeo bancario" que publica diariamente el Banco de México.

En algunos periódicos se publican los datos sobre Bondes: las características de cada emisión (aparecen publicadas los días jueves de cada semana, que es cuando se emiten), las tasas de interés que pagan y los precios a los que se negocian en la bolsa de valores.

En la tabla 9.5 se resumen las características de algunas emisiones de Bondes, y en la sección siguiente se presentan algunos ejemplos.

9.5.2.1 Operaciones en fechas de pago de intereses

Los datos de la tabla 9.5 se obtuvieron en el sitio de internet del Banco de México (www.banxico.gob.mx).

Tabla 9.5 Algunos datos sobre Bondes

Fecha	Plazo Días por vencer	Precio limpio Valor de mercado	Precio sucio	Cupón vigente Tasas promedio
12 de abril de 2012	1 092	99.356120	99.356120	0.00
27 de julio de 2012	986	99.442680	99.715847	4.47
30 de julio de 2012	983	99.444270	99.755381	4.48
31 de julio de 2012	982	99.444870	99.768426	4.48
01 de agosto de 2012	981	99.445400	99.781400	4.48
02 de agosto de 2012	980	**99.427970**	**99.427970**	0.00
03 de agosto de 2012	979	99.438730	99.451174	4.48
06 de agosto de 2012	976	99.440350	99.490128	4.48
07 de agosto de 2012	975	99.440880	99.503102	4.48
08 de agosto de 2012	974	99.441420	99.516087	4.48
09 de agosto de 2012	973	99.421830	99.508941	4.48
10 de agosto de 2012	972	99.428570	99.528126	4.48
13 de agosto de 2012	969	99.442850	99.579739	4.48
14 de agosto de 2012	968	99.443380	99.592713	4.48
15 de agosto de 2012	967	99.443920	99.605698	4.48
16 de agosto de 2012	1 092	**99.307720**	**99.307720**	0.00
17 de agosto de 2012	1 091	99.308370	99.320814	4.48
20 de agosto de 2012	1 088	99.310100	99.359878	4.48
21 de agosto de 2012	1 087	99.310700	99.372922	4.48
22 de agosto de 2012	1 086	99.311220	99.385887	4.48
23 de agosto de 2012	1 085	99.269990	99.357101	4.48
24 de agosto de 2012	1 084	99.270830	99.370386	4.48
27 de agosto de 2012	1 081	99.272710	99.409904	4.49
28 de agosto de 2012	1 080	99.273240	99.422907	4.49
29 de agosto de 2012	1 079	99.273960	99.436099	4.49
30 de agosto de 2012	1 078	99.253560	99.428171	4.49
31 de agosto de 2012	1 077	99.254240	99.441323	4.49

(*continúa*)

Tabla 9.5 Algunos datos sobre Bondes (*continuación*)

Fecha	Plazo Días por vencer	Precio limpio Valor de mercado	Precio sucio	Cupón vigente Tasas promedio
03 de septiembre de 2012	1 074	99.255920	99.480420	4.49
04 de septiembre de 2012	1 073	99.256860	99.494360	4.50
05 de septiembre de 2012	1 072	99.257460	99.507460	4.50

Fuente: http://www.banxico.gob.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadro&idCuadro=CF300&sector=18&locale=es

En los ejemplos siguientes se utilizan valores supuestos tanto para las tasas de interés como para los valores de compra y venta.

Tal como puede apreciarse en la tabla 9.5, los datos que aparecen en la base de datos del Banco de México incluyen, aparte de la fecha y de la tasa aplicable, precios "limpio" y "sucio". En ella también puede observarse que el precio sucio siempre es más alto que el limpio, lo cual se debe a que el precio limpio no incluye los intereses devengados por el Bonde en cada fecha, en tanto que el precio sucio sí los incluye.

En esta tabla se incluyen los datos del 12 de abril de 2012 hasta el 5 de septiembre de 2012. Además, se marcaron en negritas los datos de 2 y 16 de agosto para evidenciar que en estas fechas los precios sucios son iguales a los precios limpios lo cual, a su vez, evidencia que fueron fechas de cupón, es decir, fechas en las que se pagaron intereses.

En los ejemplos siguientes se ilustran los procedimientos aplicables para calcular rendimientos efectivos.

EJEMPLO 9.5.2.1.1

Calcular el rendimiento efectivo de estos Bondes entre el 12 de abril y el 16 de agosto de 2012.

SOLUCIÓN:

Los precios correspondientes fueron 99.356120 y 99.307720 y, como son fechas de pago de intereses, son precios, al mismo tiempo, sucios y limpios.

El rendimiento efectivo al plazo, 126 días, se calcula de la siguiente manera:

Aparte de los precios de compra y de venta que ya se anotaron, para determinar los intereses que cobró el tenedor del Bonde en el momento de venderlo, se debe restar el precio limpio del precio sucio, el día anterior, o:

$$99.605698 - 99.307720 = 0.297978$$

y se debe sumar este valor al precio de venta del 16 de agosto para obtener el monto total, o sea,

$$0.297978 + 99.307720 = 99.605698$$

Finalmente, $$i_{126} = \frac{M}{C} - 1 = \frac{99.605698}{99.356120} - 1 = 0.00251195 \text{ o } 0.25\%$$

Si ahora se calcula el rendimiento efectivo anual, se tiene:

$$1.00251195^{365/126} - 1 = 0.00729 \text{ o } 0.729\%$$

9.5.2.2 Operaciones en fechas que no son de pago de intereses

EJEMPLO 9.5.2.2.1

Calcular el rendimiento de estos Bondes entre el 6 de agosto y el 3 de septiembre.

Solución:
Los datos son:

Fecha	Plazo	Precio limpio	Precio sucio	Cupón vigente
06 de agosto de 2012	976	99.440359	99.490128	4.48
16 de agosto de 2012	1 092	99.307720	99.307720	0
03 de septiembre de 2012	1 074	99.255920	99.480420	4.44

Por lo tanto, el precio pagado por el Bonde el 6 de agosto fue el precio sucio, \$99.490128, el 16 de agosto se recibieron los intereses generados de 99.605698 – 99.307720 = 0.297978, que se calcularon en el ejemplo anterior y el precio a la fecha de la venta fue de 99.480420.

Los dos plazos que se deben considerar es el transcurrido desde la compra hasta el cobro de intereses, 10 días, y entre la compra y la venta, 28 días. El planteamiento es, entonces:

$$99.490128 = 0.297978(1+i)^{-10} + 99.480420(1+i)^{-28}$$

Mediante ensayos sucesivos se encuentra que $i \cong 0.0001$, que es la tasa efectiva diaria. De acuerdo con ello, la tasa efectiva anual es:

$$i_{365} = 1.0001^{365} - 1 = 0.03717 \text{ o } 3.72\%$$

EJEMPLO 9.5.2.2.2

Para ilustrar el caso de una compra-venta entre dos fechas que no incluyen pago de intereses, se determina ahora el rendimiento anual efectivo entre el 17 de agosto y el 5 de septiembre.

Solución:
Los datos:

Fecha	Plazo	Precio limpio	Precio sucio	Cupón vigente
17 de agosto de 2012	1 091	99.308370	99.320814	4.48
05 de septiembre de 2012	1 072	99.257460	99.507460	4.50

Este caso es más sencillo ya que basta con dividir el precio sucio de la venta del 5 de septiembre de 2012 entre el precio sucio de la compra del 17 de agosto para obtener la tasa de rendimiento efectivo al plazo:

$$i_{18} = \frac{99.507460}{99.320814} - 1 = 0.00187922$$

Por su parte, la tasa efectiva anual es:

$$1.00187922^{365/19} - 1 = 0.0367253 \quad \text{o } 3.67\%$$

9.5.3 Certificados bursátiles

Tal como se comentó en la sección 9.2, los certificados bursátiles son títulos que se pueden colocar a descuento o con pago de intereses, de acuerdo con el programa de colocación correspondiente y que pueden ser colocados por entidades gubernamentales o por empresas. En la figura 9.4 se puede ver el anuncio de colocación del programa de certificados bursátiles de Industrias Bachoco, S.A.B. de C.V., que se obtuvo del sitio de internet de la Bolsa Mexicana de Valores, mediante el procedimiento que se detalla en la sección final de este capítulo, “Matemáticas en internet. Inversión en bolsa de valores”.

En esta figura se puede leer que estos certificados tienen un valor nominal de \$100 o de su equivalente en Udis y que pueden pagar intereses o emitirse a tasa de descuento.

En las dos subsecciones siguientes se revisan los cálculos para determinar tasas efectivas *a*) cuando las operaciones se llevan a cabo en días de pago de intereses y *b*) cuando se llevan a cabo en días que no son de pago de intereses.

9.5.3.1 Operaciones en fecha de pago de intereses

EJEMPLO 9.5.3.1.1

Determinar la tasa efectiva de interés anual que generaron los certificados bursátiles de Industrial Bachoco entre el 28 de julio y el 25 de agosto de 2012, si pagaron una tasa de 4.8% y los precios de compra y de venta fueron \$99.89 y \$100, respectivamente.

Bachoco
Todos los días

INDUSTRIAS BACHOCO, S.A.B. DE C.V.

PROGRAMA DE COLOCACIÓN DE CERTIFICADOS BURSÁTILES

MONTO TOTAL AUTORIZADO CON CARÁCTER REVOLVENTE:

\$5,000,000,000.00
(CINCO MIL MILLONES DE PESOS 00/100 M.N.)
O SU EQUIVALENTE EN UNIDADES DE INVERSIÓN

Cada Emisión que se realice al amparo del presente Programa contará con sus propias características. Las características de cada Emisión (el monto total de cada Emisión, el valor nominal, el precio de colocación, la fecha de emisión y liquidación, el plazo, la fecha de vencimiento, entre otras) serán establecidas en su momento por BACHOCO y se darán a conocer en los Documentos.

BACHOCO podrá ofrecer y colocar una o más Emisiones al amparo del presente Programa, de manera simultánea o sucesiva, hasta por el monto total autorizado del Programa.

CARACTERÍSTICAS DEL PROGRAMA

Emisora:	Industrias BACHOCO, S.A.B. de C.V.
Tipo de valor:	Certificados Bursátiles.
Tipo de Colocación:	Oferta Pública.
Clave de Pizarra	"BACHOCO"
Monto total autorizado del PROGRAMA:	\$5,000,000,000.00 (Cinco Mil Millones de Pesos 00/100) o su equivalente en UDIs, con carácter revolvente.
Vigencia del PROGRAMA:	5 (cinco) años contados a partir de la fecha del oficio de autorización de la CNBV.
Valor nominal de los CBs:	Será determinado para cada Emisión que se realice al amparo del Programa, en el entendido que el valor nominal de cada CB será de \$100.00 (Cien Pesos 00/100) o de 100 UDIs o un múltiplo de éstos.
Denominación:	Los CBs podrán denominarse en Pesos o en UDIs, según se señale para cada Emisión en los Documentos.
Tasa de interés:	Los Certificados Bursátiles podrán devengar intereses desde la fecha de su emisión y en tanto no sean amortizados en su totalidad. La tasa a la que devenguen intereses los Certificados Bursátiles podrá ser fija o variable y el mecanismo para su determinación y cálculo (incluyendo el primer pago de intereses) se fijará para cada Emisión. Asimismo, los Certificados Bursátiles podrán emitirse con una tasa de descuento.
Tasa de interés moratorio:	Los CBs podrán devengar intereses moratorios según se determine, para cada Emisión, en los Documentos.
Lugar y forma de pago:	El pago del principal y, en su caso, de los intereses que generen los CBs, se realizará en las oficinas de Indeval ubicadas en Avenida Paseo de la Reforma número 255, tercer piso, colonia Cuauhtémoc, C.P. 06500, México, D.F. En su caso, el pago de intereses moratorios se realizará en las oficinas del Representante Común designado para cada Emisión que se realice al amparo del Programa. Los pagos podrán efectuarse mediante transferencia electrónica. El procedimiento de pago será establecido para cada Emisión en los Documentos.
Garantía:	Los CBs son quirografarios por lo que no cuentan con garantía, salvo que en los Documentos de la Emisión se otorgue garantía específica.

accival
Casa de Bolsa
Banamex

El presente Prospecto se encuentra a disposición del público inversionista con el Intermediario Colocador y en las páginas de Internet de la BMV (www.bmv.com.mx), de la CNBV (www.cnbv.gob.mx) y de BACHOCO (www.bachoco.com.mx) (en el entendido que ni dicha página ni su contenido forman parte del presente Prospecto).

México, D.F., a 31 de agosto de 2012.

Autorización de la CNBV para su publicación mediante oficio número 153/8837/2012 de fecha 28 de agosto de 2012.

Figura 9.4 Programa de certificados bursátiles de Industrial Bachoco.

Solución:
Sin tomar en cuenta las comisiones de la casa de bolsa ni las retenciones de impuestos, la tasa efectiva de rendimiento se determina sumando al precio de venta los intereses devengados en el periodo, que fue de 28 días:

$$I = \frac{Cit}{360} = \frac{100(0.048)(28)}{360} = 0.373333$$

Así, luego de haber pagado \$99.89 por estos certificados el 28 de julio, se recibieron \$100 + 0.373333 = 100.373333 el 25 de agosto, por lo que la tasa efectiva de rendimiento a 28 días fue:

$$i_{28} = \frac{100.373333}{99.89} - 1 = 0.00483865$$

De donde la tasa efectiva anual fue de:

$$i_{365} = 1.00483865^{365/28} - 1 = 0.06489 \text{ o } 6.49\%$$

9.5.3.2 Operaciones en fechas que no son de pago de intereses

EJEMPLO 9.5.3.2.1

Determinar la tasa efectiva de rendimiento anual de los certificados bursátiles de Corporación Geo, si se compraron en \$99.89 el 28 de julio y se vendieron en \$99.92 el 15 de agosto.

Solución:
Los intereses generados entre el 28 de julio y el 15 de agosto fueron:

$$I = \frac{Cit}{360} = \frac{100(0.048)(18)}{360} = 0.24$$

En consecuencia, lo que el vendedor de los certificados recibe en el momento de la venta es \$99.92 + \$0.24 = \$100.16, de donde la tasa efectiva de rendimiento a 18 días es:

$$i_{28} = \frac{100.16}{99.89} - 1 = 0.00270297$$

Por su parte, la tasa efectiva anual es:

$$i_{365} = 1.00270297^{365/18} - 1 = 0.05626 \text{ o } 5.62\%$$

9.5.4 Rendimiento de valores que pagan intereses y que ajustan su valor nominal

Tal como se mencionó, los principales valores que caen en esta categoría son los Udibonos. También existen algunos otros títulos que ya se han considerado, que en ocasiones se emiten con valor nominal indizado como el papel comercial indizado. El cálculo de los rendimientos efectivos es igual en todos los casos, por lo cual se reduce el análisis a un ejemplo con Udibonos.

Tabla 9.6 Algunos datos sobre Udis a plazo de 10 años

Fecha	Plazo Días por vencer	Precio limpio Valor de mercado	Precio sucio	Cupón vigente Tasas promedio
21 de diciembre de 2011	3 277	465.017616	470.900593	2.500000
22 de diciembre de 2011	3 276	465.973513	465.973513	2.500000

(continúa)

Tabla 9.6 Algunos datos sobre Udis a plazo de 10 años (*continuación*)

Fecha	Plazo Días por vencer	Precio limpio Valor de mercado	Precio sucio	Cupón vigente Tasas promedio
23 de diciembre de 2011	3 275	467.384275	467.416783	2.500000
20 de junio de 2012	3 095	509.632397	515.583185	2.500000
21 de junio de 2012	3 094	511.357109	511.357109	2.500000
22 de junio de 2012	3 093	511.548891	511.581774	2.500000
25 de junio de 2012	3 090	509.001510	509.133101	2.500000
26 de junio de 2012	3 089	512.200412	512.364925	2.500000
27 de junio de 2012	3 088	509.983726	510.181177	2.500000
28 de junio de 2012	3 087	509.579219	509.809613	2.500000
29 de junio de 2012	3 086	509.579222	509.842574	2.500000
02 de julio de 2012	3 083	514.778258	515.140539	2.500000
03 de julio de 2012	3 082	517.464128	517.859405	2.500000
04 de julio de 2012	3 081	521.208804	521.637092	2.500000
05 de julio de 2012	3 080	524.882818	525.344124	2.500000
06 de julio de 2012	3 079	523.318828	523.813166	2.500000
09 de julio de 2012	3 076	524.668869	525.262358	2.500000
10 de julio de 2012	3 075	525.247047	525.873607	2.500000
11 de julio de 2012	3 074	522.480826	523.140477	2.500000
12 de julio de 2012	3 073	524.174095	524.866843	2.500000
13 de julio de 2012	3 072	525.237800	525.963661	2.500000
16 de julio de 2012	3 069	526.091366	526.916623	2.500000
17 de julio de 2012	3 068	526.654177	527.512592	2.500000
18 de julio de 2012	3 067	525.833987	526.725567	2.500000
19 de julio de 2012	3 066	528.347895	529.272650	2.500000
20 de julio de 2012	3 065	532.673590	533.631536	2.500000
23 de julio de 2012	3 062	532.021709	533.079286	2.500000
24 de julio de 2012	3 061	531.566325	532.657138	2.500000
25 de julio de 2012	3 060	532.452372	533.576427	2.500000
26 de julio de 2012	3 059	530.533204	531.690604	2.500000
27 de julio de 2012	3 058	528.402342	529.593097	2.500000
30 de julio de 2012	3 055	530.160667	531.451591	2.500000
31 de julio de 2012	3 054	531.499974	532.824323	2.500000
01 de agosto de 2012	3 053	532.021685	533.379470	2.500000
02 de agosto de 2012	3 052	535.061668	536.452910	2.500000
03 de agosto de 2012	3 051	530.608898	532.033609	2.500000
06 de agosto de 2012	3 048	525.666631	527.191850	2.500000
07 de agosto de 2012	3 047	523.764881	525.323639	2.500000
08 de agosto de 2012	3 046	522.272532	523.864838	2.500000
09 de agosto de 2012	3 045	519.202784	520.828661	2.500000
10 de agosto de 2012	3 044	521.455276	523.114736	2.500000
13 de agosto de 2012	3 041	521.362249	523.121595	2.500000
14 de agosto de 2012	3 040	520.173379	521.966024	2.500000
15 de agosto de 2012	3 039	517.410087	519.236037	2.500000
16 de agosto de 2012	3 038	516.256367	518.115630	2.500000
17 de agosto de 2012	3 037	516.124293	518.016867	2.500000
20 de agosto de 2012	3 034	515.743759	517.736302	2.500000
21 de agosto de 2012	3 033	515.424855	517.450727	2.500000
22 de agosto de 2012	3 032	516.452914	518.512122	2.500000
23 de agosto de 2012	3 031	518.541796	520.634340	2.500000
24 de agosto de 2012	3 030	519.274265	521.400149	2.500000
27 de agosto de 2012	3 027	519.655564	521.881613	2.500000
28 de agosto de 2012	3 026	521.054908	523.314371	2.500000

(*continúa*)

Tabla 9.6 Algunos datos sobre Udis a plazo de 10 años (*continuación*)

Fecha	Plazo Días por vencer	Precio limpio Valor de mercado	Precio sucio	Cupón vigente Tasas promedio
29 de agosto de 2012	3 025	520.007927	522.300816	2.500000
30 de agosto de 2012	3 024	517.368604	519.694919	2.500000
31 de agosto de 2012	3 023	517.808739	520.168491	2.500000
03 de septiembre de 2012	3 020	518.077147	520.537232	2.500000
04 de septiembre de 2012	3 019	518.535991	521.029530	2.500000
05 de septiembre de 2012	3 018	522.329416	524.856420	2.500000

En la tabla 9.6 se reproducen algunos datos de Udibonos a plazo de 10 años, difundidos en el mismo sitio de internet del Banco de México. También se incluye en esta tabla un corte en los datos para incluir los correspondientes al 22 de diciembre de 2011 y 21 de junio de 2012, fechas de pago de intereses, junto con diversos datos diarios, a partir del 22 de junio de 2012 y hasta el 5 de septiembre de 2012.

También, al igual que en el caso de los Bondes, los datos de Udibonos ofrecen tanto precio sucio (lo cual incluye los intereses devengados) como el precio limpio. Observe, además, que, al igual que sucede con los Bondes, en las fechas de pago de intereses, el precio sucio y el precio limpio son iguales.

EJEMPLO 9.5.4.1

Utilizando los datos de la tabla 9.6, determinar la tasa efectiva de rendimiento anual que pudo haber obtenido un inversionista que compró Udibonos el 22 de diciembre de 2011 y los vendió el 21 de junio de 2012.

Solución:

Además de los datos que aparecen en la tabla 9.6, es necesario conocer el valor de las Udis en estas mismas fechas, el cual se puede obtener también en el sitio del Banco de México.

En este caso, no se requiere hacer el cálculo de las Udis, ya que los precios de la tabla 9.6 ya están dados en pesos.

Los precios de los Udibonos fueron de \$465.973513 el 22 de diciembre de 2011 y de \$511.357109 el 21 de junio de 2012 y, como ambos son precios limpios, el cálculo del rendimiento es directo.

De lo anterior, la tasa efectiva de rendimiento a seis meses fue:

$$i = \frac{511.357109}{465.973513} - 1 = 0.197395227$$

Y de aquí, la tasa efectiva de rendimiento anual:

$$i = 1.097395227^2 - 1 = 0.204276 \text{ o sea } 20.43\% \text{ efectivo anual.}$$

En este caso particular, la operación resultó enormemente redituable considerando que las tasas de otros instrumentos rondaban el 4.5% anual.

Ejercicios de la sección 9.5

40. Explique los dos casos que se pueden presentar para el cálculo de rendimientos efectivos de instrumentos que pagan intereses.
41. Explique la principal diferencia entre los dos casos que se pueden presentar en el cálculo de rendimientos efectivos de instrumentos que pagan intereses.

42. Explique qué son el "precio sucio" y el "precio limpio" de los títulos bursátiles.

Responda a los ejercicios 42 a 45, consultando: http://www.banxico.gob.mx/eInfoFinanciera/FSinfoFinanciera.html (pero tenga cuidado porque esta dirección puede haber cambiado desde cuando se editó este texto).

43. Diga cuántos tipos de Bondes hay en circulación a la fecha, de acuerdo a su plazo.
44. Diga cuál es la tasa promedio de cupón vigente de los Bondes D a 5 años vigente.
45. Diga cuáles son el precio sucio y el precio limpio de alguna emisión de Bondes y especifíquela.
46. Con los datos de la tabla 9.5, calcule la tasa efectiva de rendimiento anual que obtiene un inversionista que compra Bondes el 12 de abril de 2012 y los vende el 31 de julio del mismo año.
47. Con los datos de la tabla 9.5, calcule la tasa efectiva de rendimiento anual que obtiene un inversionista que compra Bondes el 12 de abril de 2012 y los vende el 1 de agosto de 2012.
48. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento al plazo para la operación planteada en el ejercicio 46?
49. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento al plazo para la operación planteada en el ejercicio 47?
50. Con los datos de la tabla 9.5, calcule la tasa efectiva de rendimiento mensual que obtiene un inversionista que compra Bondes el 10 de agosto de 2012 y los vende el 29 de agosto del mismo año.
51. Con los datos de la tabla 9.5, calcule la tasa efectiva de rendimiento mensual que obtiene un inversionista que compra Bondes el 3 de agosto de 2012 y los vende el 3 de septiembre del mismo año.
52. ¿Por qué se dice que los Udibonos son instrumentos indizados?

Las siguientes son las tasas de interés brutas que pagaron diversos certificados bursátiles.

Emisora	Clave	Tasa bruta	Periodo
TV Azteca	TVACB	4.99%	24 ago a 21 sep 2012
TV Azteca	TVACB-2	4.02%	24 ago a 21 sep 2012
ABN Amro Bank	GMACCB-2	4.87%	28 jul a 25 ago 2012
ABN Amro Bank	GMACCB	3.79%	25 ago a 22 sep 2012
Carso Global Telecom	TELECOM	4.55%	24 ago 2011 a 22 feb 2012
Municipio de Aguascalientes	MAGS	4.09%	24 ago a 23 nov 2012

Con los datos de la tabla anterior, resuelva los ejercicios 53 a 56, asumiendo que los valores nominales de los títulos son de $100.00.

53. Si un inversionista compra certificados bursátiles de la emisión TVACB el 24 de agosto de 2012, en $99.86 y los vende en $99.84 el 21 de septiembre del mismo año, ¿cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual que obtiene?
54. Si un inversionista compra certificados bursátiles de la emisión TVACB-2 el 24 de agosto de 2012 en $99.89 y los vende en $99.91 el 21 de septiembre del mismo año, ¿cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual que obtiene?
55. Un inversionista compra certificados bursátiles de la emisión TELECOM el 28 de agosto de 2012 en $99.90 y los vende en el mismo precio el 28 de septiembre del mismo año ¿Cuál es la tasa efectiva mensual que obtiene?
56. Un inversionista compra certificados bursátiles de la emisión MAGS el 31 de agosto de 2012, en $99.95 y los vende en $99.96 el 28 de octubre del mismo año ¿Cuál es la tasa efectiva mensual que obtiene?

Responda a los ejercicios 57 y 58, consultando el sitio web: http://www.banxico.gob.mx/eInfoFinanciera/FSinfoFinanciera.html (pero tenga cuidado porque esta dirección puede haber cambiado desde cuando se editó este texto).

57. Diga cuáles son los precios limpio y sucio de las emisiones de Udibonos vigentes a la fecha.
58. Diga cuáles son las tasas promedio de cupón vigentes a la fecha de los Udibonos en circulación.

Resuelva los ejercicios 59 y 60 con los datos de la tabla 9.6 y consultando el sitio web: http://www.banxico.gob.mx/eInfoFinanciera/FSinfoFinanciera.html.

59. Determine la tasa efectiva de rendimiento al plazo de los Udibonos que se compraron el 27 de diciembre de 2011 y se vendieron el 21 de junio de 2012.
60. Determine la tasa efectiva de rendimiento anual de los Udibonos que se compraron el 21 de diciembre de 2011 y se vendieron el 6 de julio de 2012.

9.6 Resumen

En este capítulo se explicaron los procedimientos que se deben seguir para determinar los rendimientos efectivos de diversos valores bursátiles. Esta determinación de rendimientos efectivos es de especial importancia en el mercado de valores, porque las tasas que normalmente se manejan en publicaciones son tasas nominales que, por lo general, no permiten realizar comparaciones válidas entre diferentes instrumentos o periodos.

Para explicar los procedimientos de cálculo, se dividieron los valores en dos principales categorías, de acuerdo con la fuente principal de rendimientos que ofrecen: *a*) ganancias de capital, y *b*) intereses.

En el caso de los valores que ofrecen exclusivamente ganancias de capital y de los que pagan intereses (y cuando las operaciones con estos últimos se realizan en fechas de pago de intereses y no hay pagos de intereses intermedios), el procedimiento que se debe seguir para calcular los rendimientos efectivos se resume perfectamente en la fórmula 9.1:

$$i_p = \frac{M}{C} - 1$$

en donde i_p es la tasa efectiva de rendimiento al plazo.

Este mismo procedimiento se aplica a los valores que se manejan con tasa de descuento, sólo que con éstos es necesario calcular antes el precio descontado (el capital), utilizando la fórmula 9.4:

$$P = VN\left[1 - \frac{td}{360}\right]$$

En el caso de los valores que pagan dividendos y los que pagan intereses (y cuando las operaciones con éstos no se llevan a cabo en fechas de pago de intereses o cuando existen pagos de intereses intermedios entre las fechas de compra y venta), el procedimiento a seguir es:

- Determinar los precios de compra y de venta.
- Calcular los intereses devengados por el título desde la última fecha de pago de intereses previa a la compra hasta la fecha en que se realiza ésta. Estos intereses deben ser pagados por el comprador a quien vende, por lo que deben sumarse al precio de compra para conformar los "egresos a la compra".
- Determinar los intereses devengados desde la última fecha de pago de intereses previa a la venta hasta la fecha en que ésta se lleva a cabo. Al igual que en el párrafo anterior, quien compra debe pagar estos intereses al vendedor. Por ello, se deben sumar al precio de venta para obtener los "ingresos a la venta".

  Estos dos últimos párrafos sólo son aplicables a los instrumentos que pagan intereses.
- Determinar cualesquiera pagos de interés entre las fechas de compra y de venta. En el caso de las acciones, en este párrafo se aplicaría "dividendos" en lugar de "intereses".
- Construir, con las cantidades anteriores, una ecuación de valores equivalentes.
- Resolver la ecuación anterior, ya sea mediante aproximaciones sucesivas o utilizando algún paquete de computación que permita resolver ecuaciones polinomiales.

Además de los procedimientos esbozados, al evaluar los rendimientos efectivos de los valores bursátiles, es importante tener presentes las comisiones que los intermediarios cobran cuando realizan las operaciones, si es que cobran alguna.

Comprobación del capítulo

Si ha leído el capítulo completo, el lector debe:

- Saber cuáles son los valores que se negocian en el mercado de valores mexicano y sus principales características.
- Explicar las formas en las que los valores bursátiles permiten obtener rendimientos.
- Calcular rendimientos efectivos de acciones de sociedades de inversión de renta fija.
- Calcular rendimientos efectivos de acciones de empresas y de sociedades de inversión comunes.
- Conocer la fórmula para calcular el precio descontado de un valor.
- Calcular el rendimiento efectivo de Cetes, papel comercial y aceptaciones bancarias.
- Conocer la fórmula para calcular los intereses pagados.
- Calcular el rendimiento efectivo de Bondes, Udibonos y certificados bursátiles.
- Calcular el rendimiento efectivo de cualquier instrumento bursátil.
- Obtener información sobre valores bursátiles en publicaciones e interpretar esa información.
- Obtener información sobre valores bursátiles gubernamentales en el sitio de internet del Banco de México.

Términos y conceptos importantes

- Acción de empresa comercial, industrial o de servicios
- Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal
- Certificados bursátiles
- Certificados de la Tesorería de la Federación
- Cotización de mercado
- Descuento
- Dividendos
- Intereses
- Sociedad de inversión común
- Sociedad de inversión en instrumentos de deuda
- Tasa nominal y tasa efectiva
- Udibonos
- Valor nominal

Fórmulas importantes

$$i_p = \frac{M}{C} - 1 \quad (9.1)$$

$$i_p = \frac{I}{C} \quad (9.2)$$

$$i_n = (1 + i_p)^{n/p} \quad (9.3)$$

$$P = VN\left(1 - \frac{td}{360}\right) \quad (9.4)$$

$$D = VN - P \quad (9.5)$$

$$I = \frac{TNxDxVN}{360} \quad (9.6)$$

$$I = \frac{itc}{360} \quad (9.7)$$

Ejercicios complementarios

1. ¿A qué precio se compraron acciones de una sociedad de inversión de renta fija que rindieron 9% efectivo anual, si la compra se realizó el 15 de agosto y el precio de venta fue de $4.50?
2. El 25 de junio se negociaron acciones de ABACOF (una sociedad de inversión común o de renta variable) en $26.1256 y en $26.35 el 24 de julio. Si se considera que no se compraron y vendieron en realidad, ¿cuál fue el rendimiento efectivo anual?
3. ¿Cuál es la respuesta del ejercicio 2 si, de hecho, se llevan a cabo las operaciones de compra y de venta?
4. Describa en forma de algoritmo el procedimiento que se debe seguir para determinar el rendimiento efectivo de la inversión en acciones de sociedades de inversión.

a) De renta fija.
b) De renta variable.

5. El 23 de julio se pagó un dividendo en efectivo de \$0.25 por cada acción de Apasco en circulación. Si estas acciones se cotizaron a \$9.85 el 25 de junio y a \$10.30 el 9 de agosto, ¿cuál fue el rendimiento efectivo mensual para sus tenedores, sin tomar en consideración las comisiones por compra y venta de los títulos?
6. ¿Cuál sería el rendimiento efectivo anual de las acciones de Apasco si se toman en consideración las comisiones del intermediario bursátil?
7. Describa, en forma de algoritmo, el procedimiento que se debe seguir para evaluar el rendimiento efectivo en circunstancias como las que se describen en el ejercicio 5.
8. Describa, en forma de algoritmo, el procedimiento que se debe seguir para evaluar el rendimiento efectivo en circunstancias como las que se describen en el ejercicio 6.
9. Si se obtuvo una tasa efectiva de rendimiento al plazo de 5.15% al invertir en acciones de una empresa comercial, y el precio de compra (incluyendo la comisión de la casa de bolsa) fue de \$37.50 por acción, ¿cuál fue el precio de venta (incluyendo la comisión)?
10. ¿Cuál sería el precio de compra en el ejercicio 9 si no se incluye la comisión de la casa de bolsa?
11. Utilizando los datos del ejercicio 9 y la respuesta del ejercicio 10, y sin considerar la comisión de la casa de bolsa por la venta de acciones, ¿cuál sería la tasa efectiva de rendimiento mensual?
12. ¿Cuál fue la tasa efectiva de rendimiento de las acciones de ALFA en el mes anterior?
13. ¿Cuál fue la tasa efectiva de rendimiento de las acciones de la sociedad de inversión en instrumentos de deuda F/MLAT2 en el mes anterior?
14. La emisión CT-24-XX de Cetes tiene plazo de 28 días y tasa de descuento de 7.85%:
    a) ¿Cuál es la tasa nominal de rendimiento anual?
    b) ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual?
15. Para alguna (si es que hay más de una) de las emisiones de Cetes del jueves anterior:
    a) Señale sus características.
    b) ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual?
16. El 29 de junio se emitieron certificados bursátiles a plazo de 28 días. ¿Cuál era su fecha de vencimiento?
17. Los certificados bursátiles del ejercicio anterior tenían una tasa nominal de rendimiento anual de 7.31%. ¿Cuál era la tasa de descuento?
18. ¿Cuál era la tasa efectiva de rendimiento anual de los certificados bursátiles de los ejercicios 16 y 17?
19. Determine las tasas efectivas de rendimiento de las siguientes emisiones de certificados bursátiles, al plazo que se solicita.

Plazo (días)	Tasa de descuento	Plazo de la tasa efectiva
28	4.25	Mensual
21	4.75	Anual
28	4.56	Diaria

20. Localice en alguna publicación datos sobre emisiones recientes de certificados bursátiles y determine la tasa efectiva de rendimiento anual correspondiente.
21. Localice en alguna publicación datos sobre emisiones recientes de certificados bursátiles y determine la tasa efectiva de rendimiento anual correspondiente.
22. El 14 de junio se emitieron Cetes a plazo de 91 días y con tasa de descuento de 4.23%. Determine la tasa efectiva de rendimiento anual que ofrecieron a su vencimiento.
23. El 14 de junio se emitieron los Cetes a plazo de 28 días y con tasa de descuento de 4.73%. Determine la tasa efectiva de rendimiento anual que ofrecieron a su vencimiento.
24. El 14 de junio se emitieron los Cetes a plazo de 180 días y con tasa de descuento de 4.80%. Determine la tasa efectiva de rendimiento anual que ofrecieron a su vencimiento.
25. ¿Por qué es mayor la tasa de descuento de los Cetes del ejercicio 24 que la de los Cetes del ejercicio 23?
26. Localice datos recientes de emisiones de Cetes y determine la tasa efectiva de rendimiento anual.
27. Localice datos recientes de emisiones de Cetes y determine la tasa efectiva de rendimiento mensual.
28. ¿Cuál es la tasa definitiva del impuesto sobre la renta para personas físicas que obtienen intereses en inversiones bursátiles?
29. ¿Qué tasa neta de interés corresponde a una persona física que interviene en obligaciones que pagan 4% anual bruto de interés?
30. ¿Cobran comisión los intermediarios bursátiles en las operaciones de compra y de venta de Bondes? Si la respuesta es afirmativa, diga de cuánto es esa comisión. Si la respuesta en negativa, explique por qué.
31. El 28 de junio se compran Bondes en \$98.87 y se venden el 26 de julio al mismo precio. Si los intereses pagados en ese periodo son a una tasa nominal anual de 7.45%, ¿cuánto se recibe de intereses en el momento de la venta?
32. Si el 15 de julio se adquieren Bondes de la emisión a \$98.7765 y se venden el 15 de agosto a \$99.0111 y si, además, las tasas de interés de los periodos del 12 de julio al 9 de agosto y del 9 de agosto al 6 de septiembre son 4.02% y 4.59%, respectivamente, ¿cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual que se obtiene?
33. Localice en el sitio de internet datos recientes de Bondes y calcule las correspondientes tasas efectivas de rendimiento anual, considerando que las operaciones se llevan a cabo en fechas de pago de interés.

34. Localice en el sitio de internet datos recientes de Bondes y calcule las correspondientes tasas efectivas de rendimiento anual, considerando que las operaciones no se llevan a cabo en fechas de pago de intereses.
35. Ciertos certificados bursátiles pagaron el 7 de mayo 5.00% de interés para el periodo del 7 de febrero al 6 de mayo. Si se compran certificados de esta emisión en la primera fecha a \$98 y se venden en la segunda fecha a \$98.22, ¿qué tasa efectiva de rendimiento mensual se obtiene?
36. ¿Cuál sería la respuesta al ejercicio 35 si no se toman en consideración las comisiones de la casa de bolsa?
37. Se compran certificados bursátiles el 14 de febrero a \$98.88 y se venden a \$98.99 el 15 de mayo. Si la tasa de interés vigente para el periodo del 7 de mayo al 6 de junio es de 4.68%, determine la tasa efectiva de rendimiento anual. (La tasa de interés vigente en el periodo del 7 de febrero al 6 de mayo fue de 7.83%).
38. Determine la respuesta al ejercicio 37 sin tomar en consideración las comisiones del intermediario bursátil.
39. De la fórmula para calcular el precio de los Cetes, despeje la tasa de descuento.
40. Si se compran Bondes el 16 de mayo a \$88.10 y se venden el 30 de agosto a \$86.55, ¿qué tasa efectiva de interés mensual se gana?
41. ¿Cuál es la tasa efectiva mensual de rendimiento de los Bondes del ejercicio 31 si no se toman en consideración las comisiones de la casa de bolsa?
42. Se compran BPA a \$87.65, el 1 de junio y se venden el 31 de agosto a 89.05. ¿Cuál fue la tasa efectiva de rendimiento mensual?
43. ¿Cuál es el rendimiento efectivo anual de BPA que se compraron el 27 de abril y se vendieron el 14 de junio, si los precios son de \$86.55 y \$87.66, respectivamente?
44. Localice en el sitio de internet del Banco de México datos recientes de BPA y determine la tasa efectiva de rendimiento mensual, considerando que las operaciones se realizan en fechas de pago de intereses.
45. Localice en el sitio de internet del Banco de México datos recientes de BPA y determine la tasa efectiva de rendimiento mensual, considerando que las operaciones no se realizan en fechas de pago de intereses.
46. Localice en el sitio de internet del Banco de México datos recientes de Brem y determine la tasa efectiva de rendimiento mensual, considerando que las operaciones se realizan en fechas de pago de intereses.
47. Localice en el sitio de internet del Banco de México datos recientes de Brem y determine la tasa efectiva de rendimiento mensual, considerando que las operaciones no se realizan en fechas de pago de intereses.
48. Localice en el sitio de internet del Banco de México datos recientes de Udibonos y calcule la tasa efectiva de rendimiento mensual.
49. Localice en el sitio de internet del Banco de México datos recientes de Udibonos y calcule la tasa efectiva de rendimiento anual.
50. Localice en el sitio de internet del Banco de México datos recientes de Udibonos y calcule la tasa efectiva de rendimiento mensual.
51. Localice en el sitio de internet del Banco de México datos recientes de Brem y calcule la tasa efectiva de rendimiento mensual.
52. Localice en el sitio de internet del Banco de México datos recientes de Brem y calcule la tasa efectiva de rendimiento anual.
53. Determine el rendimiento mensual en la compra de Udibonos, si se adquirieron el 27 de abril de 2012 y se vendieron el 12 de agosto del mismo año, con datos del sitio de internet del Banco de México.
54. Determine el rendimiento anual efectivo del ejercicio anterior.

Matemáticas en internet. Inversión en bolsa de valores

Esta sección está dividida en tres partes. La primera de ellas es un conjunto de ligas a sitios con información relacionada con cada uno de los apartados del capítulo, igual a los que se presentan en otros capítulos.

La segunda contiene información detallada de los sitios de la Bolsa Mexicana de Valores y del Banco de México, las dos principales fuentes de información bursátil. Esta segunda sección contiene la ruta que se debe seguir en el sitio del Banco de México para llegar hasta la sección de "Vector de precios de títulos gubernamentales (*on the run*)" que contiene datos de precios sucio y limpio, días al vencimiento y tasa de cupón de, entre otros títulos gubernamentales, los Bondes y los Udibonos, con los que se presentan diversos ejemplos en la sección 9.5.

La tercera y última sección detalla la forma de acceder a la información sobre los certificados bursátiles que contiene el sitio de la Bolsa Mexicana de Valores, que son títulos con los que también se desarrollan algunos ejemplos en el texto.

1. Matemáticas en internet. Ligas a sitios con información relacionada

9.1 Introducción

- Bolsa Mexicana de Valores.
  http://www.bmv.com.mx/
- Página del Instituto para el Depósito de Valores de México. En el Indeval se depositan todos los títulos valor que se operan en el mercado mexicano de valores.
  http://www.indeval.com.mx/
- Página de la Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles. En ella encontrará información de las casas de bolsa que participan en el mercado mexicano. Cuenta con un glosario que permite conocer los principales términos que se utilizan en el medio bursátil.
  http://www.amib.com.mx/index.asp
- Página del Mercado Mexicano de Derivados. En ella se encuentra información sobre los instrumentos que ahí operan.
  http://www.mexder.com.mx/

9.3 Valores bursátiles

- En la sección "Acerca de la Bolsa Mexicana" hay información, entre otra, de los instrumentos bursátiles
  http://www.bmv.com.mx/bmv/intrumentos.html
- La Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros (Condusef) es la institución creada por el gobierno para asesorar y defender a los usuarios de dichos servicios. En esta página se proporciona abundante información sobre casas de bolsa.
  http://www.condusef.gob.mx
- Página que proporciona información actualizada sobre los instrumentos operados en la Bolsa Mexicana de Valores. Además, cuenta con vínculos a otros sitios de interés relacionados con el medio bursátil mexicano.
  http://www.mapafinanciero.com.mx/

9.6 Otros vínculos de interés

- New York Stock Exchange-Euronext.
  http://www.nyse.com/
- Página de la empresa de información financiera Bloomberg. Contiene gran variedad de información de los mercados mundiales.
  http://www.bloomberg.com/
- Chicago Mercantile Exchange. Página del mercado de futuros y derivados más importante de Estados Unidos.
  http://www.cme.com/

2. Matemáticas en internet. Sitios de la Bolsa Mexicana de Valores y del Banco de México

Por supuesto, la principal fuente de datos bursátiles es la propia Bolsa Mexicana de Valores (www.bmv.com.mx). Se recomienda enfáticamente explorar el sitio.

Otra de las principales fuentes de datos bursátiles es el sitio del Banco de México (http://www.banxico.gob.mx/). Por supuesto, también se recomienda revisar detalladamente el sitio.

3. Matemáticas en internet. Cómo acceder a la información de certificados bursátiles en el sitio de la Bolsa Mexicana de Valores

Si se elige la opción "Prospectos de colocación" de la alternativa del menú principal "Inscripciones y prospectos" se puede elegir entre los diferentes tipos de valores (renta variable, deuda, sociedades de inversión, títulos opcionales o todos juntos).

Ahora, si se elige "Deuda" en el menú desplegable y de "Certificados bursátiles de empresas" abajo, se llega a una lista de los programas de emisión de certificados bursátiles vigentes. En la fecha en la que se hizo la búsqueda que se reproduce arriba, 4 de septiembre de 2012, aparecían en la lista referencias a unos 100 programas, cuyos prospectos de colocación completos, se pueden consultar en formato pdf.

CAPÍTULO

10 Depreciación

TEMARIO

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

- Definir el concepto de depreciación
- Distinguir los diversos métodos de depreciación
  - Lineal
  - De porcentaje fijo
  - Suma de dígitos
  - Por unidad de producción o servicio
  - Fondo de amortización
- Aplicar los diversos métodos de depreciación en situaciones concretas
- Resolver ejercicios de depreciación mediante el empleo de la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®

10.1 Introducción

Desde el momento mismo en que se adquiere un bien (a excepción de los terrenos y algunos metales), éste empieza a perder valor por el transcurso del tiempo o por el uso que se le da. La pérdida de valor es conocida como depreciación y debe reflejarse contablemente con el fin de:

1. Determinar el costo de los bienes o servicios que se generan con dichos activos.
2. Establecer un fondo de reserva que permita reemplazar el bien al final de su vida útil.

En este capítulo se estudiará la depreciación, así como los distintos métodos que se emplean para calcularla. En la última parte se analizarán también los problemas que se presentan en épocas inflacionarias y que obligan a realizar ajustes en los métodos de valuación y depreciación de los activos.

10.2 Conceptos

La pérdida de valor que sufre un activo físico como consecuencia del uso o del transcurso del tiempo es conocida como *depreciación*. La mayoría de los activos, a excepción de los terrenos, tienen una vida útil durante un periodo finito. En el transcurso de tal periodo estos bienes van disminuyendo su valor, pérdida que es reflejada por la depreciación.

Contablemente se realiza un cargo periódico a los resultados por la depreciación del bien y, en contrapartida, se crea un fondo para contar con los recursos necesarios para reemplazarlo al concluir su vida útil.

Los cargos periódicos que se realizan son llamados *cargos por depreciación*. La diferencia entre el valor original y la depreciación acumulada a una fecha determinada se conoce como *valor en libros*, el cual no necesariamente corresponde a su valor de mercado. En tiempos de alta inflación, éste puede llegar a ser varias veces superior, pues aquél refleja únicamente la parte del costo original que está pendiente de ser cargada a resultados.

Al valor que tiene el activo al final de su vida útil se le conoce como *valor de salvamento* o *valor de desecho*, y debe ser igual al valor en libros en esa fecha.

La *base de depreciación* de un activo, que es igual a su costo original menos su valor calculado de salvamento, es la cantidad que debe ser cargada a resultados en el transcurso de su vida activa.

En el caso de los activos que no pueden reemplazarse se utiliza el concepto de *agotamiento*, esto es, la pérdida progresiva de valor por la reducción de su cantidad aprovechable. Es el caso de las minas que, por la extracción de que son objeto, van disminuyendo paulatinamente su capacidad y su valor, hasta que se agotan totalmente.

Así pues, dos son los objetivos de la depreciación:

1. Reflejar en los resultados la pérdida de valor del activo.
2. Crear un fondo interno para financiar la adquisición de un nuevo activo al finalizar la vida útil del antiguo.

En épocas inflacionarias este segundo objetivo se logra sólo en forma parcial, pues los precios de los nuevos activos serán considerablemente mayores a los de los antiguos.

Existen diversos métodos para determinar el cargo anual por depreciación. Cada uno de ellos presenta ventajas y desventajas que serán analizadas en cada sección.

En este capítulo se utilizará la siguiente notación:

C = Costo original del activo
S = Valor de salvamento (S puede ser negativo)
n = Vida útil calculada en años
B = $C - S$ = Base de depreciación del activo
D_k = Cargo por depreciación por el año k $(1 < k < n)$
A_k = Depreciación acumulada al final del año k.

$$(0 \le k \le n),\ A_0 = 0 \text{ y } A_n = B$$

V_k = Valor en libros al final del año $k (0 \le k \le n)$

$$V_0 = C \text{ y } V_n = S$$

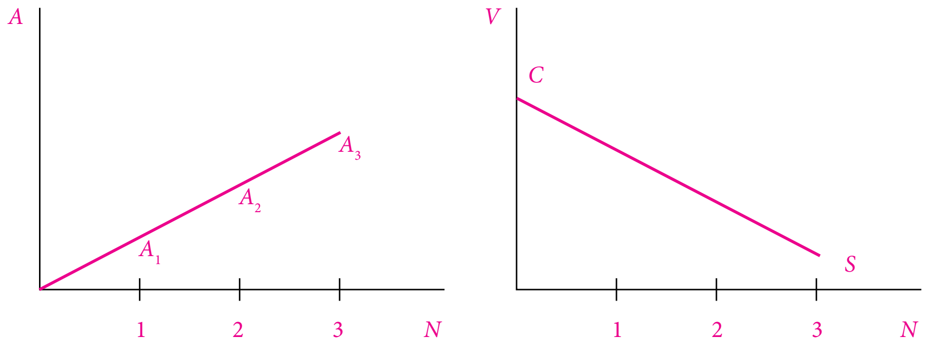
d_k = Tasa de depreciación por el año $k(1 \le k \le n)$

10.3 Método de línea recta

Es el método más simple y el que más se utiliza. En muchos países, como México, es el único aprobado por las autoridades para cumplir con las disposiciones fiscales al respecto.

Este método supone que la depreciación anual será la misma durante toda la vida útil del activo. De acuerdo con ello, la base de depreciación se divide entre el número de años de vida útil calculada y se determina el cargo que anualmente se hará al fondo de reserva y a los resultados.

Al final de la vida útil, la depreciación acumulada más el valor de salvamento del bien debe ser igual al valor de reposición.



Gráfica 10.1

$$D_k = \frac{C-S}{n} = \frac{B}{n} = D \text{ (independientemente de } k) \qquad \textbf{(10.1)}$$

$$A_k = kD \qquad \textbf{(10.2)}$$

$$V_k = C - kD \qquad \textbf{(10.3)}$$

La depreciación acumulada crece cada año en una cantidad fija y el valor en libros disminuye en la misma cantidad.

EJEMPLO 10.3.1

Se compra un equipo de cómputo con valor de $16 000 y se calcula que su vida útil será de 4 años, antes de que deba ser reemplazado por equipo más moderno. Su valor de desecho se calcula en $2 500.

a) Determinar la depreciación anual por el método de línea recta.
b) Elaborar una tabla de depreciación.

Solución:
Utilizando la fórmula (10.1) se tiene:

$$D = \frac{B}{n} = \frac{C-S}{n}$$

$$D = \frac{16\,000 - 2\,500}{4} = \frac{13\,500}{4}$$

$$D = 3\,375$$

De esta forma, la depreciación anual será de $3 375, cantidad que se incrementará en el fondo de reserva para depreciación y disminuirá en el valor en libros del activo. Esto se refleja claramente en la tabla (10.1).

Tabla 10.1

Años	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	0	0	16 000
1	3 375	3 375	12 625
2	3 375	6 750	9 250
3	3 375	10 125	5 875
4	3 375	13 500	2 500

EJEMPLO 10.3.2

Un equipo con costo de $35 000 tiene una vida útil de 6 años, al final de los cuales se calcula que alcanzará un nivel de obsolescencia que obligará a cambiarlo por un modelo nuevo. Su valor de salvamento será de $1 000 y se prevé que deberá realizarse una inversión de $2 000 para desmontarlo y deshacerse de él.

a) Determinar el cargo anual por depreciación.
b) Elaborar una tabla de depreciación.

Solución:
Aplicando nuevamente la fórmula (10.1) se obtiene:

$$D = \frac{B}{n} = \frac{C - S}{n}$$

$$D = \frac{35\,000 - (-1\,000)}{6}$$

$$D = \frac{36\,000}{6}$$

$$D = 6\,000$$

En este caso, el valor de salvamento es negativo, pues si bien se recuperan $1 000 por la venta del equipo, debe realizarse una erogación de $2 000 para desmontarlo y deshacerse de él.

Así, su valor neto de salvamento es de –$1 000, lo cual puede observarse en la tabla 10.2.

Tabla 10.2

Años	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	0	0	35 000
1	6 000	6 000	29 000
2	6 000	12 000	23 000
3	6 000	18 000	17 000
4	6 000	24 000	11 000
5	6 000	30 000	5 000
6	6 000	36 000	(1 000)

Ventajas:

1. Es de fácil aplicación.

Desventajas:

1. No toma en cuenta los intereses que genera el fondo de reserva.
2. Los activos fijos tienden a depreciarse en una mayor proporción en los primeros años que en los últimos. (Esto compensa el hecho de que en los primeros años los gastos de mantenimiento y reparación son menores, en tanto que aumentan con el transcurso de los años; de esta forma se logra distribuir los costos de inversión y operación en el tiempo.)

10.4 Método de porcentaje fijo

Este método tiene en consideración el hecho de que la depreciación es mayor en los primeros años de uso y menor en los últimos. Para reflejarlo se carga un porcentaje fijo del valor en libros del activo a los resultados de la empresa. Dicho valor en libros disminuye cada año y, por lo tanto, la depreciación disminuye también consecuentemente. La depreciación anual estará dada por la fórmula:

$$D_k = V_{k-1}d \qquad \textbf{(10.4)}$$

El valor en libros al final del primer año estará dado por:

$$V_1 = V_0 - V_0 d = C - Cd = C(1-d)$$

Donde V es el valor en libros y d la tasa de depreciación anual fijada. En el segundo año, el valor en libros estará dado por:

$$V_2 = V_1 - V_1 d = V_1(1-d) = C(1-d)(1-d)$$

y en el tercero será:

$$V_3 = V_2 - V_2 d = V_2(1-d) = C(1-d)(1-d)(1-d)$$

Por lo tanto, se está en presencia de una progresión geométrica cuyo término común es $(1 - d)$.

El valor en libros al final de cada año puede determinarse utilizando la fórmula:

$$V_k = C(1-d)^k \qquad \textbf{(10.5)}$$

En el último año, el valor de salvamento será igual al valor en libros:

$$S = C(1-d)^n = V_n \qquad \textbf{(10.6)}$$

Dados C, S y n, se puede determinar la tasa de depreciación utilizando la fórmula (10.6).

Este método sólo puede aplicarse si el valor de salvamento es positivo; de lo contrario, la fórmula (10.6) carecería de sentido. En caso de que el valor de desecho calculado fuese 0, puede sustituirse por 1 para poder aplicar dicha fórmula.

EJEMPLO 10.4.1

Una compañía compra una camioneta para el reparto de su mercancía en \$75 000. Calcula que su vida útil será de 5 años y que al final de ella su valor de desecho será de \$10 000.

a) Determinar la tasa de depreciación d que debe aplicarse.
b) Elaborar la tabla de depreciación correspondiente.

Solución:

En este caso se conoce el valor de desecho y el número de años de vida útil. Se aplica la fórmula (10.6) y se despeja d:

$$S = C(1-d)^n$$

$$10\,000 = 75\,000(1-d)^5$$

$$\frac{10\,000}{75\,000} = (1-d)^5$$

$$0.13333333 = (1-d)^5$$

$$(0.13333333)^{1/5} = 1-d$$

$$0.66832506 = 1-d$$

$$d = 1 - 0.668325$$

$$d = 0.33167494$$

$$d = 33.1675\%$$

Este porcentaje se aplica para calcular la tabla 10.3 de depreciación correspondiente; si existe diferencia, debida al redondeo de las cifras, se debe ajustar en el último cargo por depreciación.

Tabla 10.3

Años	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros	Tasa de depreciación
0	—	—	75 000.00	0.331675
1	24 875.63	24 875.63	50 124.38	0.331675
2	16 625.00	41 500.63	33 499.37	0.331675
3	11 110.90	52 611.53	22 388.47	0.331675
4	7 425.70	60 037.23	14 962.77	0.331675
5	4 962.78	65 000.00*	10 000.00	0.331675

* La diferencia de 0.01 se debe a redondeo.

EJEMPLO 10.4.2

Se adquiere un equipo de troquelado con valor de $28 750 y se calcula que su tasa de depreciación es de 30%. Su esperanza de vida es de 7 años.

a) Elaborar una tabla de depreciación de los primeros 4 años.
b) Encontrar el valor en libros al final del quinto año.
c) Determinar el cargo de depreciación del sexto año.
d) Determinar el valor teórico de desecho.

Tabla 10.4

Años	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	0	0	28 750.00
1	8 625.00	8 625.00	20 125.00
2	6 037.50	14 662.50	14 087.50
3	4 226.25	18 888.75	9 861.25
4	2 958.38	21 847.13	6 902.87

SOLUCIÓN:

a) Utilizando la fórmula (10.4)

$$D_k = V_{k-1}d$$

se determinan los valores de la tabla 10.4.

b) Mediante el empleo de la fórmula (10.5) se determina el valor en libros al final del quinto año:

$$V_k = C(1-d)^k$$
$$V_5 = 28\,750(1-0.30)^5$$
$$V_5 = 28\,750(0.16807)$$
$$V_5 = 4\,832.01$$

c) El cargo por depreciación del sexto año se obtiene utilizando la formula (10.1):

$$D_k = V_{k-1}d$$
$$D_6 = V_5 d$$
$$D_6 = 4\,832.01(0.30)$$
$$D_6 = 1\,449.60$$

d) El valor teórico de desecho se calcula utilizando la formula (10.6):

$$S = C(1-d)^n$$
$$S = 28\,750(1-0.30)^7$$

$$S = 28\,750(0.08235430)$$
$$S = 2\,367.69$$

EJEMPLO 10.4.3

El costo de un equipo de precisión es de \$10 000. Se espera que su vida útil sea de 3 años y que su valor de desecho sea igual a 0.

a) Determinar el porcentaje de depreciación que debe aplicarse.
b) Elaborar una tabla de depreciación.

Solución:

a) Para determinar el porcentaje de depreciación se aplica la fórmula (10.6) y se despeja *d*, pues, como en el ejemplo 10.4.1, se conoce el valor de desecho y el número de años de vida útil:

$$S = C(1-d)^n$$
$$0 = 10\,000(1-d)^3$$

Sin embargo, como ya se mencionó antes, esta fórmula carece de significado si el valor de desecho es igual a 0, pues su resultado sería indeterminado. Por lo tanto, se sustituye el 0 por el 1 y se aplica nuevamente la fórmula:

$$10\,000(1-d)^3 = 1$$
$$(1-d)^3 = 1/10\,000$$
$$(1-d)^3 = 0.0001$$
$$(1-d) = 0.0001^{1/3}$$
$$1-d = 0.0464159$$
$$-d = -1 + 0.0464159$$
$$d = 0.9535841$$

El efecto de una tasa de depreciación como ésta se refleja en la tabla 10.5.

Tabla 10.5

Años	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	0	0	10 000.00
1	9 535.84	9 535.84	464.16
2	442.61	9 978.45	21.55
3	20.55	9 999.00	1.00

En este caso, prácticamente el total de la depreciación es cargado al primer año y puede no ser conveniente la utilización de este método.

EJEMPLO 10.4.4

Resolver el ejemplo 10.3.1 utilizando el método de porcentaje fijo. Se sabe que el costo del equipo es de \$16 000, su vida útil de 4 años y su valor de desecho \$2 500.

a) Determinar los cargos anuales por depreciación.
b) Elaborar una tabla de depreciación.

Solución:

En primer lugar debe determinarse el porcentaje de depreciación anual. Utilizando la fórmula (10.6) se tiene:

$$S = C(1-d)^n$$
$$2\,500 = 16\,000(1-d)^4$$
$$\frac{2\,500}{16\,000} = (1-d)^4$$
$$0.15625 = (1-d)^4$$
$$(0.15625)^{1/4} = 1-d$$
$$0.62871671 = 1-d$$
$$d = 1-0.62871671$$
$$d = 0.37128329$$
$$d = 37.13\%$$

Conocida la tasa de depreciación se aplica en la fórmula (10.4): $D_k = V_{k-1}d$ y se elabora la tabla de depreciación.

Tabla 10.6

Años	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	0	0	16 000.00
1	5 940.80	5 940.80	10 059.20
2	3 734.98	9 675.78	6 324.22
3	2 348.18	12 023.96	3 976.04
4	1 476.04	13 500.00	2 500.00

La diferencia resultante por el redondeo se ajustó en el último cargo. Como puede observarse, los cargos son más elevados en los primeros años y después se ajustan a la baja.

Ventajas:

1. Es un método relativamente fácil de aplicar.
2. Asigna un mayor cargo por depreciación a los primeros años, que es cuando los bienes efectivamente pierden más valor.

Desventajas:

1. Como el método de línea recta, no tiene en cuenta los intereses que genera el fondo de reserva.

Ejercicios de las secciones 10.1 a 10.4

1. Una asociación estudiantil decide adquirir un equipo de video para realizar tareas de capacitación. Su costo es de \$25 000 y se calcula que dará servicio durante 5 años, al cabo de los cuales esperan cambiarlo por uno más moderno. Su valor de desecho es de aproximadamente \$500.
   a) Determine la depreciación anual por el método de línea recta.
   b) Elabore la tabla de depreciación.
2. Una constructora instala una planta mezcladora para cubrir las necesidades de una obra de gran importancia. Su costo total es de \$350 000 y se espera que dé servicio durante los 3 años. Al terminar se requerirá realizar una erogación de \$25 000 para desmontarla, y las piezas que se rescaten podrán ser vendidas en \$10 000.
   a) ¿Cuál es el valor neto de salvamento?
   b) Determine la depreciación anual por el método de línea recta.
   c) Elabore la tabla de depreciación.

3. Un departamento de policía adquiere patrullas nuevas con valor de $250 000 cada una. Estima que su vida útil será de 5 años, al cabo de los cuales su valor de desecho será 0.
   a) Determine la depreciación anual por el método de porcentaje fijo.
   b) Elabore la tabla de depreciación.
4. Resuelva el problema anterior utilizando el método de línea recta.
5. Una compañía de aviación adquiere un simulador de vuelo en 350 000 dólares. Decide depreciarlo por el método de porcentaje fijo aplicando 20% anual.
   a) ¿Cuál será el valor en libros al cabo de 5 años?
   b) Elabore la tabla de depreciación.
6. ¿A qué tasa debería depreciar su simulador la compañía de aviación si calcula que la vida útil del mismo será de 7 años y que su valor de salvamento será de 50 000 dólares?
7. ¿Cuál sería el valor en libros al cabo de 5 años si aplicara el método de línea recta y una tasa de depreciación de 20% anual?
8. Un agricultor compra un tractor con valor de $280 000. Calcula que su vida útil será de 5 años, al cabo de los cuales su valor de desecho será 0. Si aplica el método de depreciación por porcentaje fijo, ¿qué tasa debe aplicar?
9. El agricultor decide vender el tractor al cabo de 3 años al valor que tiene registrado en libros. ¿En qué precio debe ofrecerlo?
10. ¿En cuánto tiempo un equipo de cómputo que tuvo un costo de adquisición de $8 000 tendrá un valor en libros de $1 000 si se utiliza el método de depreciación por porcentaje fijo y se aplica una tasa anual de 50%?
11. ¿En qué precio debe vender su tractor el agricultor del ejercicio 8 si aplica el método de línea recta y decide venderlo al valor en libros al final del tercer año?
12. Grafique y comente los resultados de los ejercicios 9 y 11.

10.5 Método de suma de dígitos

El método de suma de dígitos, al igual que el del porcentaje fijo, es un método acelerado de depreciación que asigna un cargo mayor a los primeros años de servicio y lo disminuye con el transcurso del tiempo. Para determinar el cargo anual se multiplica la base de depreciación del activo por una fracción que se obtiene de la siguiente manera:

1. Se suman los dígitos (suma de dígitos) de 1 a n de los años de vida esperada del activo. *Ejemplo*: Si un activo tiene una vida esperada de 4 años, se suman los dígitos enteros correspondientes a los años de servicio esperados: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Esta cifra también puede determinarse utilizando la siguiente fórmula:

$$s = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textbf{(10.7)}$$

   Ejemplo: En el caso anterior se tiene:

$$s = \frac{4(4+1)}{2}$$

$$s = \frac{4(5)}{2}$$

$$s = 10$$

   La cifra que así se obtenga será el denominador de la fracción a depreciar.

2. Los dígitos correspondientes a los años de vida útil del activo se ordenan inversamente al tiempo y así, inversamente, se asignan a cada uno de los años de vida útil. Éstos serán los numeradores de la fracción.

Ejemplo: En el caso del activo con vida de 4 años se tiene:

Año	1	2	3	4
Años en orden invertido	4	3	2	1
Suma de dígitos s	10	10	10	10
Fracción que se depreciará	4/10	3/10	2/10	1/10

3. La fracción que así se obtenga se multiplica por la base de depreciación del activo $(C-S)$ y se obtiene el cargo anual. En consecuencia, se tiene que:

$$D_1=\frac{n}{s}(C-S) \qquad D_2=\frac{n-1}{s}(C-S)\ldots \qquad D_n=\frac{1}{s}(C-S)$$

y generalizando:

$$D_k=\frac{n-k+1}{s}(C-S) \tag{10.8}$$

La depreciación acumulada (A_k) se obtiene multiplicando la base de depreciación $(C-S)$ por la suma de las fracciones acumuladas hasta ese año.

EJEMPLO 10.5.1

Se compra mobiliario de oficina con valor de \$8 975. Se espera que su vida útil sea de 5 años y que tenga un valor de desecho de \$2 000.

a) Elaborar la tabla de depreciación usando el método de suma de dígitos.

SOLUCIÓN:

1. Se determina la base de depreciación:

$B=C-S$
$B=8\,975-2\,000$
$B=6\,975$

2. Se calcula el denominador de la fracción (suma de dígitos):

$$n=5 \qquad s=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$s=\frac{5(6)}{2}$$
$$s=15$$

3. Se determinan los numeradores de las fracciones:

Año	1	2	3	4	5
Numerador	5	4	3	2	1
Fracción	5/15	4/15	3/15	2/15	1/15

Cabe destacar que 5/15 + 4/15 + 3/15 + 2/15 + 1/15 = 15/15.

4. Se multiplica cada fracción por la base de depreciación para determinar el cargo de cada año. La tabla de depreciación correspondiente es la 10.7.

Tabla 10.7

Año	Fracción	Base de depreciación	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0		0	0	0	8 975
1	5/15	6 975	2 325	2 325	6 650
2	4/15	6 975	1 860	4 185	4 790
3	3/15	6 975	1 395	5 580	3 395
4	2/15	6 975	930	6 510	2 465
5	1/15	6 975	465	6 975	2 000

Este procedimiento puede simplificarse con la utilización de las fórmulas (10.7) y (10.8), como se verá en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10.5.2

Resolver el ejemplo 10.3.1 utilizando el método de suma de dígitos. El costo del equipo es de \$16 000, su vida útil de 4 años y su valor de desecho, de \$2 500.

a) Determinar los cargos anuales por depreciación.

b) Elaborar una tabla de depreciación.

Solución:

La base de depreciación se calcula mediante:

$$B = C - S$$
$$B = 16\,000 - 2\,500$$
$$B = 13\,500$$

La suma de dígitos se obtiene de la siguiente manera:

$$s = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$s = \frac{4(5)}{2}$$
$$s = 10$$

Los cargos anuales por depreciación se obtienen por medio de la siguiente fórmula:

$$D_k = \frac{n-k+1}{s}(C-S)$$
$$D_1 = \frac{4}{10}(13\,500) = 5\,400$$
$$D_2 = \frac{3}{10}(13\,500) = 4\,050$$
$$D_3 = \frac{2}{10}(13\,500) = 2\,700$$
$$D_4 = \frac{1}{10}(13\,500) = 1\,350$$

$$5\,400 + 4\,050 + 2\,700 + 1\,350 = 13\,500 = C - S$$

Con estos elementos se construye la siguiente tabla:

Tabla 10.8

Años	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	0	0	16 000
1	5 400	5 400	10 600
2	4 050	9 450	6 550
3	2 700	12 150	3 850
4	1 350	13 500	2 500

EJEMPLO 10.5.3

Se construye un edificio para albergar las oficinas de una empresa. El costo del terreno fue de \$250 000 y el costo de la construcción de \$600 000. La vida útil del inmueble se calcula en 20 años, y su valor de desecho en \$100 000.

a) ¿Cuál es el valor en libros al cabo de 5 años si se aplica el método de suma de dígitos?

Solución:

En primer lugar se calcula la base de depreciación:

$$B = C - S$$
$$B = 600 - 100$$
$$B = 500$$

Observe que se consideró únicamente el valor de la construcción, pues los terrenos, como antes se mencionó, no se deprecian.

El denominador de la fracción se calcula utilizando la fórmula (10.7):

$$s = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$s = \frac{20(21)}{2}$$
$$s = 210$$

La depreciación acumulada se obtiene por la suma de fracciones de los 5 primeros años multiplicada por la base de depreciación:

$$A_5 = \frac{20+19+18+17+16}{210}(500)$$
$$A_5 = \frac{90}{210}(500)$$
$$A_5 = 214.2857143$$

El valor en libros será el resultante de restar al costo original la depreciación acumulada:

$$V_k = C - A_k$$
$$V_5 = 600 - 214.2857143$$
$$V_5 = 385.7142857$$

Así, el valor en libros del edificio al cabo de 5 años será de \$385 714.29. El valor total en libros del inmueble sería de \$635 714.29 (\$250 000 del terreno más \$385 714.29 del edificio).

Ventajas:

1. Este método asigna un cargo mayor de depreciación a los primeros años de uso del activo.

Desventajas:

1. No toma en cuenta los intereses que genera el fondo de reserva.

Ejercicios de la sección 10.5

13. Una cooperativa pesquera ha resuelto adquirir un barco para la captura de atún. Su costo es de \$15.7 millones y su valor de desecho, al cabo de 25 años de vida útil esperada, será de \$1.5 millones. Aplicando el método de suma de dígitos:

a) ¿Cuál será su valor en libros al cabo de 5 años?
b) ¿Cuál será su valor en libros al cabo de 10 años?

14. Un restaurante ha adquirido equipo para la cocina con valor de \$12 350. Su vida útil esperada es de 4 años y su valor de desecho igual a 0.

a) Elabore una tabla de depreciación utilizando el método de suma de dígitos.
b) Compare los resultados utilizando los métodos de línea recta y de porcentaje fijo.

15. Un hospital ha comprado equipo para análisis de laboratorio con valor de $85 550, cuya vida esperada es de 15 años y su valor de desecho será igual a 0.

a) Elabore una tabla de depreciación para los primeros 5 años, utilizando el método de la suma de dígitos.
b) Determine el valor en libros al cabo de 10 años.

16. Un centro deportivo instaló un nuevo baño sauna. Su costo fue de $145 300. Se calcula que tendrá una vida útil de 10 años al cabo de los cuales será necesario reponerlo, para lo cual habrá que realizar una erogación adicional de $12 000, independientemente del costo del nuevo equipo.

a) ¿Cuál es la base de depreciación?
b) Determine el valor en libros al cabo de 3 años utilizando el método de la suma de dígitos.
c) ¿Cuál será la depreciación acumulada al cabo de 7 años?

10.6 Método por unidad de producción o servicio

Al adquirir un activo se espera que dé servicio durante un determinado periodo (años, días, horas), o bien, que produzca una cantidad determinada de kilos, toneladas, unidades, kilómetros, etc. Si se conoce la vida esperada del bien en función de estos parámetros, puede depreciarse de acuerdo con las unidades de producción o servicio que genera durante un periodo determinado.

EJEMPLO 10.6.1

Una compañía arrendadora de autos adquiere un automóvil para su flotilla, con un costo de $304 000. La empresa calcula que la vida útil del automóvil para efectos de arrendamiento es de 60 000 km y que, al cabo de ellos, el valor de desecho de la unidad será de $124 000. El kilometraje recorrido por la unidad durante los 3 primeros años fue:

Año	Kilómetros
1	24 000
2	22 000
3	14 000

a) Determar el monto de depreciación por kilómetro recorrido.
b) Elaborar la tabla de depreciación correspondiente.

SOLUCIÓN:
En primer lugar se determina la base de depreciación:

$$B = C - S$$
$$B = 304\,000 - 124\,000$$
$$B = 180\,000$$

Esta base de depreciación se distribuye entre los kilómetros "útiles" para efectos de arrendamiento con el fin de encontrar la depreciación por kilómetro.

$$\text{d/km} = \frac{180\,000}{60\,000}$$
$$\text{d/km} = \$3.00$$

La depreciación por kilómetro es de $3.00. Conociendo este dato, la tabla 10.9 muestra la depreciación correspondiente.

Tabla 10.9

Año	Kilómetros recorridos	Depreciación anual ($)	Depreciación acumulada ($)	Valor en libros ($)
0	0	0	0	304 000
1	24 000	72 000	72 000	232 000
2	22 000	66 000	138 000	166 000
3	14 000	42 000	180 000	124 000

EJEMPLO 10.6.2

Una máquina fotocopiadora tiene una vida esperada de 600 000 copias. Su costo de adquisición es de $26 000 y su valor de salvamento es de $2 000. El número de copias que se sacaron durante 4 años de operación fue el siguiente:

Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
180 000	200 000	140 000	80 000

a) Determinar la depreciación por copia.
b) Elaborar la tabla de depreciación correspondiente.

Solución:
Se determina la base de depreciación:

$$B = C - S$$
$$B = 26\,000 - 2\,000$$
$$B = 24\,000$$

Se divide la base de depreciación entre el número de unidades de producción esperadas:

$$\frac{24}{600} = 0.04$$

El monto de depreciación por fotocopia procesada es de $0.04.
Con estos datos se elabora la tabla 10.10 de depreciación correspondiente:

Tabla 10.10

Año	Fotocopias	Depreciación anual ($)	Depreciación acumulada ($)	Valor en libros ($)
0	0	0	0	26 000
1	180 000	7 200	7 200	18 800
2	200 000	8 000	15 200	10 800
3	140 000	5 600	20 800	5 200
4	80 000	3 200	24 000	2 000

EJEMPLO 10.6.3

Resolver el ejemplo 10.3.1 utilizando el método de unidades de servicio. Considerar que el equipo prestó servicio durante 3 500 horas el primer año, 4 500 el segundo, 4 000 el tercero y 3 000 el cuarto. El costo de adquisición fue de $16 000 y el valor de desecho es de $2 500. La vida útil esperada es de 4 años.

a) Determinar los cargos anuales por depreciación.
b) Elaborar la tabla de depreciación correspondiente.

Solución:

Se determina la base de depreciación:

$$B = C - S$$
$$B = 16\,000 - 2\,500$$
$$B = 13\,500$$

El total de horas de vida útil se obtiene así:

$$3\,500 + 4\,500 + 4\,000 + 3\,000 = 15\,000$$

La depreciación por hora de trabajo se determina dividiendo la base de depreciación entre las horas de vida útil:

$$\frac{13\,500}{15\,000} = 0.90$$

Los cargos anuales por depreciación pueden verse en la tabla 10.11.

Tabla 10.11

Año	Horas de trabajo	Depreciación anual ($)	Depreciación acumulada ($)	Valor en libros ($)
0	0	0	0	16 000
1	3 500	3 150	3 150	12 850
2	4 500	4 050	7 200	8 800
3	4 000	3 600	10 800	5 200
4	3 000	2 700	13 500	2 500

Ventajas:

1. Es de fácil aplicación.
2. Asigna la depreciación en relación directa con las unidades de producción o servicio que efectivamente se generan durante el periodo de referencia.

Desventajas:

1. Se requiere experiencia previa para determinar la producción durante la vida útil del activo.
2. No considera los intereses ganados por el fondo de reserva.

Ejercicios de la sección 10.6

17. Una universidad adquiere una computadora para dar servicio a sus estudiantes. Su costo es de $15 385 y se calcula que tendrá una vida útil de 5 000 horas, al cabo de las cuales su valor de desecho será 0.

a) Elabore una tabla de depreciación considerando que se utilicen 1800 horas el primer año, 1 700 el segundo y 1 500 el tercero.

b) Determine su valor en libros al cabo de 2 años.

18. Un hospital adquiere un equipo de rayos X para dar mejor servicio a sus pacientes. Su vida esperada es de 10 000 horas y su costo fue de $192 500. Se calcula que el uso que se le dé durante los próximos 5 años se comportará de acuerdo con la siguiente tabla:

Año	Horas
1	1500
2	2 000
3	2 800
4	2 300
5	1 400
	10 000

c) Utilizando el método de depreciación por unidad de servicio elabore la tabla de depreciación considerando que el valor de desecho será de \$10 000.

19. Una empresa adquiere un dado para la inyección de plástico que tiene una vida estimada de 150 000 piezas. Su costo es de \$27 250 y su valor de desecho es de 0. La tabla que muestra la producción estimada es la siguiente:

Año	Unidades
1	25 000
2	35 000
3	45 000
4	45 000
	150 000

b) Elabore una tabla de depreciación utilizando el método de depreciación por unidad de producción.

10.7 Método del fondo de amortización

Este método toma en consideración los intereses que gana el fondo de reserva que se va constituyendo; por lo tanto, el incremento anual del fondo estará dado por la suma del cargo anual por depreciación más los intereses ganados en el periodo de referencia.

La aportación anual al fondo de amortización se deriva de la fórmula (4.1) que se utiliza para determinar el monto de una anualidad:

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Para determinar el pago periódico se despeja R:

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1}$$

En este caso $M = B$, pues es el monto que se debe acumular al cabo de n años, a una tasa de interés i y $R = D$, el cargo anual que debe realizarse al fondo.

Por lo tanto,

$$D_k = B\frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{Bi}{(1+i)^n - 1} = \frac{Bi}{(1+i)^k - 1} \qquad \textbf{(10.9)}$$

Para determinar la depreciación acumulada A_k calcula el monto de un pago periódico D a un plazo k y a una tasa de interés i por periodo:

$$A_k = D\frac{(1+i)^k - 1}{i} \qquad \textbf{(10.10)}$$

Donde: $A_k = D\dfrac{(1+i)^k - 1}{i}$ $\qquad M = R\dfrac{(1+1)^n - 1}{i}$ $\qquad$ **(10.11)**

El monto acumulado al cabo de n años debe ser igual, como ya se señaló, a la base de depreciación del activo.

EJEMPLO 10.7.1

Se adquiere mobiliario nuevo para un hotel. Su costo de adquisición es de $40 000 y se calcula que tendrá una vida útil de 5 años, al cabo de los cuales su valor de desecho será de 0. El interés vigente es de 35% anual.

a) Determinar el cargo anual por depreciación utilizando el método del fondo de amortización.
b) Elaborar la tabla de depreciación correspondiente.

Solución:
En primer lugar se calcula la base de depreciación:

$$B = C - S$$
$$B = 40\,000 - 0$$
$$B = 40\,000$$

Acto seguido, mediante la fórmula (10.9), se determina el cargo anual por depreciación:

$$D = B\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$
$$D = 40\,000\frac{0.35}{(1+0.35)^5 - 1}$$
$$D = 40\,000\frac{0.35}{4.48403344 - 1}$$
$$D = 40\,000\frac{0.35}{3.48403344}$$
$$D = 40\,000(0.10045828)$$
$$D = 4\,018.33$$

La aportación que se debe hacer anualmente al fondo de amortización es de $4 018.33.

La tabla 10.12 de depreciación que se elabora es equivalente a la tabla de un fondo de amortización, pero con la adición de una columna para anotar el valor en libros.

Tabla 10.12

Años	Depósito anual	Intereses ganados	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	0	0	0	0	40 000.00
1	4 018.33	0	4 018.33	4 018.33	35 981.67
2	4 018.33	1 406.42	5 424.75	9 443.08	30 556.92
3	4 018.33	3 305.08	7 323.41	16 766.48	23 233.52
4	4 018.33	5 868.27	9 886.60	26 653.08	13 346.92
5	4 018.33	9 328.58	13 346.91	39 999.99	0.01
Total	20 091.65	19 908.34	39 999.99		

* Las pequeñas diferencias se deben a redondeo.

Como puede observarse, en épocas de inflación y altas tasas de interés, el monto de las aportaciones que realiza la empresa es relativamente pequeño, pues el grueso de la depreciación está dado por los intereses que gana el fondo. Esta situación se invierte si los intereses que gana el fondo son bajos.

EJEMPLO 10.7.2

Resolver el problema anterior considerando una tasa de interés de 10%.

Solución:

La base de depreciación es de \$40 000 y, a partir de ella, se calcula D:

$$D = B\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$D = 40\,000\frac{0.10}{(1+0.10)^5 - 1}$$

$$D = 40\,000\frac{0.10}{1.61051 - 1}$$

$$D = 40\,000\frac{0.10}{0.61051}$$

$$D = 40\,000(0.16379748)$$

$$D = 6\,551.90$$

Se elabora la tabla 10.13 de depreciación:

Tabla 10.13

Periodo	Depósito por periodo	Intereses ganados	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0					40 000.00
1	6 551.90	—	6 551.90	6 551.90	33 448.10
2	6 551.90	655.19	7 207.09	13 758.99	26 241.01
3	6 551.90	1 375.90	7 927.80	21 686.79	18 313.21
4	6 551.90	2 168.68	8 720.58	30 407.37	9 592.64
5	6 551.90	3 040.74	9 592.64	40 000.01*	(0.00)*
Total	32 759.50	7 240.51	40 000.00	—	

* Las pequeñas diferencias se deben a redondeo.

El efecto financiero de los intereses ganados por el fondo de reserva puede ser, si las tasas de interés son elevadas, muy importante, y por ello es conveniente tomarlo en cuenta; sin embargo, cuando las tasas de interés del mercado son bajas, el monto de los intereses ganados resulta poco importante y se requieren depósitos de mayor valor.

EJEMPLO 10.7.3

Una sociedad cooperativa adquiere un barco para la pesca del camarón, con valor de \$5 000 000. Calculan que su vida útil será de 20 años, al cabo de los cuales su valor de desecho será igual a 10% de su costo. Deciden depreciarlo utilizando el método del fondo de amortización y considerar una tasa promedio de interés de 30%.

a) Determinar el cargo anual por depreciación.
b) ¿Cuál es la depreciación acumulada y el valor en libros al cabo de 10 años?
c) ¿Al cabo de 15 años?

Solución:

a) Se determina la base de depreciación:

$$B = C - S$$
$$B = 5\,000\,000 - 500\,000$$
$$B = 4\,500\,000$$

Utilizando la fórmula (10.9) se calcula el cargo anual por depreciación:

$$D = B\frac{i}{(1+i)^{20} - 1}$$

$$D = 4\,500\,000\frac{0.30}{(1.30)^{20}-1}$$
$$D = 4\,500\,000\frac{0.30}{(190.049638)-1}$$
$$D = 4\,500\,000\frac{0.30}{189.049638}$$
$$D = 4\ 500\ 000(0.00158688)$$
$$D = 7\ 140.98$$

El cargo anual por depreciación es de $7140.98.

b) La depreciación acumulada al cabo de 10 años se obtiene utilizando la fórmula (10.10):

$$A_k = D\frac{(1+i)^k-1}{i}$$
$$A_k = 7\,140.98\frac{(1+0.30)^{10}-1}{0.30}$$
$$A_k = 7\,140.98\frac{(13.78584918)-1}{0.30}$$
$$A_k = 7\,140.98\frac{12.78584918}{0.30}$$
$$A_k = 7\ 140.98(42.61949728)$$
$$A_k = \$304\ 344.98$$

El valor en libros se obtiene restando la depreciación acumulada del costo original:

$$V_k = C - A_k$$
$$V_{10} = 5\ 000\ 000 - 304\ 344.98$$
$$V_{10} = 4\ 695\ 655.02$$

c) Al cabo de 15 años se tendrá:

$$A_k = D\frac{(1+i)^k-1}{i}$$
$$A_k = 7\,140.98\frac{(1+0.30)^{15}-1}{0.30}$$
$$A_k = 7\,140.98\frac{51.18589301-1}{0.30}$$
$$A_k = 7\ 140.98(167.28631)$$
$$A_k = 1\ 194\ 588.19$$

El valor en libros será:

$$V_k = C - A_k$$
$$V_{15} = 5\,000\,000 - 1\,194\,588.19$$
$$V_{15} = 3\,805\,411.81$$

Como puede notarse, el fondo se incrementa aceleradamente en los últimos años debido al crecimiento significativo que tienen los intereses que se acumulan.

EJEMPLO 10.7.4

Resolver el problema 10.3.1 utilizando el método del fondo de amortización, considerando que el fondo gana un interés de 10%. El costo de adquisición es de $16 000, y el valor de desecho, de $2 500 al cabo de 4 años.

SOLUCIÓN:

Se tiene una base de depreciación de $13 500, ya que:

$$B = C - S$$
$$B = 16\,000 - 2\,500$$
$$B = 13\,500$$

Aplicando la fórmula (10.9) se tiene que:

$$D = B\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$
$$D = 13\,500\frac{0.10}{(1+0.10)^4 - 1}$$
$$D = 13\,500\frac{0.10}{(1.4641) - 1}$$
$$D = 13\,500(0.215471)$$
$$D = 2\,908.86$$

La aportación anual al fondo de amortización es de $2 908.86. La tabla de depreciación queda como sigue:

Tabla 10.14

Periodo	Depósito por periodo	Intereses ganados	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0					16 000.00
1	2 908.86	—	2 908.86	2 908.86	13 091.14
2	2 908.86	290.89	3 199.74	6 108.60	9 891.40
3	2 908.86	610.86	3 519.72	9 628.32	6 371.69
4	2 908.86	962.83	3 871.69	13 500.01*	2 500.00
Total	11 635.44	1 864.58	13 500.00		

* Las diferencias se deben al redondeo.

Ejercicios de la sección 10.7

20. Una oficina gubernamental adquiere equipo con valor de $428 280, para medir la contaminación ambiental. Su vida útil esperada es de 5 años, y su valor de desecho de 0.

a) Elabore una tabla de depreciación por el método del fondo de amortización, considerando que la tasa de interés es de 6% anual.

21. Un ayuntamiento adquiere un camión recolector de basura para el servicio de la ciudad. Su costo es de $382 850 y su vida útil esperada es de 7 años, al cabo de los cuales tendrá un valor de desecho de 0.

a) Determine el cargo anual por depreciación utilizando el método del fondo de amortización, si la tasa de interés vigente es de 14%.

b) ¿Cuál será su valor en libros al cabo de 5 años?

c) ¿Cuál será la depreciación acumulada al cabo de 6 años?

22. Una empresa productora de papel adquiere maquinaria con valor de $780 000. Decide depreciarla utilizando el método del fondo de amortización considerando que su vida útil será de 15 años, y su valor de desecho, de $150 000.

a) Determine las aportaciones que debe hacer el fondo si los intereses son de 5%.

b) Si son de 10%.

c) Si son de 20%.

d) ¿Cuál es el monto de las aportaciones de la empresa y cuál el de los intereses generados por el fondo en cada uno de los 3 casos anteriores?

23. Una lavandería adquiere equipo nuevo con valor de \$18 000, cuya vida útil es de 10 años y su valor de desecho de \$1 000.

a) Considerando una tasa de interés de 9.5%, determine la aportación anual al fondo de amortización.
b) Calcule la depreciación acumulada y el valor en libros al cabo de 4 años.
c) Si se decidiera vender el equipo de acuerdo con su valor en libros al cabo de 6 años, ¿cuánto debería pedir por él?

24. Un aeropuerto adquiere equipo con valor de 450 000 dólares para iluminación de pistas. La vida esperada del mismo es de 5 años, y su valor de desecho de 0. Si la empresa desea constituir un fondo de amortización en dólares:

a) Determine los cargos anuales por depreciación considerando intereses anuales netos de 5%, 10% y 15%.
b) Elabore la tabla del fondo de amortización con el supuesto de un interés de 8%.

10.8 Depreciación en épocas inflacionarias

Al inicio de este capítulo se mencionó que dos son los objetivos de la depreciación:

1. Determinar el costo real de los bienes o servicios que se generan con un activo, y
2. Establecer un fondo de reserva que permita reemplazarlos al final de su vida útil.

En épocas inflacionarias, el rápido incremento de los precios de todos los bienes y servicios impiden que un sistema de depreciación basada en costos históricos cumpla con los objetivos arriba mencionados, pues si la base de depreciación se mantiene sin actualizar, los precios de los bienes no revelarán los costos actuales de producción, ni el fondo que se establezca permitirá reemplazar al bien.

En esta sección se harán algunas consideraciones con respecto a los problemas arriba mencionados y se presentarán alternativas para el tratamiento financiero de la depreciación.

10.8.1 El valor de reposición

Cuando las organizaciones enfrentan situaciones de alta inflación sus encargados de finanzas tienen una gran responsabilidad: hacerlas productivas descontando el efecto de la inflación. Una empresa puede mostrar utilidades en sus estados financieros, pero si el porcentaje de incremento que presenta de un año a otro no compensa la pérdida del poder adquisitivo ocasionada por la inflación, está sufriendo pérdidas en términos reales. Si a ello se aúna el hecho de que tales utilidades aparentes se reparten entre los accionistas, lo que sucederá es que la empresa se descapitalizará y que en pocos años afrontará serios problemas de liquidez que pueden llevarla incluso a la quiebra.

Por lo tanto, un elemento que deberá actualizarse en forma constante es la depreciación para efectos financieros.

Para hacerlo se usa el concepto de *valor de reposición*, esto es, el importe que se necesitará desembolsar en el futuro para reponer un activo que se encuentra en servicio en un momento determinado. Este cálculo resulta complejo, pues influyen varios factores: *a*) la vida útil esperada del activo, *b*) la obsolescencia del activo, *c*) la tasa de inflación esperada.

a) *Vida útil esperada del activo*
Son los años durante los cuales se considera que el activo podrá funcionar rentablemente.

b) *La obsolescencia del activo*
Si bien un activo puede tener una vida útil de 10 años, puede ser que el avance tecnológico haga necesario su cambio con anterioridad, al aparecer equipos que cumplan la misma función con un costo sensiblemente menor.

c) *La tasa de inflación esperada*
Para poder conocer el valor de reposición de un activo es necesario calcular la inflación promedio esperada para los años de vida útil. Este cálculo es cada vez más complejo, pues la variabilidad de las políticas económicas de los países, su interdependencia global cada vez mayor y la presencia de variables ajenas al control de ellas, hace muy difícil predecir el comportamiento de esta variable en el mediano plazo (3 a 5 años) y prácticamente imposible en el largo plazo.

A pesar de estas dificultades es necesario realizar los esfuerzos necesarios para calcular dicho valor de reposición, en el entendido de que se trata de valores esperados que serán ajustados cada vez que se requiera.

Una vez conocidos los datos anteriores, el cálculo del valor de reposición es sencillo.

EJEMPLO 10.8.1

¿Cuál es el valor de reposición de un equipo cuyo costo de adquisición es de $5 000, si su vida útil esperada es de 4 años y se prevé que la inflación anual promedio será de 30%?

SOLUCIÓN:
Se aplica la fórmula del monto a interés compuesto y se obtiene:

$$M = C(1+i)^n$$
$$M = 5\,000(1+0.30)^4$$
$$M = 5\,000(2.8561)$$
$$M = 14\,280.50$$

El valor de reposición esperado en 4 años es de $14 280.50.

EJEMPLO 10.8.2

Si el valor de estos equipos ha disminuido 5% cada año en términos reales como resultado de los avances tecnológicos y de la utilización de nuevos materiales más económicos, ¿cuál sería el valor de reposición esperado?

SOLUCIÓN:
Si se considera que el equipo tuviera valor constante de $5 000, al cabo de un año su precio sería 5% menor; al cabo de dos años, 5% y así sucesivamente.

Esto puede expresarse matemáticamente como sigue (VRC = valor de reposición a precios constantes):

$$VRC = 5\,000(0.95)(0.95)(0.95)(0.95)$$
$$VRC = 5\,000(0.95)^4 = 4\,072.53125$$

Al valor que así se obtiene se le aplica la inflación esperada de 30% durante los próximos 4 años:

$$M = C(1+i)^n$$
$$M = 4\,072.53125(1+0.30)^4$$
$$M = 4\,072.53125(2.8561)$$
$$M = 11\,631.56$$

El mismo resultado puede obtenerse si se disminuye el valor de reposición que se obtuvo en el ejemplo 10.8.1:

$$VR = 14\,280.50(1-0.05)^4$$
$$VR = 14\,280.50(0.95)^4$$
$$VR = 14\,280.50(0.81450625)$$
$$VR = 11\,631.56$$

Una vez determinado el valor de reposición se procede a calcular los cargos anuales por depreciación de acuerdo con los sistemas que ya se explicaron.

El valor de reposición puede calcularse también anualmente, ajustando los costos históricos de acuerdo con los índices de inflación que proporciona el Banco de México, o mediante avalúo realizado por peritos. Una vez determinado dicho valor también se deben ajustar los cargos anuales por depreciación. Estos ajustes y revaluaciones no son admitidos por las autoridades para efectos fiscales, pero a pesar de ello es muy necesario que sean consideradas para efectos financieros, con el fin de prevenir las consecuencias mencionadas.

No es el objetivo desarrollar aquí ampliamente este tema, pero sí se desea destacar la importancia que tiene reflejar en los estados financieros los efectos que produce la inflación, para contar con información veraz para la toma de decisiones.

Ejercicios de la sección 10.8

25. ¿Cuál es el valor de reposición de un equipo que tuvo un costo de $73 800, si tiene una vida esperada de 5 años y la inflación promedio pronosticada es de 15%?
26. ¿Cuál es el valor de reposición de un automóvil cuyo costo es de $185 350, si tiene una duración esperada de 8 años y la inflación promedio esperada es de 10% anual?
27. ¿Cuál será el valor de reposición de un equipo de cómputo que tuvo un costo de $22 000, si tiene una vida esperada de 3 años y debido a los avances tecnológicos su precio ha venido reduciéndose en términos reales 10% anual? La inflación promedio esperada es de 25%.

10.9 Aplicaciones

Las aplicaciones de las depreciaciones son abundantes. El método que se utiliza con mayor frecuencia es el de línea recta, pues, como se mencionó, en el caso mexicano es el único aprobado por las autoridades hacendarias, las cuales establecen los porcentajes máximos de depreciación que los contribuyentes pueden deducir anualmente.

La Ley del Impuesto Sobre la Renta vigente a la fecha de publicación de este libro establece lo siguiente respecto a la depreciación y amortización.

> **Artículo 37.** Las inversiones únicamente se podrán deducir mediante la aplicación, en cada ejercicio, de los por cientos máximos autorizados por esta Ley, sobre el monto original de la inversión, con las limitaciones en deducciones que, en su caso, establezca esta Ley. Tratándose de ejercicios irregulares, la deducción correspondiente se efectuará en el por ciento que represente el número de meses completos del ejercicio en los que el bien haya sido utilizado por el contribuyente, respecto de doce meses…
>
> **Artículo 38.** Para los efectos de esta Ley, se consideran inversiones los activos fijos, los gastos y cargos diferidos y las erogaciones realizadas en periodos preoperativos, cuyo concepto se señala a continuación:
>
> Activo fijo es el conjunto de bienes tangibles que utilicen los contribuyentes para la realización de sus actividades y que se demeriten por el uso en el servicio del contribuyente y por el transcurso del tiempo. La adquisición o fabricación de estos bienes tendrá siempre como finalidad la utilización de los mismos para el desarrollo de las actividades del contribuyente, y no la de ser enajenados dentro del curso normal de sus operaciones.
>
> **(Re)** Gastos diferidos son los activos intangibles representados por bienes o derechos que permitan reducir costos de operación, mejorar la calidad o aceptación de un producto, usar, disfrutar o explotar un bien, por un periodo limitado, inferior a la duración de la actividad de la persona moral. También se consideran gastos diferidos los activos intangibles que permitan la explotación de bienes del dominio público o la prestación de un servicio público concesionado.
>
> Cargos diferidos son aquellos que reúnan los requisitos señalados en el párrafo anterior, excepto los relativos a la explotación de bienes del dominio público o a la prestación de un servicio público concesionado, pero cuyo beneficio sea por un periodo ilimitado que dependerá de la duración de la actividad de la persona moral.
>
> Erogaciones realizadas en periodos preoperativos, son aquellas que tienen por objeto la investigación y el desarrollo, relacionados con el diseño, elaboración, mejoramiento, empaque o distribución de un pro-

ducto, así como con la prestación de un servicio; siempre que las erogaciones se efectúen antes de que el contribuyente enajene sus productos o preste sus servicios, en forma constante. Tratándose de industrias extractivas, estas erogaciones son las relacionadas con la exploración para la localización y cuantificación de nuevos yacimientos susceptibles de explotarse.

Artículo 39. Los por cientos máximos autorizados tratándose de gastos y cargos diferidos, así como para las erogaciones realizadas en periodos preoperativos, son los siguientes:

I. 5% para cargos diferidos.
II. 10% para erogaciones realizadas en periodos preoperativos.
III. 15% para regalías, para asistencia técnica, así como para otros gastos diferidos, a excepción de los señalados en la fracción IV del presente artículo.
IV. En el caso de activos intangibles que permitan la explotación de bienes del dominio público o la prestación de un servicio público concesionado, el por ciento máximo se calculará dividiendo la unidad entre el número de años por los cuales se otorgó la concesión, el cociente así obtenido se multiplicará por cien y el producto se expresará en por ciento.

En el caso de que el beneficio de las inversiones a que se refieren las fracciones II y III de este artículo se concrete en el mismo ejercicio en el que se realizó la erogación, la deducción podrá efectuarse en su totalidad en dicho ejercicio.

Tratándose de contribuyentes que se dediquen a la explotación de yacimientos de mineral, éstos podrán optar por deducir las erogaciones realizadas en periodos preoperativos, en el ejercicio en que las mismas se realicen. Dicha opción deberá ejercerse para todos los gastos preoperativos que correspondan a cada yacimiento en el ejercicio de que se trate.

Artículo 40. Los por cientos máximos autorizados, tratándose de activos fijos por tipo de bien son los siguientes:

I. Tratándose de construcciones:

a) 10% para inmuebles declarados como monumentos arqueológicos, artísticos, históricos o patrimoniales, conforme a la Ley Federal sobre Monumentos y Zonas Arqueológicos, Artísticos e Históricos, que cuenten con el certificado de restauración expedido por el Instituto Nacional de Antropología e Historia o el Instituto Nacional de Bellas Artes.
b) 5% en los demás casos.

II. Tratándose de ferrocarriles:

a) 3% para bombas de suministro de combustible a trenes.
b) 5% para vías férreas.
c) 6% para carros de ferrocarril, locomotoras, armones y autoarmones.
d) 7% para maquinaria niveladora de vías, desclavadoras, esmeriles para vías, gatos de motor para levantar la vía, removedora, insertadora y taladradora de durmientes.
e) 10% para el equipo de comunicación, señalización y telemando.

III. 10% para mobiliario y equipo de oficina.
IV. 6% para embarcaciones.
V. Tratándose de aviones:

a) 25% para los dedicados a la aerofumigación agrícola.
b) 10% para los demás.

VI. 25% para automóviles, autobuses, camiones de carga, tractocamiones y remolques.
VII. 30% para computadoras personales de escritorio y portátiles; servidores; impresoras, lectores ópticos, graficadores, lectores de código de barras, digitalizadores, unidades de almacenamiento externo y concentradores de redes de cómputo.
VIII. 35% para dados, troqueles, moldes, matrices y herramental.
IX. 100% para semovientes, vegetales, máquinas registradoras de comprobación fiscal y equipos electrónicos de registro fiscal.
X. Tratándose de comunicaciones telefónicas:

a) 5% para torres de transmisión y cables, excepto los de fibra óptica.
b) 8% para sistemas de radio, incluyendo equipo de transmisión y manejo que utiliza el espectro radioeléctrico, tales como el de radiotransmisión de microonda digital o analógica, torres de microondas y guías de onda.

c) 10% para equipo utilizado en la transmisión, tales como circuitos de la planta interna que no forman parte de la conmutación y cuyas funciones se enfocan hacia las troncales que llegan a la central telefónica, incluye multiplexores, equipos concentradores y ruteadores.
d) 25% para equipo de la central telefónica destinado a la conmutación de llamadas de tecnología distinta a la electromecánica.
e) 10% para los demás.

XI. Tratándose de comunicaciones satelitales:

a) 8% para el segmento satelital en el espacio, incluyendo el cuerpo principal del satélite, los transpondedores, las antenas para la transmisión y recepción de comunicaciones digitales y análogas, y el equipo de monitoreo en el satélite.
b) 10% para el equipo satelital en tierra, incluyendo las antenas para la transmisión y recepción de comunicaciones digitales y análogas y el equipo para el monitoreo del satélite.

(Ad) XII. 100% para maquinaria y equipo para la generación de energía proveniente de fuentes renovables.

Para los efectos del párrafo anterior, son fuentes renovables aquellas que por su naturaleza o mediante un aprovechamiento adecuado se consideran inagotables, tales como la energía solar en todas sus formas; la energía eólica; la energía hidráulica tanto cinética como potencial, de cualquier cuerpo de agua natural o artificial; la energía de los océanos en sus distintas formas; la energía geotérmica, y la energía proveniente de la biomasa o de los residuos. Asimismo, se considera generación la conversión sucesiva de la energía de las fuentes renovables en otras formas de energía.

Lo dispuesto en esta fracción será aplicable siempre que la maquinaria y equipo se encuentren en operación o funcionamiento durante un periodo mínimo de 5 años inmediatos siguientes al ejercicio en el que se efectúe la deducción, salvo en los casos a que se refiere el artículo 43 de esta Ley. Los contribuyentes que incumplan con el plazo mínimo establecido en este párrafo, deberán cubrir, en su caso, el impuesto correspondiente por la diferencia que resulte entre el monto deducido conforme a esta fracción y el monto que se debió deducir en cada ejercicio en los términos de este artículo o del artículo 41 de esta Ley, de no haberse aplicado la deducción del 100%. Para estos efectos, el contribuyente deberá presentar declaraciones complementarias por cada uno de los ejercicios correspondientes, a más tardar dentro del mes siguiente a aquel en el que se incumpla con el plazo establecido en esta fracción, debiendo cubrir los recargos y la actualización correspondiente, desde la fecha en la que se efectuó la deducción y hasta el último día en el que operó o funcionó la maquinaria y equipo.

(Ad) XIII. 100% para adaptaciones que se realicen a instalaciones que impliquen adiciones o mejoras al activo fijo, siempre que dichas adaptaciones tengan como finalidad facilitar a las personas con capacidades diferentes a que se refiere el artículo 222 de esta Ley, el acceso y uso de las instalaciones del contribuyente.

Artículo 41. Para la maquinaria y equipo distintos de los señalados en el artículo anterior, se aplicarán, de acuerdo a la actividad en que sean utilizados, los por cientos siguientes:

I. 5% en la generación, conducción, transformación y distribución de electricidad; en la molienda de granos; en la producción de azúcar y sus derivados; en la fabricación de aceites comestibles; en el transporte marítimo, fluvial y lacustre.
II. 6% en la producción de metal obtenido en primer proceso; en la fabricación de productos de tabaco y derivados del carbón natural.
III. 7% en la fabricación de pulpa, papel y productos similares; en la extracción y procesamiento de petróleo crudo y gas natural.
IV. 8% en la fabricación de vehículos de motor y sus partes; en la construcción de ferrocarriles y navíos; en la fabricación de productos de metal, de maquinaria y de instrumentos profesionales y científicos; en la elaboración de productos alimenticios y de bebidas, excepto granos, azúcar, aceites comestibles y derivados.
V. 9% en el curtido de piel y la fabricación de artículos de piel; en la elaboración de productos químicos, petroquímicos y farmacobiológicos; en la fabricación de productos de caucho y de plástico; en la impresión y publicación gráfica.
VI. 10% en el transporte eléctrico.
VII. 11% en la fabricación, acabado, teñido y estampado de productos textiles, así como de prendas para el vestido.
VIII. 12% en la industria minera; en la construcción de aeronaves y en el transporte terrestre de carga y pasajeros. Lo dispuesto en esta fracción no será aplicable a la maquinaria y equipo señalada en la fracción II de este artículo.

IX. 16% en el transporte aéreo; en la transmisión de los servicios de comunicación proporcionados por telégrafos y por las estaciones de radio y televisión.
X. 20% en restaurantes.
XI. 25% en la industria de la construcción; en actividades de agricultura, ganadería, silvicultura y pesca.
XII. 35% para los destinados directamente a la investigación de nuevos productos o desarrollo de tecnología en el país.
XIII. 50% en la manufactura, ensamble y transformación de componentes magnéticos para discos duros y tarjetas electrónicas para la industria de la computación.
XIV. 100% en la conversión a consumo de gas natural y para prevenir y controlar la contaminación ambiental en cumplimiento de las disposiciones legales respectivas.
XV. 10% en otras actividades no especificadas en este artículo.

En el caso de que el contribuyente se dedique a dos o más actividades de las señaladas en este artículo, se aplicará el por ciento que le corresponda a la actividad en la que hubiera obtenido más ingresos en el ejercicio inmediato anterior.

EJEMPLO 10.9.1

Determinar, de acuerdo con lo establecido en la Ley del Impuesto Sobre la Renta, el monto máximo de depreciación anual de una computadora que tuvo un costo de $18 000 si su valor de desecho se considera cero; elaborar la tabla de depreciación correspondiente.

Para conocer el monto máximo de depreciación que autoriza la ley, se debe consultar el artículo 40 que establece los porcentajes de depreciación aplicables a los activos fijos que adquiera y utilice una empresa.

VII. 30% para computadoras personales de escritorio y portátiles; servidores; impresoras, lectores ópticos, graficadores, lectores de código de barras, digitalizadores, unidades de almacenamiento externo y concentradores de redes de cómputo.

El monto de la depreciación anual se determina multiplicando el monto original de la inversión (MOI) para adquirir el bien por el por ciento establecido en la ley:

$$D' = MOI * \%$$
$$D' = 18\ 000 * 0.30$$
$$D' = 5\ 400$$

Una vez conocido el monto máximo de depreciación anual, se procede a elaborar la tabla de depreciación correspondiente.

Años	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	0	0	18 000
1	5 400	5 400	12 600
2	5 400	10 800	7 200
3	5 400	16 200	1 800
4	1 800	18 000	0

Dado que al finalizar el tercer año se ha depreciado ya 90% del valor del equipo, en el cuarto año sólo se depreciará el saldo restante (1 800).

10.10 Uso de Excel®

En esta sección se resuelven algunos de los ejercicios del capítulo mediante el empleo de las fórmulas y funciones de Excel®, las cuales simplifican la elaboración de tablas de depreciación.

Cabe señalar que una tabla de depreciación puede elaborarse únicamente con operaciones aritméticas simples, aplicando el razonamiento lógico, como se muestra en los siguientes ejemplos.

10.10.1 Método de línea recta (sección 10.3)

En el ejemplo 10.3.1 se compra un equipo de cómputo con valor de $16 000 y se calcula que su vida útil será de 4 años, antes de que deba ser reemplazado por un equipo más moderno. Su valor de desecho se calcula en $2 500.

Aplicando la fórmula (10.1) se tiene:

$$D = \frac{B}{n} = \frac{C-S}{n}$$

$$D = \frac{16\,000 - 2\,500}{4} = \frac{13\,500}{4}$$

$$D = 3\,375$$

Con estos datos se puede construir la tabla de depreciación:

Años	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	—	—	16 000
1	3 375	3 375	12 625
2	3 375	6 750	9 250
3	3 375	10 125	5 875
4	3 375	13 500	2 500

Para elaborarla, se capturan los valores correspondientes a la depreciación anual y al valor en libros y se incluyen fórmulas que permiten:

a) Repetir la depreciación por periodo tantas veces como periodos de vida tenga el bien.
b) Acumular la depreciación a partir de cero.
c) Disminuir el valor en libros, conforme se aplica la depreciación por periodo y se incrementa la depreciación acumulada.

Años (A)	Depreciación anual (B)	Depreciación acumulada (C)	Valor en libros (D)
0	0	=+B2	16 000
1	3 375	=+C2+B3	=+D2–B3
2	=+B3	=+C3+B4	=+D3–B4
3	=+B4	=+C4+B5	=+D4–B5
4	=+B5	=+C5+B6	=+D5–B6

10.10.2 Método de porcentaje fijo (sección 10.4)

En el ejemplo 10.4.1 una compañía compra una camioneta para el reparto de su mercancía en $75 000. Calcula que su vida útil será de cinco años y que al final de ella su valor de desecho será de $10 000.

Aplicando la fórmula (10.6) se tiene:

$$S = C(1-d)^n$$
$$10\,000 = 75\,000(1-d)^5$$
$$\frac{10\,000}{75\,000} = (1-d)^5$$
$$0.133333 = (1-d)^5$$
$$(0.133333)^{1/5} = (1-d)$$
$$0.668325 = (1-d)$$
$$d = 1 - 0.668325$$
$$d = 0.331675$$

Una vez determinada la tasa de depreciación que se aplicará anualmente, se elabora la tabla correspondiente:

Años	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros	Tasa de depreciación
0	—	—	75 000.00	0.331675
1	24 875.63	24 875.63	50 124.38	0.331675
2	16 625.00	41 500.63	33 499.37	0.331675
3	11 110.90	52 611.53	22 388.47	0.331675
4	7 425.70	60 037.23	14 962.77	0.331675
5	4 962.78	65 000.00	10 000.00	0.331675

En este caso, los únicos valores que requieren ser capturados son el valor en libros y la tasa de depreciación. El resto de los valores de la tabla se determinará con el uso de fórmulas como se ilustra a continuación.

Años (A)	Depreciación anual (B)	Depreciación anual (C)	Valor en libros (D)	Tasa de depreciación (E)
0	0	=+B2	75 000	0.331675
1	=+D2*E2	=+C2+B3	=+D2–B3	0.331675
2	=+D3*E3	=+C3+B4	=+D3–B4	0.331675
3	=+D4*E4	=+C4+B5	=+D4–B5	0.331675
4	=+D5*E5	=+C5+B6	=+D5–B6	0.331675
5	=+D6*E6	=+C6+B7	=+D6–B7	0.331675

10.10.3 Método de suma de dígitos (sección 10.5)

En el ejemplo 10.5.1 se compra mobiliario de oficina con valor de \$8 975. Se espera que su vida útil sea de 5 años y que tenga un valor de desecho de \$2 000.

a) Se determina la base de depreciación:

$$B = C - S$$
$$B = 8\,975 - 2\,000$$
$$B = 6\,975$$

b) Se calcula el denominador de la fracción (suma de dígitos):

$$n = 5$$
$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S = \frac{5(6)}{2} = \frac{30}{2}$$
$$S = 15$$

c) Se determinan los numeradores de las fracciones:

Año	1	2	3	4	5
Numerador	5	4	3	2	1
Denominador	15	15	15	15	15
Fracción	5/15	4/15	3/15	2/15	1/15

Con estos datos se elabora la tabla de depreciación correspondiente:

Años	Fracción	Base de depreciación	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	—	—	—	—	8 975.00
1	1/3	6 975.00	2 325.00	2 325.00	6 650.00
2	4/15	6 975.00	1 860.00	4 185.00	4 790.00
3	1/5	6 975.00	1 395.00	5 580.00	3 395.00
4	2/15	6 975.00	930.00	6 510.00	2 465.00
5	1/15	6 975.00	465.00	6 975.00	2 000.00

Es importante destacar que 5/15 = 1/3 y 3/15 = 1/5. Al capturar dichas fracciones en Excel®, la hoja de cálculo las expresa en su versión más simple. Las fórmulas se ilustran en la siguiente tabla.

Años (A)	Fracción (B)	Base de depreciación (C)	Depreciación anual (D)	Depreciación acumulada (E)	Valor en libros (F)
0	0	0	=+B2*C2	=D2	8 975
1	1/3	6 975	=+B3*C3	=+E2+D3	=+F2–D3
2	4/15	6 975	=+B4*C4	=+E3+D4	=+F3–D4
3	1/5	6 975	=+B5*C5	=+E4+D5	=+F4–D5
4	2/15	6 975	=+B6*C6	=+E5+D6	=+F5–D6
5	1/15	6 975	=+B7*C7	=+E6+D7	=+F6–D7

10.10.4 Método por unidad de producción o servicio (sección 10.6)

En el ejemplo 10.6.1 una compañía arrendadora de autos adquiere un automóvil para su flotilla, con un costo de $304 000. La compañía calcula que la vida útil del automóvil para efectos de arrendamientos es de 60 000 kilómetros, al cabo de los cuales el valor de desecho de la unidad será de $124 000. El kilometraje recorrido por la unidad durante los 3 primeros años fue:

Año	Kilómetros
1	24 000
2	22 000
3	14 000

a) Determinar el monto de depreciación por kilómetro recorrido.
b) Elaborar la tabla de depreciación correspondiente.

Solución:
En primer lugar se determina la base de depreciación:

$$B = C - S$$
$$B = 304\,000 - 124\,000$$
$$B = 180\,000$$

Esta base de depreciación se distribuye entre el kilometraje útil para efectos de arrendamiento con el fin de encontrar la depreciación por kilómetro.

$$\text{d/km} = \frac{180\,000}{60\,000}$$
$$\text{d/km} = \$3.00$$

La depreciación por kilómetro es de $3.00. Conociendo este dato, se procede a elaborar la tabla de depreciación correspondiente:

Años (A)	Kilómetros recorridos (B)	Depreciación anual (C)	Depreciación acumulada (D)	Valor en libros (E)
0	0	—	—	304 000
1	24 000	72 000	72 000	232 000
2	22 000	66 000	138 000	166 000
3	14 000	42 000	180 000	124 000
		180 000		
Depreciación por km		3.00		

En este caso, los únicos valores que requieren ser capturados son los kilómetros recorridos y el valor en libros. El resto de los valores de la tabla se determinará con el uso de fórmulas como se ilustra a continuación.

Años (A)	Kilómetros recorridos (B)	Depreciación anual (C)	Depreciación acumulada (D)	Valor en libros (E)
0	0	0	=+C2	304 000
1	24 000	=+B3*$C$7	=+D2+C3	=+E2–C3
2	22 000	=+B4*$C$7	=+D3+C4	=+E3–C4
3	14 000	=+B5*$C$7	=+D4+C5	=+E4–C5
Depreciación por km		3.00		

10.10.5 Método del fondo de amortización (sección 10.7)

En el ejemplo 10.7.1 se adquiere mobiliario nuevo para un hotel. Su costo de adquisición es de $40 000 y se calcula que tendrá una vida útil de 5 años, al cabo de los cuales su valor de desecho será de 0. El interés vigente es de 35% anual.

a) Determinar el cargo anual por depreciación utilizando el método del fondo de amortización.
b) Elaborar la tabla de depreciación correspondiente.

Solución:
En primer lugar se calcula la base de depreciación:

$$B = C - S$$
$$B = 40\,000 - 0$$
$$B = 40\,000$$

Acto seguido, utilizando la fórmula (10.9), se determina el cargo anual por depreciación:

$$D = B\frac{i}{(1+i)^n \quad 1}$$

$$B = 40\,000\frac{0.35}{1+0.35)^5 - 1}$$

$$B = 40\,000\frac{0.35}{4.48403344 - 1}$$

$$B = 40\,000\frac{0.35}{3.48403344}$$

$$B = 40\,000(0.10045828)$$

$$B = 4.01833$$

La aportación que se debe hacer anualmente al fondo de amortización es de $4 018.33.

La siguiente tabla de depreciación es equivalente a una tabla de amortización, pero además contiene una columna para el valor en libros.

Años	Depósito anual	Intereses ganados	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	—	—	—	—	40 000.00
1	4 018.33	—	4 018.33	4 018.33	35 981.67
2	4 018.33	1 406.42	5 424.75	9 443.08	30 556.92
3	4 018.33	3 305.08	7 323.41	16 766.48	23 233.52
4	4 018.33	5 868.27	9 886.60	26 653.08	13 346.92
5	4 018.33	9 328.58	13 346.91	39 999.99	0.01
Total	20 091.65	19 908.34	39 999.99		
Tasa de interés	0.35				

* Las pequeñas diferencias se deben a los redondeos.

En este caso, los únicos valores que requieren ser capturados son el depósito anual, la tasa de interés y el costo de adquisición. El resto de los valores de la tabla se determinará con el uso de fórmulas como se ilustra a continuación.

Años (A)	Depósito anual (B)	Intereses ganados (C)	Depreciación anual (D)	Depreciación acumulada (E)	Valor en libros (F)
0	0	0	0	0	40 000.00
1	4 018.33	=+E2*$B$10	=+B3+C3	=+E2+D3	=+F2–D3
2	=+B3	=+E3*$B$10	=+B4+C4	=+E3+D4	=+F3–D4
3	=+B4	=+E4*$B$10	=+B5+C5	=+E4+D5	=+F4–D5
4	=+B5	=+E5*$B$10	=+B6+C6	=+E5+D6	=+F5–D6
5	=+B6	=+E6*$B$10	=+B7+C7	=+E6+D7	=+F6–D7
Total	=SUMA(B2:B7)	=SUMA(C2:C7)	=SUMA(D2:D7)		
Tasa de interés	0.35				

10.11 Resumen

En este capítulo se definió la depreciación como la pérdida de valor que sufren los activos por el transcurso del tiempo o por el uso que se les da.

Se señaló que la depreciación tiene dos objetivos básicos:

1. Determinar el costo real de los bienes o servicios que genera un activo.
2. Establecer una reserva que permita reemplazarlos al final de su vida útil.

Se estudiaron los métodos más usuales para calcular los cargos anuales por depreciación:

1. Método de línea recta.
2. Método de porcentaje fijo.
3. Método de suma de dígitos.
4. Método por unidad de producción o servicio.
5. Método del fondo de amortización.

En el momento de decidir cuál método debe utilizarse en una situación concreta deberán tenerse en cuenta las ventajas y desventajas de cada uno, las regulaciones fiscales y los objetivos financieros que se persigan. Finalmente, se hicieron breves consideraciones sobre el manejo de la depreciación en épocas inflacionarias, entre las cuales se destacó la necesidad que existe de ajustar los costos históricos contables y los cargos anuales por depreciación, de acuerdo con el desarrollo que muestre el fenómeno inflacionario, para reflejar de manera veraz la situación económica de una organización y prevenir su posible descapitalización.

Comprobación del capítulo

Si ha leído el capítulo completo, el lector debe:

- Comprender el concepto de depreciación.
- Conocer los objetivos de la depreciación.
- Entender el método de línea recta.
- Explicar el método de porcentaje fijo.
- Exponer el método de suma de dígitos.
- Comprender el método por unidad de producción o servicio.
- Entender el método del fondo de amortización.
- Ser capaz de elaborar tablas de depreciación en cada uno de los métodos.
- Entender la importancia de los ajustes a los costos históricos y los cargos por depreciación de acuerdo con los efectos inflacionarios que sufra una economía.
- Resolver ejercicios de depreciación utilizando la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®.

Términos y conceptos importantes

- Base de depreciación
- Cargos por depreciación
- Depreciación
- Depreciación acumulada
- Método de línea recta
- Método de porcentaje fijo
- Método de suma de dígitos
- Método del fondo de amortización
- Método por unidad de producción o servicio
- Tasa de depreciación
- Valor de desecho
- Valor de reposición
- Valor de salvamento
- Valor en libros
- Vida útil

Fórmulas importantes

Método de línea recta

$$D_k = \frac{C-S}{n} = \frac{B}{n} \qquad \textbf{(10.1)}$$

$$A_k = kD \qquad \textbf{(10.2)}$$

$$V_k = C - kD \qquad \textbf{(10.3)}$$

Método de porcentaje fijo

$$D_k = V_{k-1}d \qquad \textbf{(10.4)}$$

$$V_k = C(1-d)^k \qquad \textbf{(10.5)}$$

$$S = C(1-d)^n = Vn \qquad \textbf{(10.6)}$$

Método de la suma de dígitos

$$s = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textbf{(10.7)}$$

$$D_k = \frac{n-k+1}{s}(C-S) \qquad \textbf{(10.8)}$$

Método del fondo de amortización

$$D_k = \frac{Bi}{(1+i)^k - 1} \qquad \textbf{(10.9)}$$

$$A_k = D\frac{(1+i)^k - 1}{i} \qquad \textbf{(10.10)}$$

Ejercicios complementarios

1. Una empresa de televisión coloca en órbita un satélite de comunicaciones con un costo de $20 000 000. La vida esperada del satélite es de 5 años, al cabo de los cuales su valor de desecho será de 0.
   a) Elabore una tabla de depreciación utilizando el método de línea recta.
2. Resuelva el problema 1 con el método de porcentaje fijo.
3. Resuelva el problema 1 utilizando el método de suma de dígitos.
4. Resuelva el problema 1 con el método del fondo de amortización y dada una tasa de interés de 5%.
5. Una máquina estampadora tiene una vida esperada de 1 000 000 piezas. Se adquirió hace 4 años y tuvo un costo de $525 000. Su valor de desecho al cabo de la producción arriba mencionada será de $0. La bitácora de operaciones de la máquina muestra los siguientes datos:

Años	Producción
1	80 000
2	230 000
3	320 000
4	280 000

   a) Elabore la tabla de depreciación hasta la fecha utilizando el método por unidad de producción.
   b) Determine el valor en libros actual.
6. Resuelva el problema 5 con base en una vida útil de 5 años, utilizando el método de línea recta.
7. Resuelva el problema 5 con el método de suma de dígitos, considerando una vida útil de 5 años.
8. Resuelva el problema 5 utilizando el método de porcentaje fijo.
9. Resuelva el problema 5 utilizando el método del fondo de amortización y dada una tasa de interés de 6 por ciento.
10. Resuelva el problema 5 con el método del fondo de amortización y dada una tasa de interés de 10 por ciento.

Matemáticas en internet. Depreciación

- Página dedicada a quienes se interesan en el concepto de la depreciación de los activos. En ella se exponen diversos métodos y tipos de cálculos para expresar la depreciación.
  http://www.depreciacion.net/
- Página en la que se presentan conceptos sobre depreciación y amortización.
  http://www.economicas-online.com/bienesde3.htm
- Enfoque financiero de la depreciación.
  http://www.pymesfuturo.com/depreciacion.htm
- Simulador de depreciación y amortización.
  http://andreaestrada-ingeconomica.blogspot.mx/2012/05/simulador-depreciacion-y-amortizacion.html
- Video que muestra el cálculo de la depreciación en línea recta en Excel®.
  http://www.youtube.com/watch?v=I0P1bXR7nno
- Video que muestra el cálculo de la depreciación decreciente (suma de dígitos) en Excel.
  http://www.youtube.com/watch?v=qn7C6Bfw0mY

CAPÍTULO

11

Probabilidades y tablas de mortalidad

TEMARIO

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

- Definir el concepto de probabilidad
- Distinguir entre probabilidad matemática y probabilidad estadística
- Comprender el concepto de esperanza matemática
- Calcular el valor presente de un pago contingente
- Utilizar las tablas de mortalidad
- Resolver ejercicios de probabilidades y tablas de mortalidad mediante el empleo de la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®

11.1 Introducción

El riesgo ha sido un compañero permanente del hombre desde sus primeras épocas. A fin de conocerlo y manejarlo se han desarrollado la estadística y la probabilidad como ciencias matemáticas que ayudan al hombre a evaluarlo. En este capítulo se hará una breve introducción a la probabilidad y se expondrán sus aplicaciones en el cálculo de pagos contingentes. Asimismo, se presentarán las tablas de mortalidad, las cuales muestran las probabilidades de vida y de muerte de una población por grupos de edad.

11.2 Concepto de probabilidad

En diversas circunstancias todas las personas han tenido que enfrentarse con situaciones cuyo resultado está determinado por el azar: arrojar una moneda al aire y adivinar cuál cara quedará hacia arriba o adivinar qué número resultará al arrojar un par de dados; determinar qué equipo resultará ganador en el juego el próximo domingo o estimar si una persona de 30 años vivirá para jubilarse a los 65. Todos estos casos están regidos por el azar y sus resultados no pueden predecirse con exactitud. Implican un riesgo.

Sin embargo, existe una diferencia entre los cuatro ejemplos que se mencionan arriba; en los dos primeros casos puede determinarse el número de eventos posibles. La relación entre ambos dará como resultado una *probabilidad matemática* o *teórica*. En los otros dos casos es necesario recurrir a la información disponible sobre lo que ha sucedido en eventos anteriores, a fin de estimar el posible comportamiento de los equipos que se enfrentarán el domingo o para determinar el número de personas de 30 años que sobrevivieron hasta los 65. El resultado que se obtiene de esta manera se conoce como *probabilidad estadística* o *empírica.*

11.3 Probabilidad matemática

Si un evento puede ocurrir en n distintas, pero igualmente posibles maneras y si a de esas maneras son consideradas aciertos o casos favorables, en tanto que las otras $f = n - a$ son consideradas fallas o fracasos, entonces la probabilidad de acierto en un experimento dado está definida por la razón entre el número de casos favorables y un número total de casos, es decir:

$$p = \frac{a}{a+f} = \frac{a}{n} \tag{11.1}$$

y la probabilidad de que el evento no ocurra está definida por la razón entre el número de fracasos y el número total de casos:

$$q = \frac{f}{a+f} = \frac{f}{n} \tag{11.2}$$

pero

$$p + q = \frac{a}{a+f} + \frac{f}{a+f} = \frac{a+f}{a+f} = 1$$

y, por lo tanto,

$$p = 1 - q \tag{11.3}$$

$$\text{y } q = 1 - p \tag{11.4}$$

Se dice entonces que p y q son subconjuntos complementarios de un espacio muestral. Si un evento ocurre siempre de manera inevitable se dice que $p(E) = 1$; si el evento nunca ocurre, se dice que $p(E) = 0$.

Se dice que los eventos son *mutuamente excluyentes* si la ocurrencia de uno de ellos impide totalmente la ocurrencia de cualquiera otro. Por ejemplo, al lanzar un dado, que salga 1 excluye automáticamente la ocurrencia de cualquier otro número. Así, dada una cantidad n de eventos mutuamente excluyentes $E_1, E_2, \ldots E_n$, la probabilidad de ocurrencia de cualquiera de los eventos (E_1 o E_2 o … E_n) es igual a la suma de sus respectivas probabilidades individuales:

$$p(E_1 \text{ o } E_2 \text{ o } \ldots E_n) = p(E_1) + p(E_2) + \cdots + p(E_n) \tag{11.5}$$

Se dice que los eventos son *independientes* si la ocurrencia de uno de ellos no tiene ningún efecto en la ocurrencia de los otros eventos. El resultado de sucesivos lanzamientos de un dado es un ejemplo de éstos: el resultado de un lanzamiento no tiene ningún efecto en el resultado siguiente. La probabilidad de ocurrencia de n eventos independientes $E_1, E_2, \ldots E_n$ es el producto de las probabilidades de los eventos individuales:

$$p(E_1 \text{ y } E_2 \text{ y } \ldots E_n) = p(E_1) \times p(E_2) \times \cdots \times p(E_n) \tag{11.6}$$

EJEMPLO 11.3.1

Determinar la probabilidad de que en el lanzamiento de un dado *a*) el resultado sea 1; *b*) el resultado sea un número non.

Solución:

a) El número de caras de un dado es 6. El número de resultados favorables a es 1; por lo tanto, el número de resultados desfavorables f es 5; por ello,

$$p = \frac{a}{a+f} = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$$

b) En este segundo caso, los resultados que se consideran como aciertos son 3 (1, 3 y 5) y los resultados que se consideran como fallas son también 3:

$$p = \frac{3}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Alternativamente puede considerarse que la probabilidad de obtener 1 es de $\frac{1}{6}$, la de obtener 3 es también $\frac{1}{6}$ y la de obtener un 5 es $\frac{1}{6}$. Aplicando la fórmula (11.5):

$$p(E_1 \text{o } E_2 \text{o } E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3)$$

$$p(1 \text{ o } 3 \text{ o } 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 11.3.2

Determinar la probabilidad de obtener en la extracción de una baraja de 52 cartas:

a) Un as.
b) En dos extracciones consecutivas, dos ases.

Solución:

a) El número de resultados favorables es de 4, pues hay 4 ases, por lo que:

$$p = \frac{a}{n} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

b) En este segundo caso se trata de dos eventos dependientes. En la primera extracción, la probabilidad de obtener un as es, como se vio arriba, p:

$$p = \frac{a}{n} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

En la segunda extracción, sin embargo, el número de eventos favorables es de 3, en el supuesto caso de que en la primera se hubiese extraído un as, y el número total de eventos posibles es de 51. Por lo tanto,

$$P(E_2) = \frac{3}{51}$$

La probabilidad de que se den ambos eventos sucesivamente se determina por la fórmula (11.6) $p(E_1 \text{ y } E_2) = p(E_1) \times p(E_2)$:

$$p(As \text{ y } As) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{12}{2\,652} = \frac{3}{663} = \frac{1}{221}$$

EJEMPLO 11.3.3

¿Cuál es la probabilidad de que las 2 primeras extracciones de una baraja no sean ases?

SOLUCIÓN:
En este caso se está preguntando por el suceso de dos eventos desfavorables. Por (11.4) se tiene:

$$q = 1 - p$$

En el primer evento: $$q(E_1) = 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

En el segundo evento: $$q(E_2) = 1 - \frac{4}{51} = \frac{47}{51}$$

Por lo tanto, la probabilidad de falla en el primero y falla en el segundo es $q(E_1 \text{ y } E_2) = q(E_1) \times q(E_2)$:

$$q(As \text{ y } As) = \frac{12}{13} \times \frac{47}{51} = \frac{564}{663} = \frac{188}{221}$$

EJEMPLO 11.3.4

¿Cuál es la probabilidad de que de las dos primeras extracciones de una baraja, una sea as y la otra sea una carta diferente?

SOLUCIÓN:
Estos eventos pueden presentarse de dos formas:

a) *As* y otra carta.
b) Otra carta y *as*.

En el primer caso la probabilidad es:

$$p(As) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$p(\text{otra}) = \frac{48}{51}$$

Dado que la primera carta fue *as*, el número de cartas distintas al *as* permanece sin cambios (48) para la segunda extracción.

La probabilidad de ambos eventos:

$$p(As \text{ y otra}) = \frac{1}{13} \times \frac{48}{51} = \frac{48}{663} = \frac{16}{221}$$

En el segundo caso, la probabilidad es:

$$p(\text{otra}) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$
$$p(As) = \frac{4}{51}$$

Dado que la primera carta fue distinta al as, los 4 ases permanecen en la baraja.

La probabilidad de ambos eventos:

$$p(\text{otra y } As) = \frac{12}{13} \times \frac{4}{51} = \frac{48}{663} = \frac{16}{221}$$

Ya que ambos casos son igualmente válidos (un as y otra o bien otra y un as) sus respectivas probabilidades se suman:

$$p(A \text{ o } B) = p(A) + p(B)$$
$$p(A \text{ o } B) = \frac{48}{663} + \frac{48}{663} = \frac{96}{663} = \frac{32}{221}$$

En estos tres ejemplos hemos visto *todas* las posibles maneras en que pueden ser extraídas las dos primeras cartas de una baraja:

a) Dos ases: $p = \frac{3}{663} = \frac{1}{221}$

b) Dos cartas distintas de ases: $p = \frac{564}{663} = \frac{188}{221}$

c) Un as y una carta distinta: $p = \frac{96}{663} = \frac{32}{221}$

Todos estos eventos forman lo que se denomina el *universo* del experimento y la suma de sus probabilidades es igual a 1, pues ineludiblemente deberá ocurrir alguno de ellos:

$$p(A \text{ o } B \text{ o } C) = \frac{1}{221} + \frac{188}{221} + \frac{32}{221} = \frac{221}{221} = 1$$

11.4 Probabilidad estadística

Si se ha observado que cierto evento E sucede a veces en n pruebas, la razón a/n es definida como la probabilidad estadística o empírica de que el mismo resultado ocurra en una prueba futura. La confiabilidad que pueda otorgarse a los resultados que así se obtengan dependerá en gran medida del número de observaciones que se hayan hecho; a mayor número, mayor será la confianza que se les pueda dar. Si en una escuela se ha observado que el índice de deserción durante los últimos 15 años ha sido de 10%, es razonable esperar que de la nueva generación 1 de cada 10 estudiantes no concluya sus estudios.

La razón a/n es también conocida como frecuencia relativa de un *evento*.

EJEMPLO 11.4.1

De acuerdo con las estadísticas del departamento de tránsito, durante el último año hubo 12 005 accidentes viales, de los cuales 686 se debieron a exceso de velocidad. Si durante el primer mes de este año se reportaron 1 050 accidentes, ¿cuántos puede esperarse que se deban a exceso de velocidad?

Solución:

Utilizando la información estadística del año anterior se tiene que la probabilidad de accidentes debidos a excesos de velocidad es:

$$p = \frac{686}{12\ 005} = 0.05714286$$

Por lo tanto, estimando el número de accidentes por exceso de velocidad se tiene:

$$1\ 050(0.05714286) = 60$$

EJEMPLO 11.4.2

Los registros que lleva un hospital especializado en el tratamiento del cáncer muestran que de un grupo de 800 personas a quienes se les detectó la enfermedad en un estado temprano, 720 sobrevivieron al menos 10 años. Si el hospital alberga actualmente 120 enfermos en esas condiciones,

a) ¿cuántos de ellos se espera sobrevivirán al menos 10 años? y
b) ¿cuál es la probabilidad de que mueran antes de 10 años?

SOLUCIÓN:
De sus registros se tiene que:

$$p = \frac{a}{n} = \frac{720}{800} = 0.90$$

Por lo tanto, es razonable esperar que 90% de los enfermos vivan al menos 10 años:

$$120(0.90) = 108 \text{ enfermos}$$

La probabilidad de que mueran se determina por la fórmula (10.4):

$$q = 1 - p$$
$$q = 1 - 0.90 = 0.10$$

Ejercicios de las secciones 11.2 a 11.4

1. De una caja que contiene 5 bolas blancas, 10 bolas rojas y 6 azules, se extrae una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída:

   a) sea blanca, *b*) no sea roja, *c*) sea blanca o azul?

2. De una baraja de 52 cartas se extrae una carta al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta extraída sea

   a) el rey de diamantes,
   b) una reina,
   c) un corazón,
   d) una figura roja,
   e) una carta de menor valor que el rey?

3. En un juego de dados, la casa gana si la suma de los números de ambos dados es 7.

   a) ¿Cuál es la probabilidad que tiene un jugador de ganarle a la casa si apuesta a un solo número?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que pierda?

4. ¿Cuál es la probabilidad de obtener en un juego con 2 dados

   a) 3 números pares seguidos? *b*) 3 veces seguidas doble 6?

5. ¿Cuál es la probabilidad de extraer de una baraja

   a) 4 ases en las primeras 4 extracciones?
   b) 3 ases y 1 rey?
   c) 2 ases y 2 reyes?

6. Un equipo de futbol ha ganado 40 de sus 50 últimos partidos. Determine la probabilidad de que:

   a) Gane su próximo partido.
   b) Gane 3 partidos seguidos.
   c) Gane 2 de sus 3 siguientes partidos.
   d) Gane sus 2 primeros partidos y pierda el tercero.
   e) Gane al menos 2 de sus 5 siguientes partidos.

7. Los registros de una universidad muestran que las calificaciones que obtuvieron sus estudiantes en los últimos 3 años se han distribuido de la siguiente manera:

MB	10%
B	30%
S	20%
NA	40%

Con el supuesto de que son eventos independientes, ¿cuál es la probabilidad de que:

a) todos los estudiantes de los 3 grupos de primer ingreso aprueben los cursos?
b) todos los estudiantes reprueben todos los cursos?

8. La probabilidad de vida de 3 enfermos en un hospital es:

$$\text{Paciente } A = \frac{1}{5}\text{, paciente } B = \frac{3}{4}\text{, paciente } C = \frac{8}{10}$$

Considerando que las muertes de estos enfermos son eventos independientes, ¿cuál es la probabilidad de que:

a) los 3 enfermos mueran?
b) los 3 enfermos sobrevivan?
c) al menos uno de ellos sobreviva?

9. Considere los siguientes datos:

Edad	Probabilidad de sobrevivir 10 años
30	9/10
40	8/10
50	7/10

Determine:

a) La probabilidad de que una persona de 30 años viva hasta los 60.
b) La probabilidad de que muera entre los 40 y los 50 años.
c) La probabilidad de que muera entre los 50 y los 60 años.

11.5 Esperanza matemática

Si p es la probabilidad de que una persona reciba cierta cantidad M, entonces el producto pM será una esperanza matemática:

$$E(M) = pM$$

EJEMPLO 11.5.1

En una fiesta anual de una empresa se sortean \$100 000 entre los asistentes. ¿Cuál es la esperanza matemática de cada uno de ellos si se depositaron 80 boletos en la urna?

Solución:

La probabilidad p de cada empleado es 1/80; por lo tanto, la esperanza matemática es

$$\frac{1}{80}(100000) = \$1\,250$$

EJEMPLO 11.5.2

Se sortean $10 000 000 en un juego de lotería. *a*) ¿Cuál es la esperanza matemática de una persona que compra un billete si se emiten 50 000 números? *b*) ¿Cuál es la esperanza matemática si compra 2 números?

SOLUCIÓN:

a) La probabilidad p de obtener el premio es de $\frac{1}{50\,000}$ mientras que la esperanza matemática:

$$pM = \frac{1}{50\,000}(10\,000\,000) = \$200$$

b) Si compra dos boletos $p = \frac{2}{50\,000} = \frac{1}{25\,000}$

$$E(M) = pM = \frac{1}{25\,000}(10\,000\,000) = \$400$$

Si un experimento puede tener diversos resultados y cada uno de ellos conlleva un distinto monto de ingresos M, entonces M adoptará los valores M_1 y M_2 … con probabilidades de ocurrencia $p(M_2)$… La *esperanza matemática* o *valor medio* esperado de M será:

$$E(M) = M_1 p(M_1) + M_2 p(M_2) + M_3 p(M_3) + \ldots M_n p(M_n)$$

En el caso de que existan N diversos resultados que conlleven el mismo monto de ingresos, entonces:

$$E(M) = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + \ldots M_n}{N}$$

EJEMPLO 11.5.3

En una ruleta con 50 números se han colocado 11 premios: 1 de $100, 2 de $50, 3 de $20 y 5 de $10. ¿Cuál es la esperanza matemática de cada jugador?

SOLUCIÓN:

La probabilidad de ocurrencia de cada uno de los premios es distinta:

$$E(M) = M_1 p(M_1) + M_2 p(M_2) + M_3 p(M_3) + \ldots$$

$$E(M) = 100\frac{1}{50} + 50\frac{2}{50} + 20\frac{3}{50} + 10\frac{5}{50}$$

$$E(M) = 2 + 2 + 1.2 + 1 = 6.2$$

EJEMPLO 11.5.4

Si el costo de los boletos para la ruleta del ejercicio anterior es de $10, ¿cuál es el valor de la esperanza matemática?

SOLUCIÓN:

Se ha determinado ya el valor de la esperanza matemática de los ingresos ($6.20), y ahora resta por determinar el valor de la esperanza matemática del pago; la probabilidad de perder q es de $\frac{39}{50}$:

$$E(M) = 10\frac{39}{50} = 7.80$$

Este valor se resta de la esperanza matemática de los ingresos y se tiene el valor de la esperanza matemática del experimento:

$$E(M) = 6.20 - 7.80 = -1.60$$

La esperanza matemática de una persona que entre al juego pagando \$10 es una pérdida de \$1.60.

EJEMPLO 11.5.5

Se organiza una rifa entre 25 personas. Los premios ofrecidos son: 1 de \$50, 2 de 20 y 3 de 10.

Los perdedores cubrirán íntegramente los premios de los ganadores. ¿Cuál es la cantidad que debe aportar cada perdedor?

Solución:
La esperanza matemática del experimento es:

$$E(M) = M_1 p(M_1) + M_2 p(M_2) + \ldots$$
$$E(M) = 50\frac{1}{25} + 20\frac{2}{25} + 10\frac{3}{25} = 2 + 1.60 + 1.20 = 4.80$$

Además, 4.80(25) = 120 = total de premios. Y

$$\frac{120}{19 \text{ perdedores}} = \$6.32$$

EJEMPLO 11.5.6

En un juego de dados una persona gana \$500 si el dado cae en 1 o en 5. ¿Cuál es su esperanza matemática?

Solución:
Ambos eventos tienen la misma probabilidad de ocurrencia y ofrecen el mismo posible ingreso; por lo tanto, se tiene que:

$$E(M) = \frac{M_1 + M_2}{N}$$
$$E(M) = \frac{500 + 500}{6}$$
$$E(M) = 166.67$$

Ejercicios de la sección 11.5

10. En un juego de dos dados, la banca paga un premio de \$100 por cada punto que se obtenga, siempre y cuando ambas caras de los dados sean iguales.

a) ¿Cuál es la esperanza matemática de una persona que juega?
b) ¿Cuál es su esperanza matemática si el costo del boleto es de \$150?
c) ¿Cuál debía ser el costo del boleto para que la esperanza matemática fuese 0?

11. Una empresa organiza un sorteo para sus 25 clientes principales. En una urna depositan 25 papeletas con los siguientes premios: 1 premio de \$50 000, 1 premio de \$10 000, 2 premios de \$5 000 cada uno y 5 premios de \$1 000 cada uno. ¿Cuál es la esperanza matemática de cada participante?

12. Un grupo de estudiantes organiza una rifa para recabar dinero para su fiesta de graduación. Emite 1 000 boletos de \$50 cada uno y ofrece un premio de \$10 000, uno de \$5 000 y uno de \$2 500. ¿Cuál es la esperanza matemática de un alumno que sólo vendió 5 de los 20 boletos que se le asignaron y tuvo que pagar los restantes?

13. Un hombre de negocios que debe viajar en avión compra un seguro que paga \$1 500 000 en caso de muerte accidental, el cual lo protege durante un mes. Si la probabilidad de que muera en ese lapso es de 0.00015, ¿cuál es el precio que debería pagar por el seguro sin considerar gastos ni utilidad de la aseguradora?

14. Una empresa de comunicaciones ha pagado 50 millones de dólares por la construcción y emplazamiento en órbita de un satélite espacial y decide asegurarlo contra riesgos durante el lanzamiento. La compañía aseguradora estima que las probabilidades de falla en el lanzamiento son de 0.01 si el tiempo no es bueno. El servicio meteorológico ha estimado en 85% las probabilidades de que el clima sea favorable. ¿Cuál es el precio que debe pagar la empresa de comunicaciones por el seguro sin considerar gastos ni utilidades?

11.6 Valor actual de un pago contingente

Si pM es la esperanza matemática de que una persona reciba una cantidad de dinero en el futuro, el valor actual de dicha esperanza suponiendo una tasa de interés i es:

$$pM(1+i)^{-n}$$

Generalizando, si distintas cantidades de dinero $M_1, M_2, \ldots M_n$ serán recibidas en tiempos $t_1, t_2, \ldots t_n$ con probabilidades $p_1, p_2, \ldots p_n$ el valor actual de la esperanza matemática es:

$$p_1M_1(1+i)^{-t_1} + p_2M_2(1+i)^{-t_2} + \cdots + p_nM_n(1+i)^{-t_n}$$

EJEMPLO 11.6.1

Un banco ofrece a los empleados que cumplen 5 años de trabajo un bono por \$10 000. ¿Cuál es el valor actual de la esperanza matemática de un nuevo empleado si, de acuerdo con las estadísticas del propio banco, 40% del personal de nuevo ingreso cambia de empleo antes de cumplir 5 años? Se supone una tasa de interés de 10% anual efectiva.

Solución:

La probabilidad p de que el nuevo empleado permanezca en el banco hasta cumplir los 5 años es:

$$p = 1 - q$$
$$p = 1 - 0.40 = 0.60$$

y la probabilidad de que se retire antes de cumplir los 5 es de 0.40 o 40%. Por lo tanto, su esperanza matemática es

$$E(M) = pM = 0.60(10\,000) = 6\,000$$

El valor actual de la esperanza matemática es:

$$pM(1+i)^{-n} = 6\,000(1+0.10)^{-5}$$
$$pM(1+i)^{-n} = \$6\,000(0.620921)$$
$$pM(1+i)^{-n} = \$3\,725.53$$

EJEMPLO 11.6.2

Una empresa minera realiza inversiones en la prospección de una veta de la cual espera obtener utilidades por 2 000 000 de dólares en un plazo de 3 años. ¿Cuál es el valor actual de la esperanza matemática si sus estadísticas muestran que 65% de sus prospecciones resultan favorables? Se supone una tasa de interés de 15%.

Solución:
La esperanza matemática es:

$$pM = 0.65(2\ 000\ 000)$$
$$pM = 1\ 300\ 000$$

El valor presente de pM es

$$(1+i)^{-n}\ pM = (1+0.15)^{-3}(1\ 300\ 000)$$
$$(1+i)^{-n}\ pM = 0.657516(1\ 300\ 000) = \$854\ 771.10$$

Este resultado puede interpretarse como el monto máximo que debe invertir la empresa en sus operaciones de exploración.

EJEMPLO 11.6.3

Una empresa solicita al banco un préstamo y ofrece pagar \$150 000 al cabo de 6 meses. Si la experiencia del banco muestra que 2% de los préstamos resulta incobrable, ¿cuánto dinero debe prestar a la empresa con el supuesto de que la tasa de interés del mercado es de 10% semestral? ¿Cuál es la tasa de interés real que gana el banco?

Solución:

a) La esperanza matemática de recuperación del préstamo es:

$$E(M) = (0.98)(150\ 000)$$
$$E(M) = 147\ 000$$

Su valor presente descontado a la tasa de interés del mercado es:

$$pM(1+i)^{-n} = 147\ 000(1+0.10)^{-1}$$
$$pM(1+i)^{-n} = 133\ 636.36$$

La cantidad que el banco debe prestarle a la empresa asciende a \$133 636.36.

b) Si la empresa reintegra el préstamo en su totalidad, el banco habrá ganado un interés de:

$$133\ 636.36 = 150\ 000(1+i)^{-1}$$
$$133\ 636.36 = \frac{150\ 000}{(1+i)}$$
$$(1+i) = \frac{150\ 000}{133\ 636.36}$$
$$i = 1.122449 - 1$$
$$i = 0.122449 \text{ o } 12.24\%$$

De esta tasa 10% corresponde al interés del mercado y 2.24% cubre los riesgos de incobrabilidad.

EJEMPLO 11.6.4

Al cabo de los 6 meses, la empresa del ejemplo anterior paga los \$16 363.64 (150 000 − 133 636.36) correspondientes a los intereses del préstamo, pero se declara imposibilitada para pagar el capital y solicita se le refinancie por un periodo similar. La experiencia de recuperación de cartera problemática del banco se muestra en la siguiente tabla:

Recuperación	Probabilidad
0%	0.05
50%	0.05
75%	0.10
100%	0.80

Si la tasa del mercado vigente es de 8% semestral, ¿qué tasa deberá cobrarle a la empresa para redocumentar su operación?

Solución:
La esperanza matemática de recuperación de la cartera $E(M)$ = (0.05)0 + (0.05)(50%) + (0.10)(75%) + (0.80)(100%) = 90%.

Por lo tanto, el banco deberá cobrar una tasa de interés tal que:

$$(1+i)^{-1} = (0.90)(1.08)^{-1}$$
$$(1+i) = \frac{1.08}{0.90}$$
$$i = 1.2 - 1$$
$$i = 0.2 \text{ o } 20\%$$

Como se observa, el cargo que se hace en el caso de préstamo a empresas en situación riesgosa puede ser muy elevado.

EJEMPLO 11.6.5

Un padre ofrece entregarle $10 000 a su hijo por cada año que apruebe todos sus cursos universitarios. Si la carrera dura 5 años y las estadísticas muestran que sólo 80% de los alumnos inscritos aprueban todas sus materias, ¿cuál es la esperanza matemática del estudiante si la tasa de interés es de 15%?

Solución:
En este caso se está en presencia de una serie de pagos iguales. Puede realizarse su sumatoria o calcularlo como el valor actual de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata:

$$E(M) = 0.80(10\,000)(1+0.15)^{-1} + 0.80(10\,000)(1+0.15)^{-2} + \ldots$$
$$E(M) = 8\,000\frac{1-(1+0.15)^{-5}}{0.15}$$
$$E(M) = 26\,817.24$$

Ejercicios de la sección 11.6

15. Una compañía de seguros promueve un "plan universitario" entre alumnos inscritos en escuelas profesionales. Este plan ofrece pagar $100 000 a la presentación del título a fin de que el graduado cuente con una base económica para iniciar su vida profesional. Es necesario calcular el precio que debe cobrar la compañía sin considerar gastos ni utilidades, si se ha determinado que sólo 60% de los inscritos concluyen sus estudios y, de éstos, 65% se gradúa. La duración promedio de los estudios es de 5 años y se considera que se requiere 1 año más para que el alumno presente su tesis. La tasa promedio anual de interés se estima en:

    a) 20%, *b*) 30% *c*) 50 por ciento.

16. El dueño de un equipo de futbol ofrece pagar una prima de $150 000 a cada uno de los 22 jugadores que lo integran si logran ganar el torneo anual. ¿Cuál es el valor actual del compromiso del dueño si se estima que el equipo tiene 70% de probabilidades de coronarse al cabo de un año y la tasa de interés es de 20% anual?

17. El contrato colectivo de una empresa estipula el pago de un bono de $100 000 para cada uno de los empleados que cumplan 30 años de trabajo dentro de ella. Cuenta con 250 trabajadores con una antigüedad promedio de 8 años. Se desea constituir un fondo de reserva para hacer frente a esta obligación y se estima que sólo 30% de los empleados alcanzará a cumplir los 30 años de trabajo.

a) ¿Cuánto dinero se debe depositar considerando un interés de 40% anual promedio?
b) 25%.
c) 10%.

18. Un banco cobra 20% de interés en préstamos con garantía hipotecaria que asegura su total recuperación y cobra 28% en préstamos sin garantía. ¿Cuál es el porcentaje estimado de cuentas incobrables?

19. La compañía operadora de una tarjeta de crédito bancaria ha determinado la siguiente tabla de probabilidades de recuperación de la cartera:

Proporción de recuperación de la cartera	Probabilidad
0%	0.01
50%	0.04
80%	0.08
90%	0.17
100%	0.70

Si la tasa de interés para préstamos garantizados es de 35%, ¿qué tasa debe cobrar a los usuarios de la tarjeta?

11.7 Tablas de mortalidad

Una *tabla de mortalidad* es el registro estadístico de las muertes ocurridas en un grupo suficientemente grande de personas en un periodo determinado. La población que se considera es un grupo de tenedores de pólizas de seguro de vida y la tabla de mortalidad resultante se utiliza para calcular las primas de este tipo de seguros. La tabla de mortalidad que se utilizará en este libro es la tabla de mortalidad con la experiencia mexicana al año 2010,* que se divide en dos partes: hombres (tabla II) y mujeres (tabla III).

La primera columna, “edad”, comprende desde los 0 hasta los 100 años, que corresponden a los grupos que fueron objeto de estudio.

La segunda columna se denomina v_x. En ésta, la raíz I ha sido fijada arbitrariamente en 100 000. Esta columna muestra el número de personas de la base original de 100 000 que alcanzan a cumplir la edad x.

La columna m_x (columna tres) indica el número de muertos a la edad x; esto es, personas que cumplieron x años y murieron antes de cumplir $x + 1$ años.

La columna cuatro, 1 000 q_x se deriva de las columnas dos y tres y muestra la probabilidad que tiene un individuo de x años de edad de morir antes de cumplir $x + 1$ años. Así, por ejemplo, la pro-

* Adaptadas de Alejandro Mina Valdés, El Colegio de México, “La obtención y proyección de tablas de mortalidad empleando curvas Spline”, X Reunión Nacional de Investigación Demográfica en México, México, 3 a 6 de noviembre de 2010.

babilidad de que un hombre de 25 años muera antes de cumplir 26 es de 1.601/1000; esto es que, de acuerdo con las estadísticas, la probabilidad de muerte a los 25 años es de 0.001601.

Las columnas dos y tres (v_x y m_x) pueden también derivarse a partir de la columna 4 y de v_x.

Considerando las siguientes relaciones:

$$m_x = v_x \cdot q$$

y

$$v_{x+1} = v_x - m_x$$

Por conveniencia, se considera que q_{100} es igual a la unidad. Esto es, el número de individuos que sobreviven más allá de 100 años es tan reducido que no afecta los cálculos y, por lo tanto, $v_{101} = 0$.

Las columnas cinco y seis D_x y N_x son conocidas como valores conmutados y se explicarán en una subsección posterior.

Para manejar las tablas de mortalidad es necesario considerar la siguiente notación:

p_x = Probabilidad de que una persona de x años de edad sobreviva por lo menos un año:

$$p_x = \frac{v_{x+1}}{v_x} \tag{11.7}$$

${}_np_x$ = Probabilidad de que una persona de x años de edad sobreviva por lo menos n años:

$$_np_x = \frac{v_{x+n}}{v_x} \tag{11.8}$$

q_x = Probabilidad de que una persona de x años de edad muera antes de cumplir $x + 1$ años:

$$q_x = 1 - p_x = \frac{v_x - v_{x+1}}{v_x} = \frac{m_x}{v_x} \tag{11.9}$$

${}_nq_x$ = Probabilidad de que una persona de x años de edad muera antes de cumplir $x + n$ años ($q_x = {}_1q_x$):

$$_nq_x = 1 - {}_np_x = \frac{v_x - v_{x+n}}{v_x} \tag{11.10}$$

${}_{n/k}q_x$ = Probabilidad de que una persona de x años de edad muera entre las edades ($x + n$ y $x + n + k$):

$$_{n/k}q_x = \frac{v_{x+n} - v_{x+n+k}}{v_x} \tag{11.11}$$

EJEMPLO 11.7.1

Se pide determinar la probabilidad de que:

a) Una mujer de 29 años sobreviva al menos un año.
b) Un hombre que celebra su 50 aniversario festeje el 51.

SOLUCIÓN:

a) Se aplica la fórmula (11.7) sustituyendo los valores correspondientes de la tabla de mortalidad:

$$p_x = \frac{v_{x+1}}{v_x}$$

$$p_{29} = \frac{v_{30}}{v_{29}} = \frac{97\,688}{97\,743} = 0.99943730$$

Otra forma es: $$p_{29} = 1 - q_{29} = 1 - 0.00055247 = 0.99944753$$

b) En este segundo caso se procede en forma similar:

$$p_{50} = \frac{v_{51}}{v_{50}} = \frac{89\,080}{89\,668} = 0.99344248$$

Alternativamente: $$p_{50} = 1 - q_{50} = 1 - 0.00655752 = 0.99344248$$

Las diferencias que existen entre una y otra alternativa de cálculo son debidas a los redondeos en el cálculo de las tablas.

EJEMPLO 11.7.2

Es necesario determinar la probabilidad de que un hombre de 45 años de edad sobreviva 25 años. Comparar el resultado con la probabilidad de que una mujer de la misma edad sobreviva 25 años.

Solución:
Aplicando la fórmula (11.8):

Hombre	Mujer
${}_n p_x = \frac{v_{x+n}}{v_x}$	${}_n p_x = \frac{v_{x+n}}{v_x}$
${}_{25} p_{45} = \frac{v_{70}}{v_{45}} = \frac{66\,056}{92\,056} = 0.717563$	${}_{25} p_{45} = \frac{v_{70}}{v_{45}} = \frac{77\,001}{95\,971} = 0.802336$

Como puede apreciarse, una mujer de 45 años tiene 80.23% de probabilidad de vivir hasta los 70 años, en tanto que un hombre de la misma edad tiene 71.76%; o sea que la mujer tiene casi 9% más de probabilidad de alcanzar esta edad.

EJEMPLO 11.7.3

Se necesita determinar la probabilidad de que una mujer de 15 años de edad muera entre los 25 y los 30 años.

Solución:
En este caso es necesario determinar las probabilidades de que viva hasta los 25 y hasta los 30 años, y por diferencia determinar la probabilidad de que muera en ese lapso.

La probabilidad de que viva hasta los 25 años es:

$${}_{10} p_{15} = \frac{v_{25}}{v_{15}} = \frac{97\,932}{98\,294} = 0.99631717$$

La probabilidad de que viva hasta los 30 años:

$${}_{15} p_{15} = \frac{v_{30}}{v_{15}} = \frac{97\,688}{98\,294} = 0.99383482$$

La probabilidad de que muera entre los 25 y los 30 años está dada por la diferencia de probabilidades p_{25} y p_{30}:

$${}_{10|15} q_{15} = 0.99631717 - 0.99383482 = 0.00248235$$

Alternativamente, puede resolverse aplicando la fórmula (11.11):

$$_{n|k}q_x = \frac{v_{x+n} - v_{x+n+k}}{v_x}$$

$$_{10|15}q_{15} = \frac{97\,932 - 97\,688}{98\,294} = \frac{244}{98\,294} = 0.00248235 = 0.25\%$$

EJEMPLO 11.7.4

Se debe determinar la probabilidad de que un hombre de 35 años muera antes de cumplir 40.

Solución:
Aplicando la fórmula (11.10) se tiene:

$$_nq_x = \frac{v_x - v_{x+n}}{v_x}$$

$$_5q_{35} = \frac{v_{35} - v_{40}}{v_{35}}$$

$$_5q_{35} = \frac{94\,991 - 93\,746}{94\,991} = \frac{1\,245}{94\,991} = 0.0131065 = 1.31\%$$

11.7.1 Valores conmutados

Las últimas dos columnas de las tablas II y III, D_x y N_x, son lo que se conoce como *valores conmutados*, y su propósito es abreviar algunos de los cálculos necesarios para resolver las anualidades contingentes que son el tema del siguiente y último capítulo.

D_x se define como:

$$D_x = (1+i)^{-x} v_x \tag{11.12}$$

en donde *i* es la tasa de interés para calcular las anualidades y que, por consideraciones prácticas, se toma como 0.045. Se escoge este valor por ser de uso relativamente común en algunos cálculos actuariales y para facilitar el análisis de las anualidades contingentes. Así, los valores conmutados de las tablas II y III se calcularon con esta tasa, y los ejemplos en los que se utilizan también se basan en ella.

EJEMPLO 11.7.5

Calcular D_{20} de la tabla II de mortalidad masculina.

Solución:
Se convino en que $i = 0.045$

$$x = 20$$

$$D_{20} = (1.045)^{-20} v_{20}$$

de la misma tabla II, en la columna correspondiente:

$$v_{20} = 97\,459 \text{ y}$$

$$D_{20} = (0.414643)(97\,459) = 40\,410.6785$$

que es prácticamente igual al valor que aparece en el renglón 20 de la columna D_x de la tabla II.

EJEMPLO 11.7.6

Calcular D_{97} de la tabla III de mortalidad femenina.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} x &= 97 \\ v_{97} &= 5\,639 \\ D_{97}(1.045)^{-97}(5\,639) &= (0.013987)(5\,639) \\ D_{97} &= 78.871831 \end{aligned}$$

Por otro lado, se define:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{99} + D_{100} \qquad \textbf{(11.13)}$$

EJEMPLO 11.7.7

Calcular N_{95} de la tabla II sobre mortalidad masculina del apéndice.

SOLUCIÓN:
De acuerdo con la definición anterior:

$$\begin{aligned} N_{95} &= D_{95} + D_{96} + D_{97} + D_{98} + D_{99} + D_{100} \\ N_{95} &= 101.1 + 77.2 + 57.7 + 42.1 + 29.9 + 20. \\ N_{95} &= 328.7 \end{aligned}$$

que es el valor que aparece en la posición correspondiente en la tabla.

Como puede verse, calcular N_{25} exigiría sumar los valores de D_x desde 25 hasta 100, esto es, 76 cifras, lo cual es una labor tediosa y muy propensa a errores. Como este tipo de cálculos son necesarios en las anualidades contingentes, puede comprenderse fácilmente la utilidad de estos valores conmutados.

Ejercicios de la sección 11.7

20. Determine la probabilidad de que un hombre y una mujer de 35 años sobrevivan:

a) al menos un año *b*) al menos 5 años *c*) al menos 20 años

Comente las diferencias entre los resultados.

21. Determine la probabilidad de que una mujer de 18 años muera:

a) antes de cumplir 19 años *b*) antes de cumplir 30 años *c*) antes de cumplir 60 años

22. Determine la probabilidad de que una persona de 22 años de edad muera:

a) entre los 25 y los 30 años *c*) entre los 50 y los 60 años
b) entre los 30 y los 40 años *d*) después de cumplir 60 años

23. Determine la probabilidad de que un hombre de 40 años muera:

a) a los 40 años de edad *b*) a los 45 años de edad *c*) a los 70 años de edad

24. Determine en la tabla II de mortalidad masculina:

a) D_{28} *b*) D_{52} *c*) D_{81}

25. Determine en la tabla III de mortalidad femenina:

a) N_{28} *b*) N_{39} *c*) N_{86}

11.8 Aplicaciones

Dado el envejecimiento que sufre la población mundial, las aplicaciones de las probabilidades y tablas de mortalidad serán cada vez más importantes. Sin embargo, aún son poco conocidas y menos comprendidas. Se ilustrará aquí un ejemplo en el que se relacionan los conceptos de matemáticas financieras y las tablas de mortalidad, así como su efecto en la vida cotidiana de las personas.

Considerando que la esperanza de vida se acerca a los 80 años y que la edad de jubilación es de 65 años, y que la tasa de interés efectiva anual promedio del mercado es de 5%,

a) Determine el monto que deberá acumular una persona para que al llegar a su edad de jubilación, pueda disfrutar de una renta mensual de \$10 000 por el periodo de los 65 a los 80 años.

b) Determine el ahorro mensual que debe realizar una persona de 25 años para acumular dicho monto al cumplir 65 años.

c) Determine el ahorro mensual que debe realizar una persona de 50 años para acumular dicho monto al cumplir 65 años.

d) Determine la prima mensual que debe cobrar una aseguradora que ofrezca un plan de pensión por el cual liquidará a todo hombre que cumpla 65 años de edad una cantidad que le permita cobrar una mensualidad de 10 000 pesos mensuales hasta los 80 años, sin considerar gastos ni utilidad de la aseguradora.

e) Determine la prima mensual que debe cobrar una aseguradora que ofrezca un plan de pensión por el cual liquidará a toda mujer que cumpla 65 años de edad una cantidad que le permita cobrar una mensualidad de 10 000 pesos mensuales hasta los 80 años, sin considerar gastos ni utilidad de la aseguradora.

Como ya se mencionó, la solución de este problema involucra tanto a las matemáticas financieras como a las tablas de mortalidad, como se verá a continuación:

a) Para determinar el monto de ahorro que debe acumular una persona para que al llegar a los 65 años pueda disfrutar de una pensión de 10 000 mensuales por un lapso de 15 años, se calcula el valor presente de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Puesto que la persona espera vivir 15 años, recibirá 180 pagos mensuales (15 años × 12 meses), de \$10 000 cada uno, y se estima que la tasa de interés efectiva anual será de 5%. Por lo tanto, se debe determinar la tasa de interés efectiva mensual:

$$i' = (1+i)^{p} - 1$$
$$i' = (1+0.05)^{\frac{1}{12}} - 1$$
$$i' = 1.004074 - 1$$
$$i' = 0.004074$$

Sustituyendo estos valores se tiene:

$$A = 10\,000\frac{1-(1+0.004074)^{-180}}{0.004074}$$
$$A = 10\,000\frac{1-0.481017}{0.004074}$$
$$A = 10\,000\frac{0.518983}{0.004074}$$

$$A = 10\,000(127.389028)$$
$$A = 1\,273\,890.28$$

Así, la cantidad que producirá una renta mensual de 10 000 durante 15 años es \$1 273 890.28, si se supone que la tasa de interés efectiva anual del mercado es de 5%. Por lo tanto, ésta es la cantidad que debe acumular una persona que desee obtener dicha pensión en el momento de jubilarse.

b) La determinación del ahorro mensual que debe realizar una persona de 25 años para acumular dicha cantidad, se calcula utilizando la fórmula del monto de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata:

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Este joven, probablemente un recién egresado de la universidad, tiene aún un periodo de 40 años, esto es 480 meses, para integrar el monto de \$1 273 890.28. Si se supone que se aplica la misma tasa de interés efectivo anual de 5% (0.4074% mensual efectivo), se tienen ya todos los valores necesarios para sustituir en la ecuación:

$$1\,273\,890.28 = R\frac{(1+0.004074)^{480} - 1}{0.004074}$$
$$1\,273\,890.28 = R\frac{7.039572 - 1}{0.004074}$$
$$1\,273\,890.28 = R\frac{6.039572}{0.004074}$$
$$1\,273\,890.28 = R(1\,482.46)$$
$$\frac{1\,273\,890.28}{1\,482.46} = R$$
$$R = 859.31$$

Por lo tanto, \$859.31 es la cantidad que debe ahorrar mensualmente el joven de 25 años para acumular \$1 273 890.28 al cumplir 65 años, si se supone que la tasa de interés efectiva anual del mercado es de 5%.

c) La determinación del ahorro mensual que debe realizar una persona de 50 años para acumular dicha cantidad se calcula utilizando la misma fórmula del monto de una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata.

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

En este caso se trata de una persona ya madura, que cuenta con un periodo de sólo 15 años, esto es 180 meses, para integrar el mismo monto de \$1 273 890.28. Si se supone que se aplica la misma tasa de interés efectivo anual de 5% (0.4074% mensual efectivo), se tienen ya todos los valores necesarios para sustituir en la ecuación:

$$1\,273\,890.28 = R\frac{(1+0.004074)^{180} - 1}{0.004074}$$
$$1\,273\,890.28 = R\frac{2.078882 - 1}{0.004074}$$
$$1\,273\,890.28 = R\frac{1.078882}{0.004074}$$
$$1\,273\,890.28 = R(264.82)$$
$$\frac{1\,273\,890.28}{264.82} = R$$
$$4\,810.40 = R$$
$$R = 4\,810.40$$

En este caso, \$4 810.40 es la cantidad que debe ahorrar mensualmente la persona de 50 años para acumular \$1 273 890.28 al cumplir 65 años, si se supone que la tasa de interés efectiva anual del mercado es de 5%. Como puede observarse es una cantidad casi 6 veces mayor a la que debe ahorrar la persona de 25 años. El efecto que tiene la acumulación del interés es notable y por ello se puede destacar la importancia de iniciar el ahorro para el retiro desde las primeras etapas de la vida laboral.

d) La determinación de la prima de un seguro se verá con mayor claridad en el capítulo de anualidades contingentes, pero, de manera intuitiva, puede ilustrarse de la siguiente manera:

- Se calcula la probabilidad de que un hombre de 25 años viva hasta los 65 años, edad a la cual estaría obligada la aseguradora a pagar la pensión. Para ello se aplica la fórmula (11.8), la cual nos permite determinar la probabilidad de que una persona de x años de edad sobreviva por lo menos n años:

$$_{n}p_{x} = \frac{v_{x+n}}{v_{x}}$$

Así, se determinará la probabilidad de que un hombre de 25 años sobreviva hasta los 65 años, sustituyendo los valores correspondientes de la tabla II de mortalidad masculina en esta fórmula:

$$_{25}p_{40} = \frac{v_{65}}{v_{25}}$$

$$_{25}p_{40} = \frac{74\,877}{96\,820}$$

$$_{25}p_{40} = 0.77336294$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un hombre de 25 años viva hasta los 65 años es de 77.34%. Si se supone que toda la población está asegurada, la aseguradora debería integrar fondos de reserva para pagar pensiones a no más de 77.34% de los hombres que la integran. En ese orden de ideas, la prima que debería cobrar, suponiendo que no hay gastos ni utilidad para la aseguradora, equivaldría a 77.34% de los depósitos que debería hacer el joven de 25 años que quisiera asegurar su pensión para el periodo de los 65 a los 80 años, esto es, debería cubrir \$664.59 mensuales hasta cumplir los 65 años, para que posteriormente la aseguradora le entregara \$1 273 890.28, cantidad con la que esta persona podría obtener una pensión de 10 000 pesos mensuales.

Como puede observarse, el depósito que debe realizar el joven que se inicia en la carrera laboral es menor que si constituye su propio fondo, puesto que la aseguradora no cubrirá todas las pensiones, ya que 22.66% de la población varonil morirá antes de cumplir los 65 años.

e) El caso de la determinación de la prima que debe cobrarse a una mujer es similar:

- Se calcula la probabilidad de que una mujer de 25 años viva hasta los 65 años, edad a la cual estaría obligada la aseguradora a pagar la pensión. Para ello se aplica la fórmula (11.8), la cual nos permite determinar la probabilidad de que una persona de x años de edad sobreviva por lo menos n años:

$$_{n}p_{x} = \frac{v_{x+n}}{v_{x}}$$

Así, se determinará la probabilidad de que una mujer de 25 años sobreviva hasta los 65 años, sustituyendo los valores correspondientes de la tabla III de mortalidad femenina en esta fórmula:

$$_{25}p_{40} = \frac{v_{65}}{v_{25}}$$

$$_{25}p_{40} = \frac{84\,337}{97\,932}$$

$$_{25}p_{40} = 0.861179$$

Por lo tanto, la probabilidad de que una mujer de 25 años viva hasta los 65 años es de 86.11%, prácticamente 9% superior a la de los hombres. Si se supone que toda la población está asegurada, la aseguradora debería integrar fondos de reserva para pagar pensiones a 86.11% de las mujeres que la integran. Entonces, la prima que debería cobrar, suponiendo que no hay gastos ni utilidad para la aseguradora, equivaldría a 86.11% de los depósitos que debería hacer la joven de 25 años que quisiera asegurar su pensión para el periodo de los 65 a los 80 años, esto es, debería cubrir \$740.02 mensuales hasta cumplir los 65 años, para que posteriormente la aseguradora le entregara \$1 273 890.28, cantidad con la que esta persona podría obtener una pensión de 10 000 pesos mensuales.

Como puede observarse, el depósito que debe realizar la joven que se inicia en la carrera laboral es menor que si constituye su propio fondo, puesto que la aseguradora no cubrirá todas las pensiones, ya que 13.89% de la población femenina morirá antes de cumplir los 65 años.

11.9 Uso de Excel®

En esta sección se resuelven algunos de los ejercicios del capítulo utilizando las fórmulas y funciones de Excel®.

11.9.1 Valor actual de un pago contingente (sección 11.6)

En el ejemplo 11.6.1 se pide determinar el valor actual de la esperanza matemática de un nuevo empleado de un banco que ofrece un bono de \$10 000 a todos los trabajadores que cumplen cinco años de antigüedad. Debe considerarse que, de acuerdo con las estadísticas del propio banco, 40% del personal de nuevo ingreso cambia de empleo antes de cumplir los cinco años y que la tasa de interés de mercado es de 10% anual efectiva.

Para resolver el problema se siguen los pasos que a continuación se detallan.

a) Se determina la probabilidad p de que el nuevo empleado permanezca en el banco hasta cumplir los cinco años:

$$p = 1 - q$$
$$p = 1 - 0.40$$
$$p = 0.60$$

b) Se determina el valor de la esperanza matemática a los cinco años:

$$E(M) = pM$$
$$E(M) = 0.60(10\,000)$$
$$E(M) = 6\,000$$

c) Se determina el valor actual de la esperanza matemática utilizando la fórmula de interés compuesto:

$$M = C(1+i)^n$$
$$C = \frac{M}{(1+i)^n} = M(1+i)^{-n}$$

Por lo tanto, para determinar el valor presente de la esperanza matemática se tiene:

$$C = pM(1+i)^{-n}$$
$$C = 6\,000(1+0.10)^{-5}$$
$$C = 6\,000(0.620921)$$
$$C = 3\,725.53$$

Como ya se vio, se puede hacer uso de las funciones de Excel para resolver estos problemas. La fórmula para calcular el valor actual con Excel es:

VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)

donde:

Tasa: tasa de interés por periodo.
Nper: número total de periodos de pago.
Pago: pago que se efectúa cada periodo.
Vf: monto o valor futuro total de una serie de pagos futuros.
Tipo: se utiliza en el caso de las anualidades para indicar si se trata de una anualidad vencida (0 u omitido), o anticipada (1). Puesto que aquí se tiene un valor único, no se utiliza.

Sustituyendo se tiene:

VA(0.10,5,,–6000,0)

(Cabe destacar que el valor futuro se deberá capturar con signo negativo en la fórmula de la función).

En la hoja de Excel se puede resolver por cualquiera de las tres formas que se ilustran:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel Valor Actual***	***Valor actual a interés compuesto***
2			=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)	***M = C(1+i)^-n***
3			=VA(0.10,5,,-6000,)	
4	Tasa	0.10	$3 725.53	**Utilizando referencia a celdas**
5	Nper	5		=(B7*(1+B4)^-B5)
6	Pago	-		3 725.53
7	Monto (Valor futuro)	6 000.00		
8				**Utilizando valores en la fórmula**
9				=(6000*(1+0.10)^-5)
9				3 725.53
10				

El valor que se obtiene es el mismo que aparece en el texto.

En el ejemplo 11.6.2 se ilustra el caso de una compañía minera que realiza inversiones de prospección de una veta de la cual espera obtener utilidades por 2 000 000 de dólares en un plazo de 3 años. Se pide determinar la esperanza matemática considerando que las estadísticas muestran que 65% de sus prospecciones resultan favorables y que la tasa de interés del mercado es de 15%.

Para resolver el problema se siguen los pasos que a continuación se detallan.

a) Puesto que ya se conoce que la probabilidad de éxito es de 65%, se determina el valor de la esperanza matemática a tres años, utilizando dicho valor:

$$E(M) = pM$$
$$E(M) = 0.65(2\,000\,000)$$
$$E(M) = 1\,300\,000$$

b) Se determina el valor actual de la esperanza matemática utilizando la fórmula de valor actual a interés compuesto:

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} = M(1+i)^{-n}$$

Por lo tanto, para determinar el valor presente de la esperanza matemática se tiene:

$$C = pM(1+i)^{-n}$$
$$C = 1\,300\,000(1+0.15)^{-3}$$
$$C = 1\,300\,000(0.657516)$$
$$C = 854\,771.10$$

Sustituyendo en la función de Excel se tiene:

VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)
VA(0.15,3,,–1 300 000,0)

(El valor futuro se deberá capturar con signo negativo en la fórmula de la función).

En la hoja de Excel® se puede resolver por cualquiera de las tres formas que se ilustran a continuación:

	A	B	C	D
1	**Datos**		***Función Excel Valor Actual***	***Valor actual a interés compuesto***
2			=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)	***M = C(1+i)^-n***
3			=VA(0.15,3,,-1300000,)	
4	Tasa	0.15	854 771.10	**Utilizando referencia a celdas**
5	Nper	3		=(B7*(1+B4)^-B5)
6	Pago	-		854 771.10
7	Monto (Valor futuro)	1300 000.00		
8				**Utilizando valores en la fórmula**
9				=(1300000*(1+0.15)^-3)
9				854 771.10
10				

El valor que se obtiene es el mismo que el que aparece en el texto.

En el ejemplo 11.6.3 se pide determinar el importe que debe prestar un banco a una empresa que tiene una capacidad de pago de $150 000 al cabo de seis meses, si las estadísticas de la institución de crédito muestran que 2% de los préstamos resulta incobrable y la tasa de interés del mercado es de 10% semestral.

Para resolver el problema se siguen los pasos que a continuación se detallan.

a) Dado que 2% de los créditos no se recuperan, se infiere que 98% de ellos se recuperan. Por lo tanto, se determina el valor de la esperanza matemática a seis meses, utilizando dicho valor.

$$E(M) = pM$$
$$E(M) = 0.98(150\,000)$$
$$E(M) = 147\,000$$

b) Se determina el valor actual de la esperanza matemática utilizando la fórmula de valor actual a interés compuesto:

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} = M(1+i)^{-n}$$

Sustituyendo, se tiene:

$$C = pM(1+i)^{-n}$$
$$C = 147\,000(1+0.10)^{-1}$$
$$C = 147\,000(0.909090)$$
$$C = 133\,636.36$$

Sustituyendo en la función de Excel se tiene:

VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)
VA(0.10,1,, –147000,0)

(El valor futuro se deberá capturar con signo negativo en la fórmula de la función).

En la hoja de Excel® se puede resolver por cualquiera de las tres formas que se ilustran a continuación:

	A	B	C	D
1	Datos		***Función Excel Valor Actual***	***Valor actual a interés compuesto***
2			=VA(tasa,nper,pago,vf,tipo)	***M = C(1+i)^-n***
3			=VA(0.10,1,,-147000,)	
4	Tasa	0.10	$133 636.36	**Utilizando referencia a celdas**
5	Nper	1		=(B7*(1+B4)^-B5)
6	Pago	-		133 636.36
7	Monto (Valor futuro)	147 000.00		
8				**Utilizando valores en la fórmula**
9				=(147000*(1+0.10)^-1)
9				133 636.36
10				

El valor que se obtiene es el mismo que el que aparece en el texto.

11.10 Resumen

En el presente capítulo se introdujo el concepto de *probabilidad matemática*, y se dijo que si un evento tiene que resultar de n distintas, pero igualmente posibles maneras, y si a de esas maneras son consideradas como aciertos y $f = n - a$ son consideradas como fallas, entonces la razón $p = a/n$ se considera como la *probabilidad matemática de acierto.*

Por otro lado, se dijo que la *probabilidad estadística* es la razón a/n determinada como resultado de la observación y registro estadístico de n eventos de los cuales a fueron considerados como aciertos.

Al trabajar eventos y probabilidades es necesario distinguir entre los *eventos mutuamente excluyentes* que son aquellos en los que la ocurrencia de uno inhibe totalmente la ocurrencia de los otros, y los *eventos independientes*, que son aquellos en los que la ocurrencia de un evento no afecta la de los demás.

Se introdujo asimismo el concepto de *pago contingente* como aquel cuya liquidación está sujeta a la ocurrencia de un evento E que tiene probabilidad p de ocurrir.

Se afirmó que la *esperanza matemática* es el producto resultante de multiplicar un monto M que se espera recibir por la probabilidad de recibirlo.

Finalmente, se definieron las tablas de mortalidad como aquellas que registran el número de muertos por grupo de edad observadas en una base numerosa de población que son utilizadas para calcular las primas que deben pagarse al adquirir seguros de vida.

Comprobación del capítulo

Si ha leído el capítulo completo, el lector debe:

- Definir la probabilidad matemática.
- Definir la probabilidad estadística.
- Explicar la diferencia entre una y otra.
- Distinguir entre eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes.
- Realizar cálculos elementales que involucren el uso de probabilidades.
- Comprender el concepto de esperanza matemática.
- Calcular la esperanza matemática.
- Definir lo que es una tabla de mortalidad.
- Realizar cálculos de probabilidad de vida o muerte auxiliándose de una tabla de mortalidad.
- Realizar cálculos de probabilidad de vida o muerte mediante el empleo de la hoja de cálculo de Microsoft® Excel®.

Términos y conceptos importantes

- Esperanza matemática
- Eventos mutuamente excluyentes
- Eventos independientes
- Pagos contingentes
- Probabilidad estadística
- Probabilidad matemática
- Tabla de mortalidad

Fórmulas importantes

$$p = \frac{a}{a+f} = \frac{a}{n} \quad \textbf{(11.1)}$$

$$q = \frac{f}{a+f} = \frac{f}{n} \quad \textbf{(11.2)}$$

$$p = 1 - q \quad \textbf{(11.3)}$$

$$q = 1 - p \quad \textbf{(11.4)}$$

$$p(E_1 \text{ o } E_2 \text{ o} \ldots E_n) = p(E_1) + p(E_2) + \cdots + p(E_n) \quad \textbf{(11.5)}$$

$$p(E_1 \text{ y } E_2 \text{ y} \ldots E_n) = p(E_1) \times p(E_2) \times \cdots \times p(E_n) \quad \textbf{(11.6)}$$

$$p_x = \frac{v_{x+1}}{v_x} \quad \textbf{(11.7)}$$

$$_n p_x = \frac{v_{x+n}}{v_x} \quad \textbf{(11.8)}$$

$$q_x = \frac{m_x}{v_x} \quad \textbf{(11.9)}$$

$$_n q_x = 1 - {_n p_x} = \frac{v_x - v_{x+n}}{v_x} \quad \textbf{(11.10)}$$

$$_{n/k} q_x = \frac{v_{x+n} - v_{x+n+k}}{v_x} \quad \textbf{(11.11)}$$

$$D_x = (1+i)^{-x} v_x \quad \textbf{(11.12)}$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{99} + D_{100} \quad \textbf{(11.13)}$$

Ejercicios complementarios

1. En una caja se depositan 8 bolas blancas, 10 bolas negras y 4 bolas rojas. Determine las probabilidades de:
   a) sacar una bola roja en la primera extracción.
   b) extraer dos bolas blancas consecutivas (sin reemplazo).
   c) sacar dos bolas blancas consecutivas (con reemplazo).
   d) extraer una bola blanca, una bola negra y una bola roja en forma consecutiva (sin reemplazo).
   e) sacar una bola que no sea negra.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que de una baraja ordinaria (de 52 naipes) se extraiga:
   a) un par de ases en 2 extracciones consecutivas?
   b) un par en 2 extracciones consecutivas?
   c) una tercia en 3 extracciones consecutivas?
   d) una tercia y un par en 5 extracciones consecutivas?
3. Una ruleta comprende los números del 1 al 36 más el 00. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sorteado sea:
   a) impar?
   b) mayor que 20?
   c) par mayor que 10?
   d) múltiplo de 5?
4. En una escuela primaria se detectó que 1 480 de sus 3 200 alumnos padecen caries. Si una escuela vecina alberga 2 650 niños, estime el número de ellos que tendrán caries.
5. Estudios médicos han demostrado que 80% de las personas que fuman diariamente contraen enfermedades crónicas del aparato respiratorio. Si en una universidad 42% de sus 16 000 estudiantes fuman cotidianamente, determine el número que adquirirá enfermedades crónicas del aparato respiratorio a causa del tabaco.
6. En un juego de dados, la banca paga 10 a 1 al que acierte la suma de los puntos de los dos dados, reservándose para sí el número 7. Determine la esperanza matemática de una persona que apuesta \$1 000 al:
   a) 12 *b*) 6 *c*) 3

7. Una persona apuesta $250 al triunfo del equipo local en el juego de futbol de la semana. ¿Cuál es su esperanza matemática si el conjunto ha ganado 8 de los 14 encuentros que ha jugado como local?
8. En un juego de beisbol, un fanático apuesta $100 a que su favorito ganará los 3 juegos de una serie. ¿Cuál es su esperanza matemática si en cada juego el equipo tiene 20% de probabilidades de perder?
9. El tercer hijo de los reyes de un pequeño país heredará la corona y $500 millones en el caso de que sus hermanos muriesen antes de cumplir 21 años. Si el mayor tiene 15 años, el mediano 12 y el más pequeño 10, ¿cuál es su esperanza matemática considerando que las probabilidades de muerte del primero son de 0.05 y del segundo de 0.04?
10. Juan y Carlos apuestan en un juego de cartas. Juan ganará si la primera carta que aparezca es un rey, mientras que ganará Carlos si aparece primero un diamante (a excepción del rey). ¿Cuánto debe apostar Carlos para que el juego sea equitativo si Juan apostó $1 000?
11. Un padre deja a sus hijos de 14 y 10 años de edad una herencia por $300 000 y $250 000 respectivamente, las cuales les serán entregadas cuando cumplan 18 años. El dinero se deposita en una cuenta bancaria que paga 20% de interés anual. ¿Cuál es la esperanza matemática de cada uno de los hijos si la probabilidad de morir antes de los 18 años es de 0.0095 para el primero y 0.0120 para el segundo, y la tasa de interés del mercado es de 15% anual?
12. Una persona de 65 años cuya salud es muy delicada desea adquirir un seguro que le garantice una renta de $250 000 al año mientras viva. Sus posibilidades de supervivencia son las siguientes:

Años	Probabilidad de supervivencia
1	0.60
2	0.40
3	0.20
4	0.00

Si la tasa de interés es de 20% anual, ¿cuál es el valor actual de los pagos? ¿Cuál será el costo del seguro sin considerar gastos ni utilidades?

13. Una persona de 30 años compra un seguro de vida por $750 000 que lo protege durante un año. Si la probabilidad de muerte a los 30 años es de 0.00239 y la tasa de interés es de 18%, ¿cuál es el precio que debe pagar sin considerar gastos ni utilidades?
14. Un banco estima en 2% su porcentaje de cuentas incobrables. ¿Qué tasa de interés debe cobrar a una empresa que le solicita un préstamo si la tasa de mercado es de 25%?
15. La tasa de interés para créditos garantizados que cobra un banco a sus clientes es de 20%. ¿Cuál es el porcentaje de cuentas incobrables que maneja si a los créditos no garantizados les carga 25% de interés?
16. Una rama industrial se ha visto seriamente afectada por la situación económica prevaleciente, y su porcentaje de cuentas incobrables se ha incrementado. ¿Cuál es dicho porcentaje si el banco del ejemplo anterior cobra 28% de interés a las empresas de dicho sector?
17. Una compañía hipotecaria ha determinado la siguiente tabla de probabilidades de recuperación de préstamos:

Proporción recuperada del adeudo	Probabilidad
0%	0.00
50%	0.01
75%	0.04
90%	0.05
100%	0.90

¿Qué tasa debe cobrar a los solicitantes de préstamos si la tasa de interés del mercado es de 14%?

18. ¿Cuál es el precio de una obligación con valor de $1 000 cuyo valor de redención a 5 años es de $1 020, si paga interés de 18% convertible trimestralmente y existe una probabilidad de quiebra de 0.1% en cualquiera de los periodos de pago?
19. Carolina cumplió 18 años al ingresar a la universidad. Determine la probabilidad de que:
    a) fallezca en el lapso de 5 años que dura su carrera.
    b) fallezca antes de cumplir 2 años.
    c) celebre con sus condiscípulos el 10o. aniversario de su graduación. Utilice las tablas de experiencia mexicana que aparecen en el apéndice (tablas II y III).
20. El padre de Carolina tenía 50 años al entrar ella a la universidad. Determine la probabilidad de que:
    a) esté vivo para asistir a la graduación de su hija.
    b) fallezca el año de la graduación de su hija.
21. Si la generación de Carolina está formada por 160 personas de 18 años, 200 de 19 y 120 de 20 años, determine de acuerdo con las probabilidades de vida:
    a) El número de los que estarán vivos para la fiesta de graduación.
    b) Los que celebrarán los 10 años de la terminación de la carrera.
    c) Los que celebrarán los 25 años.
    d) Los que celebrarán los 50 años.

Matemáticas en internet. Probabilidad y tablas de mortalidad

11.2 Concepto de probabilidad

- Publicación de la serie "Desarrollo del pensamiento matemático" avalada por la UNESCO, que contiene una introducción didáctica a la probabilidad.
  http://publicaciones.caf.com/media/1218/70.pdf
- Definición de *probabilidad* y algunos otros conceptos importantes. Además, se presentan diversos ejercicios importantes relacionados con el tema.
  http://metodosunoydos.galeon.com/enlaces2221651.html
- Documento que contiene una introducción detallada a la estadística y a la probabilidad.
  http://www.ugr.es/~eues/webgrupo/Docencia/MonteroAlonso/estadisticaII/tema1.pdf
- Presentación en línea con una introducción a la probabilidad y la estadística.
  http://www.slideshare.net/tito.carrreras/una-introduccin-a-probabilidad
- Publicación de la serie "Desarrollo del pensamiento matemático" avalada por la UNESCO, que contiene una didáctica introducción a la estadística.
  http://publicaciones.caf.com/media/1217/69.pdf

11.3 Probabilidad matemática

- Información y algunos ejemplos interesantes acerca de este tipo de probabilidad.
  http://matematica-educativa.blogspot.mx/2007/05/probabilidades.html
- Video que presenta una introducción a la probabilidad matemática.
  http://educacion.practicopedia.lainformacion.com/matematicas/como-se-resuelve-un-problema-de-probabilidad-10823

11.4 Probabilidad estadística

- Introducción a la estadística descriptiva y probabilidad.
  http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0278-01/indice.html´
- Página que ofrece acceso a diversos videos que complementan la enseñanza presencial de la probabilidad y estadística.
  http://www.ia.uned.es/~fjdiez/docencia/videos-prob-dec/

11.5 Esperanza matemática

- Introducción a la esperanza matemática.
  http://oslber.edublogs.org/files/2008/05/esperanza-matematica.pdf
- Ejemplo de esperanza matemática aplicada a las loterías.
  http://www.estadisticaparatodos.es/taller/loterias/esperanza.html
- Ejercicios que involucran el cálculo de la esperanza matemática.
  http://www.vitutor.com/pro/3/a_g.html
- Aplicación del concepto de esperanza matemática a los juegos de azar.
  http://www.eyeintheskygroup.com/Azar-Ciencia/Analisis-Estadistico-Juegos-de-Azar/Esperanza-Juego-de-Azar.htm
- Video que contiene una introducción a la esperanza matemática.
  http://www.youtube.com/watch?v=xJdEs_KndHg
- Video que presenta la aplicación de la esperanza matemática a la especulación en la compra y venta de divisas.
  http://www.forexduet.com/consejos/la-esperanza-matematica

11.6 Valor actual de un pago contingente

- Página que contiene información para reflexionar sobre el retiro, fondos de retiro y planes de pensiones.
  http://finanzaspracticas.com.mx/323460-Identificar-el-mejor-Fondo-para-el-Retiro.note.aspx
- Planes de pensiones en una casa de bolsa en México.
  http://www.gbm.com.mx/home/guia-3.html

11.7 Tablas de mortalidad

- Introducción a las tablas de mortalidad.
  http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lat/rocha_i_m/capitulo3.pdf
- Contiene información sobre los índices de mortalidad de algunos países de Latinoamérica, entre ellos México. Además, se presentan datos de varios años anteriores para hombres y mujeres. Sin duda alguna, es una base de datos muy completa.
  http://www.eclac.cl/Celade/publica/bol67/DE_SitDemBD67.html

CAPÍTULO

12

Anualidades contingentes

TEMARIO

12.1 Introducción

12.2 Valor actual de un dotal puro

12.3 Anualidades vitalicias vencidas

12.4 Anualidades vitalicias anticipadas

12.5 Anualidades vitalicias diferidas

12.6 Anualidades contingentes temporales

12.7 Aplicaciones

12.8 Resumen

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

- Definir y explicar cada una de las anualidades que se mencionan en el temario
- Identificar situaciones en las que se puedan aplicar estos conceptos
- Plantear y resolver problemas que impliquen la resolución de los diversos casos de anualidades que se presentan en el capítulo

12.1 Introducción

Como se vio antes, una *anualidad contingente* es aquella en la que su fecha de inicio o la de terminación, o ambas, dependen de algún suceso que se sabe va a ocurrir, pero no se sabe cuándo.

Un ejemplo muy común de este tipo de anualidad sería el pago de una pensión a un cónyuge por motivo del fallecimiento del otro. Otro ejemplo sería el pago de una pensión a un trabajador que se jubila; se le paga cierta cantidad periódica mientras vive.

Una *renta vitalicia* es una anualidad que se paga a una persona a partir de cierta fecha y mientras vive, y se le podría denominar *anualidad vitalicia.*

Una *anualidad contingente temporal* es aquella en la que se paga un número fijo de rentas, a diferencia de una renta durante todo el tiempo que la persona viva.

Un *dotal puro* es un compromiso de pagar a una persona determinada cantidad en una fecha futura, siempre y cuando esté viva para recibirla. La constitución de fondos de pensiones para que las personas ahorren en ellos y constituyan capitales que puedan asegurarles pensiones vitalicias a partir del momento de su retiro, agrega especial interés a los conceptos que se presentan en este capítulo.

Son muy numerosas las aplicaciones y variaciones de las anualidades contingentes y, de hecho, su estudio exhaustivo compete al área del cálculo actuarial. Para los propósitos de este libro, se ilustrarán sólo algunos de los principales tipos de anualidades contingentes y, para hacerlo, conviene comenzar con la explicación del concepto del valor actual de un dotal puro.

12.2 Valor actual de un dotal puro

Un dotal puro es una promesa de pagar una cantidad determinada en una fecha futura, si el beneficiario continúa con vida.

Ya vimos que el valor actual de *una* cantidad pagadera a futuro está dado por

$$C = M(1+i)^{-n}$$

EJEMPLO 12.2.1

El valor actual de \$500 000 pagaderos dentro de 5 años a 8% efectivo anual es:

$$C = 500\,000(1.08)^{-5}$$
$$C = 500\,000(0.680583197) = \$340\,291.60$$

Por otro lado, la probabilidad de que una persona que tiene x años de edad permanezca viva a los $x + n$ años está dado por:

$$_n p_x = \frac{v_{x+n}}{v_x}$$

EJEMPLO 12.2.2

¿Cuál es la probabilidad de que un hombre que tiene ahora 54 años de edad llegue a los 59?

SOLUCIÓN:

$$v_x = v_{54} = 87\,048$$
$$v_{x+n} = v_{59} = 71\,631$$
$$_n p_x = \frac{71\,631}{87\,048} = 0.822891$$

Combinando los resultados de los ejemplos 2.1 y 2.2:

$$M(1+i)_n\, p_x = 340\,291.60(0.822891)$$
$$M(1+i)_n\, p_x = 280\,022.83$$

Sería el valor actual de \$500 000, pagaderos dentro de 5 años a una persona que actualmente tiene 54 años, si llega a la edad de 59 años.

Conviene hacer hincapié en el significado de los cálculos anteriores. Se puede decir que el valor actual de un dotal puro es el valor actual de la cantidad multiplicado por la probabilidad de que el beneficiario cobre el dotal (la probabilidad de que esté vivo para cobrar).

Es común representar por medio del símbolo ${}_nE_x$ el valor actual de un dotal puro de \$1, pagadero a una persona que tenga ahora la edad x, y alcance la edad de $x + n$ para cobrar.

Utilizando esa notación:

$$ {}_nE_x = (1+i)^{-n} \frac{v_{x+n}}{v_x} \qquad \textbf{(12.1)}$$

Y en el ejemplo sería: $${}_nE_x = (1.08)^{-5} \frac{71\,631}{87\,048} = 0.560046$$

Y el valor actual del dotal de \$500 000 es,

$$C = 500\,000(0.560046) = \$208\,022.83$$

Así, se podría plantear el valor actual de un dotal puro de \$$M$ a futuro como:

$$\begin{aligned} C &= M \ {}_nE_x \\ C &= M(1+i)^{-n} \frac{v_{x+n}}{v_x} \end{aligned} \qquad \textbf{(12.2)}$$

Se introduce el símbolo ${}_nE_x$ porque resulta conveniente para el análisis de las anualidades vitalicias.

Por otro lado, aunque se pueden manejar anualidades contingentes mensuales, semestrales, etc., sólo nos ocuparemos de las que tienen plazo anual.

Con respecto a la tasa de interés y considerando que las tasas reales que se manejan en el medio de los seguros son de cuando mucho 4.5%, utilizaremos esta tasa en lo que resta del capítulo para simplificar el análisis; los valores conmutados de las tablas II y III del final del libro se construyeron con ella.

Es fácil encontrar el valor actual de anualidades contingentes con otras tasas si simplemente se incluye el valor pertinente.

EJEMPLO 12.2.3

¿Cuál es el valor actual de un dotal puro de \$1 000 000 pagadero a una mujer de 25 años si vive para cumplir 65 años, cuando el interés es de 4.5% anual?

Solución:

$$\begin{aligned} M &= 1\,000\,000 \\ x &= 25 \\ n + x &= 65 \\ i &= 0.045 \end{aligned}$$

De la tabla III, al igual que antes;

$$\begin{aligned} v_{25} &= 97\,932 \\ v_{65} &= 84\,337 \\ C &= 1\,000\,000(1.045)^{-40} \frac{84\,337}{97\,932} \\ &= 1\,000\,000(0.1719287011)(0.86117919) \\ &= \$148\,061.42 \end{aligned}$$

EJEMPLO 12.2.4

¿Cuál es el valor actual de un dotal puro de \$250 000 pagadero a un hombre cuando cumpla los 40 años, si ahora tiene 32 y el interés es de 4.5% anual?

Solución:

$$M = 250\,000$$
$$x = 32$$
$$n + x = 40$$
$$i = 0.045$$

De la tabla II:

$$v_x = v_{32} = 95\,608$$
$$v_{40} = 93\,746$$
$$C = 250\,000(1.045)^{-8}\frac{93\,746}{95\,608}$$
$$= 250\,000(0.703185127)(0.98052464)$$
$$= \$172\,372.59$$

EJEMPLO 12.2.5

Si el valor actual de un dotal puro pagadero a una mujer de 47 años al cumplir los 65 años es de \$2 321 933, calcular el valor a futuro.

Solución:

$$C = 2\,321\,933$$
$$x = 47$$
$$n + x = 65$$

$$2\,321\,933 = M\,{}_nE_x = M\frac{v_{x+n}}{v_x} = M\frac{v_{65}}{v_{47}} = M\frac{84\,337}{95\,507}$$

De donde,

$$M = \frac{2\,321\,933(95\,507)}{84\,337}$$
$$M = \$2\,629\,461$$

EJEMPLO 12.2.6

¿Cuál sería el valor del dotal puro del ejemplo 12.2.4 si la persona involucrada fuera una mujer en vez de un hombre?

Solución:
Aquí el monto sería igual: \$250 000, pero cambiarían tanto v_{32} como v_{40}, de la siguiente manera:

$$C = 250\,000(1.045)^{-8}\frac{96\,814}{97\,567} = 250\,000(0.703185127)(0.99228223)$$
$$C = \$174\,439.53$$

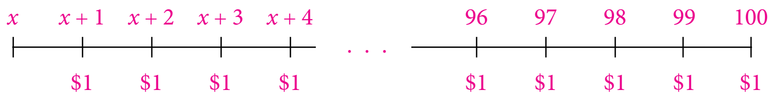
Se observa que esta cantidad es superior al correspondiente valor del dotal para un hombre, que fue de \$172 372.59, lo cual se debe, por supuesto, a que el cociente entre v_{40} y v_{32} es mayor en el caso de la mujer, lo cual, a su vez, se debe a la mayor longevidad promedio de las mujeres mexicanas, como sucede en casi todos los países del mundo.

12.3 Anualidades vitalicias vencidas

Es el caso de *pagos* de una renta de por vida a una persona con x años de edad. Como es una *anualidad vencida*, el primer pago de la renta se hace cuando el rentista tiene x +1 años, el segundo cuando tiene $x + 2$ años, y así sucesivamente mientras esté vivo. En forma gráfica:

Alternativamente, podemos considerar que una anualidad vitalicia es un conjunto de dotales puros y, por ello, el valor actual de una anualidad contingente puede contemplarse como la suma de los valores actuales de cada uno de esos dotales.

Si suponemos, para facilitar la exposición, que el monto de cada una de las rentas de la anualidad o, lo que es lo mismo, cada uno de los dotales puros, tiene un valor de \$1, la situación podría representarse gráficamente como:



Si, por otro lado, denotamos por a_x el valor actual de una anualidad vitalicia ordinaria de \$1 por año, para una persona de edad x y, dado que hemos utilizado el símbolo ${}_nE_x$ para representar el valor actual de un dotal puro unitario, el valor actual de la anualidad sería:

$$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \cdots \text{ hasta el final de la tabla } (x = 100)$$

Y como

$${}_nE_x = (1+i)^{-n}\frac{v_{x+n}}{v_x}$$

Entonces

$$a_x = (1+i)^{-1}\frac{v_{x+1}}{v_x} + (1+i)^{-2}\frac{v_{x+2}}{v_x} + \cdots + v_{100}$$

$$a_x = \frac{(1+i)^{-1}v_{x+1} + (1+i)^{-2}v_{x+2} + \cdots + v_{100}}{v_x}$$

Si la persona tiene, por ejemplo, 30 años de edad, el numerador de esta última expresión incluye 70 términos y su evaluación es evidentemente muy tediosa. Es en este punto donde se pueden utilizar las tablas de valores conmutados para simplificar los cálculos. Los valores conmutados aparecen en las tablas II y III al final del libro. Como se vio en el capítulo anterior:

$$D_x = (1 + i)^{-x}v_x \tag{11.12}$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{100} \tag{11.13}$$

Si

$$a_x = \frac{(1+i)^{-1}v_{x+1} + (1+i)^{-2}v_{x+2} + \cdots + v_{100}}{v_x}$$

Para simplificar esta expresión, debemos multiplicar tanto el numerador como el denominador por $(1 + i)^{-x}$ y obtenemos

$$a_x = \frac{(1+i)^{-x-1}v_{x+1} + (1+i)^{-x-2}v_{x+2} + \cdots + v_{100}}{(1+i)^{-x}v_x}$$

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + v_{100}}{D_x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \tag{12.3}$$

Por su parte, el valor actual C de una anualidad vitalicia vencida de $\$R$ anuales, pagaderos a una persona de edad x es:

$$C = Ra_x$$

$$C = R\frac{N_{x+1}}{D_x} \tag{12.4}$$

Además, al *valor actual de una anualidad contingente* (vencida, anticipada o diferida) se le conoce como *prima neta única*, ya que, evidentemente, tiene amplia aplicación en el área de seguros.

EJEMPLO 12.3.1

¿Cuál es la prima neta única de una anualidad vencida de \$150 000 anuales pagadera a una mujer de 40 años, si el interés es de 4.5% anual?

SOLUCIÓN:

$$R = 150\,000$$
$$i = 0.045$$
$$x = 40$$
$$C = R\,a_x$$
$$C = 150\,000\frac{N_{x+1}}{D_x} \text{ y, de la tabla III}$$
$$C = 150\,000\frac{292\,420.0}{16\,645.1}$$
$$C = 150\,000\,(17.56793291)$$
$$C = \$2\,635\,189.94$$

EJEMPLO 12.3.2

El señor López tiene 58 años de edad y va a jubilarse. La empresa debe pagarle, de acuerdo con su plan de pensiones, \$60 000 anuales vencidos durante el tiempo que viva. Calcular qué pago único realizado en el momento de jubilarse sería equivalente a los pagos anuales.

SOLUCIÓN:

$$R = 60\,000$$
$$i = 0.045$$
$$x = 58$$
$$C = R\frac{N_{x+1}}{D_x} = 60\,000\frac{N_{59}}{D_{58}}$$
$$C = 60\,000\frac{81\,183.3}{6\,507.7}$$
$$C = \$748\,497.63$$

EJEMPLO 12.3.3

El valor actual de una anualidad vitalicia pagadera a una mujer de 54 años es de \$500 000. Calcular el valor del pago anual.

SOLUCIÓN:

$$C = 500\,000$$
$$x = 54$$

$$C = R\frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$500\,000 = R\frac{N_{55}}{D_{54}} = R\left(\frac{124\,797.5}{8\,636.5}\right)$$

$$R = \frac{500\,000(8\,636.5)}{124\,797.5} = 34\,602.06$$

12.4 Anualidades vitalicias anticipadas

Una anualidad vitalicia anticipada es un conjunto de pagos (anuales en el caso de este libro) pagaderos a una persona de x años de edad mientras vive. Como los pagos se hacen al *principio de cada año*, la anualidad es anticipada. Gráficamente:

Su valor actual es también la suma de los valores actuales de un conjunto de dotales puros; en este caso, también para simplificar el análisis, supondremos un pago anual de \$1 por anticipado y utilizaremos el símbolo $\ddot{a}_x$ para denotar el valor actual de una anualidad vitalicia anticipada de \$1 anuales a una persona de edad x, pagadera mientras viva.

Como el primer pago se hace en el momento de realizar la operación, y como se le paga en tanto viva, el valor actual de esta anualidad es un pago en el momento de formalizar la operación más el valor actual de una anualidad contingente vencida y unitaria, o

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

Sustituyendo $a_x = \dfrac{N_{x+1}}{D_x}$ tenemos

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots}{D_x} \text{ (hasta el final de la tabla)}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad \textbf{(12.5)}$$

EJEMPLO 12.4.1

Encontrar el valor actual (o prima neta única) de una anualidad de \$1 anuales pagaderos por anticipado a un hombre de 65 años de edad, a 4.5% de interés anual.

SOLUCIÓN:

$$C = 1$$
$$i = 0.045$$
$$x = 65$$
$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

De la tabla II del apéndice:

$$N_{65} = 49\,157.4$$
$$D_{65} = 4\,283.4$$
$$\ddot{a}_{65} = \frac{49\,157.4}{4\,283.4} = 11.47625718$$

Ahora, de manera similar al caso de las anualidades vencidas, el valor actual de una anualidad vitalicia anticipada con el valor de $R es:

$$C = R\ddot{a}_x$$
$$C = R\frac{N_x}{D_x} \tag{12.6}$$

Y, al igual que antes, en este caso a C se le denomina *prima neta única*.

EJEMPLO 12.4.2

Determinar la prima neta única de una anualidad anticipada de $240 000, pagadera a una mujer de 35 años de edad.

SOLUCIÓN:

$$R = 240\,000$$
$$i = 0.045$$
$$x = 35$$
$$N_{35} = 404\,564.3$$
$$D_{35} = 20\,856.6$$
$$C = 240\,000\frac{404\,564.3}{20\,856.6}$$
$$C = \$4\,655\,381.61$$

12.5 Anualidades vitalicias diferidas

Éste sería el caso de una anualidad pagadera a una persona de x años de edad, pero posponiendo el inicio del pago durante k años. Se pueden presentar dos casos:

a) Que el primer pago se haga *unos años después* de expirar el periodo de aplazamiento (k), en cuyo caso tendríamos una *anualidad vitalicia diferida vencida*.
b) Que el primer pago se haga en el momento de expirar el periodo de aplazamiento. En este caso se está en presencia de una anualidad vitalicia diferida anticipada.

Analizaremos los dos casos en forma separada:

Anualidades vitalicias diferidas vencidas

A una persona de edad x se le va a pagar una anualidad de $1 anual. El primer pago se realizará después de k años y, como se trata de una anualidad vencida, se hace un año después de vencer el periodo de aplazamiento, o sea el año $k + 1$. Además, seguiremos utilizando la tasa de 4.5%. Se utiliza el símbolo ${}_{k|}a_x$ para denotar el valor actual (prima neta única) de una anualidad vitalicia vencida de $1, diferida durante k años. Tenemos entonces que:

$$_{k|}a_x = \frac{_{k+1}E_x + {}_{k+2}E_x + {}_{k+3}E_x + \ldots \text{(hasta el final de la tabla)}}{v_x}$$

$$= \frac{(1+i)^{-(k+1)}v_{x+k+1} + (1+i)^{-(k+2)}v_{x+k+2} + \ldots \text{(hasta el final de la tabla)}}{v_x}$$

Multiplicando tanto el numerador como el denominador de la expresión anterior por $(1 + i)^{-x}$

$$_{k|}a_x = \frac{(1+i)^{-(x+k+1)}v_{x+k+1} + (1+i)^{-(x+k+2)}v_{x+k+2} + \ldots}{(1+i)^{-x}v_x}$$

$$= \frac{D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + D_{x+k+3} + \ldots \text{(hasta el final de la tabla)}}{D_x}$$

Por lo que,

$$_{k|}a_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x} \tag{12.7}$$

EJEMPLO 12.5.1

¿Cuál es la prima neta única de una anualidad vitalicia vencida de \$1 pagadera a una mujer de 40 años si el primer pago debe hacerse cuando esta persona tenga 60 años?

SOLUCIÓN:

$x = 40$
$k = 20$
$R = 1$

$$_{20|}a_{40} = \frac{N_{x+k+1}}{D_x} = \frac{N_{61}}{D_{40}} = \frac{81\,182.4}{16\,645.1} = 4.87725517$$

De nueva cuenta, el valor actual de una anualidad vitalicia vencida de \$$R$ anuales, pagadera a una persona de edad x y diferida durante k años es:

$$C = R_{k|}a_x$$

$$C = R\frac{N_{x+k+1}}{D_x} \tag{12.8}$$

EJEMPLO 12.5.2

Determinar la prima neta única de una anualidad de \$125 000 anuales pagaderos a un hombre de 48 años, si el primer pago debe realizarse dentro de 15 años.

SOLUCIÓN:

Observe que, en este caso, cuando se especifica que el primer pago debe hacerse dentro de 15 años, no se sabe en realidad si la anualidad es anticipada o vencida pero, al saber que el primer pago se realizará dentro de 15 años y que $k + 1 = 15$, se puede determinar el valor actual si se considera la operación como una anualidad vencida con:

$R = 125\ 000$
$x = 48$
$k = 14$

y,

$$C = 125\,000 \frac{N_{48+14+1}}{D_{48}} = 125\,000 \frac{N_{63}}{D_{48}}$$

$$C = 125\,000 \frac{58\,580.6}{10\,968.6}$$

$$C = 125\,000(5.34075452)$$

$$C = 667\,594.31$$

Anualidades vitalicias diferidas anticipadas

Como se vio al principio de la sección, en este tipo de anualidades el primer pago se hace el día en que vence el periodo de aplazamiento o diferimiento. Del desarrollo anterior, es fácil comprobar que el valor actual de una anualidad vitalicia anticipada de $1 y diferida durante k años es:

$$_{k|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k}}{D_x} \tag{12.9}$$

EJEMPLO 12.5.3

Encontrar el valor actual de una anualidad vitalicia anticipada de $1 pagadera a un hombre de 35 años de edad si se aplaza 10 años.

SOLUCIÓN:

$$_{10|}\ddot{a}_{35} = \frac{N_{10+35}}{D_{35}} = \frac{N_{45}}{D_{35}} = \frac{212\,152.5}{20\,352.2} = 10.42405735$$

También, y a semejanza del caso vencido, el valor actual de una anualidad vitalicia anticipada de $\$R$, diferida durante k años, es:

$$C = R\,{}_{k|}\ddot{a}_x$$

$$C = R\frac{N_{x+k}}{D_x} \tag{12.10}$$

EJEMPLO 12.5.4

¿Cuál es la prima de una anualidad vitalicia anticipada de $300 000 pagadera a una mujer de 50 años de edad y diferida durante 5 años?

SOLUCIÓN:

$$R = \$300\,000$$
$$k = 5$$
$$x = 50$$

$$C = 300\,000 \frac{N_{50+5}}{D_{50}} = 300\,000 \frac{N_{55}}{D_{50}}$$

$$C = 300\,000\left(\frac{109\,496.9}{9\,927.1}\right) = 300\,000(11.030099)$$

$$C = \$3\,309\,029.83$$

12.6 Anualidades contingentes temporales

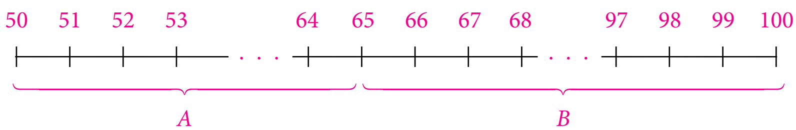
Son anualidades que se pagan durante un número especificado de periodos que termina al cubrir este número de pagos (aunque el rentista siga vivo) o a su muerte, si ésta ocurre antes de cubrir todos los pagos.

Anualidades contingentes temporales vencidas

EJEMPLO 12.6.1

Se le va a pagar a una persona de 50 años de edad una anualidad de $1, durante 15 años. ¿Cuál es el valor de la prima neta única?

Para ilustrar el caso:



Si consideramos la parte A del diagrama anterior, tenemos la anualidad contingente temporal propuesta en el ejemplo. Si añadimos la parte B tenemos una anualidad vitalicia vencida, que ya analizamos. Es posible apreciar que dicha parte B puede considerarse como una anualidad vitalicia vencida diferida durante n años (n es el número de pagos de la anualidad temporal). De esto se puede considerar que la anualidad contingente temporal es igual a una anualidad vitalicia vencida menos una anualidad vitalicia vencida diferida n años. En el caso de una anualidad de $1 y utilizando el símbolo a_{xn} para denotar el valor actual de una anualidad temporal de $1 pagadera a una persona con x años de edad durante n años, tenemos:

$$a_{xn} = a_x - {}_n|a_x$$

y recordando que

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

y

$$_n|a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_{x'}}$$

$$a_{x:n} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \qquad \textbf{(12.11)}$$

y

$$C = R\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \qquad \textbf{(12.12)}$$

EJEMPLO 12.6.2

Se le va a pagar a una mujer de 45 años de edad una anualidad contingente temporal vencida de $80 000 durante 10 años. ¿Cuál es su prima neta única?

SOLUCIÓN: $R = 80\,000$

$x = 45$

$n = 10$

$$C = Ra_{x:n} = 80\,000\frac{N_{46} - N_{56}}{D_{45}} = 80\,000\frac{219\,694.8 - 116\,577.1}{18\,222.3}$$

$C = \$452\,709.92$

Anualidades contingentes temporales anticipadas

En este caso, el primer pago se hace al principio del primer periodo de pago. También, de los desarrollos anteriores se deduce que el valor actual o prima neta única de este tipo de anualidades está dado por:

$$C = R\ddot{a}_{x:n}$$

de donde

$$C = R\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{12.13}$$

EJEMPLO 12.6.3

El señor Torres, de 65 años de edad, va a recibir una anualidad anticipada de $50 000 durante 10 años, siempre y cuando permanezca vivo para cobrarla. Se debe calcular su prima neta única.

SOLUCIÓN:

$$R = 50\,000$$
$$x = 65$$
$$n = 10$$
$$C = R\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = R\frac{N_{65} - N_{75}}{D_{65}}$$
$$C = 50\,000\frac{49\,157.4 - 17\,296.8}{4\,283.4}$$
$$C = \$371\,907.83$$

Ejercicios del capítulo 12

1. ¿Qué es una anualidad contingente?
2. ¿Qué es un dotal puro?
3. ¿Qué es una prima neta única?
4. Calcule el valor actual de un dotal puro de $2 000 000 pagadero a una mujer de 55 años, si vive a los 75 años. (Utilice 4.5 como porcentaje anual, según se convino para todos los ejemplos).
5. El valor actual de un dotal puro pagadero a una mujer de 40 años si vive para cumplir 60 años asciende a $500 000. ¿Cuál es el valor a futuro del dotal?
6. ¿Qué es una anualidad vitalicia?
7. Explique la diferencia que existe entre las anualidades vitalicias vencidas y las anti– cipadas.
8. Calcule la prima neta única de una anualidad vitalicia vencida de $7 000, pagadera a una mujer de 38 años de edad.
9. ¿Qué anualidad vitalicia vencida anual, pagadera a un hombre de 69 años, equivale a una prima neta única de $250 000?
10. Calcule la prima neta única de una anualidad vitalicia anticipada de $80 000 anuales, pagadera a una mujer de 75 años.
11. Un hombre de 60 años va a recibir una anualidad vitalicia vencida de $30 000. ¿Qué cantidad anual recibiría si la anualidad se convirtiera en anticipada?
12. ¿Qué es una anualidad vitalicia diferida?
13. ¿Cuál es el valor actual de una anualidad vitalicia vencida de $75 000, pagadera a una mujer de 52 años si se difiere durante 10 años?

14. Calcule el valor actual de la anualidad del ejemplo anterior, si se le considera adelan–tada.
15. El valor actual de una anualidad vitalicia anticipada, pagadera a un hombre de 45 años y diferida durante 6 años es de $7 500. ¿Cuál es el valor del pago anual?
16. ¿Qué es una anualidad contingente temporal anticipada?
17. ¿Qué es una anualidad contingente temporal vencida?
18. El señor García, de 63 años, puede recibir hoy como pago por jubilación la cantidad de $300 000. También puede optar por recibir una anualidad contingente temporal durante 5 años, a 4.5% anual. ¿Cuál debe ser el importe de los pagos anuales que recibirá?
19. ¿Cuál es el valor actual de una anualidad contingente vencida pagadera durante 15 años a una mujer de 48 años, si el pago anual es de $150 000?

12.7 Aplicaciones

EJEMPLO 12.7.1

Consultando el sitio de una aseguradora mexicana, se encontraron los siguientes tipos de seguros de vida individual:

1. Temporal. Si el asegurado fallece durante la vigencia del seguro establecida en el contrato, la aseguradora paga la suma asegurada contratada a los beneficiarios designados.
2. Dotal ahorro. Si el asegurado sobrevive al término de la vigencia del seguro, la empresa le paga la suma asegurada contratada. En caso de fallecimiento antes del término de la vigencia, paga a los beneficiarios, lo que resulte mayor entre el monto de las primas pagadas o su valor en efectivo. Tiene las opciones descritas en 3 y 4.
3. Dotal mixto. Si el asegurado fallece durante la vigencia del seguro, la empresa paga la suma asegurada contratada más 10% adicional. En caso de que el asegurado sobreviva al término de la vigencia del seguro, la compañía le paga la suma asegurada contratada.

   Las tres opciones anteriores tienen diversas coberturas adicionales como pagos por muerte accidental o invalidez. Tienen, además, las siguientes opciones de contratación:

   - Plazos a 5, 10, 15 y 20 años.
   - Pagos en forma mensual, trimestral, semestral o anual.
   - En moneda dólares, Udis o pesos.

4. Vitalicio. Ofrece protección garantizada de por vida. La empresa paga la suma asegurada contratada a los beneficiarios asignados al ocurrir el fallecimiento del asegurado. Tiene las siguientes opciones de contratación:

   - Individual o mancomunada.
   - Pagos en forma mensual, trimestral, semestral o anual.
   - En moneda dólares, Udis o pesos.

Cuando se solicitó información sobre un seguro de vida para una mujer de 70 años de edad a una empresa aseguradora mexicana, hacia principios de octubre de 2006, se obtuvieron los siguientes datos:

Datos del asegurado propuesto:

Fecha de nacimiento:	01/01/1936
Edad:	70
Sexo:	Femenino
Fumador:	No

Coberturas:

[x] BÁSICA (obligatoria)

[x] MUERTE ACCIDENTAL Y PÉRDIDAS ORGÁNICAS (obligatoria)

[ ] INVALIDEZ TOTAL Y PERMANENTE (opcional)

[x] GASTOS FUNERARIOS (obligatoria). Suma asegurada de $20 000.00, aplica para titular, cónyuge e hijos

[x] ASISTENCIA MÉDICA (obligatoria)

[x] ASISTENCIA LEGAL (obligatoria), aplica para titular, cónyuge e hijos

Esta cotización incluye:

Descuento de 5 años de edad en el costo de la prima (NO FUMAR, POR SER MUJER)
Descuento promocional (*):

Mensual. Únicamente paga 11 mensualidades
Anual. 8.33% de descuento en la prima total

Prima según forma de pago:

Suma asegurada	Mensual	Trimestral	Semestral	Anual
$500 000	$2 119.67*	$6 281.03	$12 332.86	$21 797.97*
$450 000	$1 923.31*	$5 699.21	$11 190.57	$19 779.47*
$400 000	$1 726.94*	$5 117.38	$10 048.28	$17 760.97*
$350 000	$1 530.58*	$4 535.56	$ 8 905.99	$15 742.47*
$300 000	$1 334.22*	$3 953.74	$ 7 763.71	$13 723.97*
$250 000	$1 137.85*	$3 371.91	$ 6 621.42	$11 705.47*
$200 000	$ 941.49	$2 790.09	$ 5 479.13	$10 567.60
$150 000	$ 745.13	$2 208.27	$ 4 336.84	$ 8 365.60
$100 000	$ 548.76	$1 626.44	$ 3 194.56	$ 6 163.60

Los ejemplos siguientes se resuelven con estos datos.

EJEMPLO 12.7.2

¿Qué tasa de interés cobra la aseguradora por los pagos

a) mensual?
b) trimestral?
c) semestral, en comparación con el anual, por una suma asegurada de $500 000?

SOLUCIÓN:
Se plantean como anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas:

a) $21\,797.97 = 2\,119.67\,\dfrac{1-(1+i)^{-12}}{i}$

b) $21\,797.97 = 6\,281.03\,\dfrac{1-(1+i)^{-4}}{i}$

c) $21\,797.97 = 12\,332.86\,\dfrac{1-(1+i)^{-12}}{i}$

Utilizando la función tasa de Excel que se ha aplicado repetidamente antes, se obtiene:

a) = TASA(12,–2119.67,21797.97) = 0.0245838, o 2.46% mensual
b) = TASA(4,–6281.03,21797.97) = 0.0593279 o 5.93% trimestral, y
c) = TASA(2,–12332.86,21797.97) = 0.0865113 u 8.65% semestral

Para remarcar y para recordar que se requieren tasas efectivas al mismo plazo para poder hacer comparaciones válidas, se encuentran las tasas efectivas anuales en los tres casos:

a) $1.0245838^{12} - 1 = 0.3384$
b) $1.0593279^{4} - 1 = 0.2593$
c) $1.0865113^{2} - 1 = 0.1805$

De lo anterior, se puede observar que, conforme más numerosos son los pagos, mayor es la tasa que se paga.

Además, vale la pena comentar que, en el momento de escribir este texto, las tasas en instrumentos de deuda, como los Cetes, cobraban alrededor de 8% de interés efectivo (contra los 33.84%, 25.93% y 18.05% de los tres incisos anteriores).

EJEMPLO 12.7.3

Comparar el costo anual de una póliza de seguro de vida vitalicio por $300 000 para una mujer de 70 años de edad contra el valor de un dotal puro por la misma cantidad, a recibir si alcanza la edad de 71 años.

Solución:

El costo anual del seguro de vida, de acuerdo con la tabla anterior es de $13 723.97, en tanto que el valor de un dotal puro de $300 000, en el caso de que la mujer en cuestión alcance los 71 años de edad es, utilizando como tasa de interés 8%, que es, aproximadamente, la tasa efectiva anual de instrumentos de deuda:

$$= 300\,000(1.08^{-1})\left(\frac{v_{71}}{v_{70}}\right) = 300\,000(0.92592593)\left(\frac{75\,183}{77\,001}\right) = \$271\,219.42$$

O sea que, aparte de otra numerosa cantidad de consideraciones que escapan al alcance de este libro (entre las que se encuentran las coberturas adicionales del seguro, tales como la muerte accidental o la invalidez permanente que se anotaron arriba), se pagarían hoy $13 723.97 por una probabilidad de $1 - \frac{75\,183}{77\,001} = 1 - 0.976390 = 0.0236 = 2.36\%$ de que los deudos reciban $300 000 de indemnización si la señora muere, o nada si continúa con vida, y esto último tiene una probabilidad de 97.64% de ocurrir.

Sólo a manera de ilustración, en la tabla 12.1 se presentan los datos que se encontraron en la Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros (Condusef) para los seguros de vida que ofrecen diversas instituciones de seguros.

En esta tabla se pueden apreciar los costos de primas de un seguro de vida en distintas aseguradoras y con varias características: cobertura básica, muerte accidental, etc. Los montos están calculados para un hombre de 35 años, no fumador y con buen estado de salud, al mes de febrero de 2011.

Como puede verse en la tabla, las coberturas que incluyen las aseguradoras varían y, como se asienta en una de las notas, los beneficios incluidos en la cobertura básica pueden cambiar en cada institución. Es claro que estas diferencias hacen que las comparaciones directas entre las distintas propuestas no sean enteramente válidas. Sin embargo, aquí se incluye la tabla como ejemplo.

Tabla 12.1 Cuadros comparativos de productos y servicios que ofrecen las aseguradoras en México

Seguro de vida sin fondo temporal (20 años) (Febrero de 2011)										
Costos-suma asegurada		Beneficios adicionales								Prima anual
		Cobertura básica	Muerte accidental	Invalidez total y permanente	Enfermedades en fase terminal	Pérdidas orgánicas	Gastos funerarios	Exención de pago de primas	Enfermedades graves	
Allianz	**Costo**	$2 638.00	$720.00	$612.00	N/A	$1 320.00	$396.00	$29.55	N/A	$5 715.55
	Suma asegurada	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00		$600 000.00	$50 000.00	Cubierto		
Aseguradora Interacciones	**Costo**	$3 105.00	$762.00	$1 416.00	N/A	$186.00	N/A	$67.80	N/A	$5 536.80
	Suma asegurada	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00		$600 000.00		Cubierto		
Banorte Seguros	**Costo**	$2 641.17	$751.48	$912.00	N/A	$192.00	Incluido	$19.07	N/A	$4 515.72
	Suma asegurada	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00		$600 000.00	Anticipo de 10.00% de la S.A. básica	Cubierto		
General de Seguros	**Costo**	$2 476.00	$1 350.00	$816.00	Incluido	Incluido	Incluido	$28.00	$787.00	$5 457.00
	Suma asegurada	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00	$180 000.00	$600 000.00	$43 000.00	Cubierto	$150 000.00	
Inbursa Seguros	**Costo**	$2 846.00	$840.00	$642.00	Incluido	$210.00	$320.00	$63.00	$355.00	$5 276.00
	Suma asegurada	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00	Anticipo de 30.00% de la S.A. básica	$600 000.00	$55 000.00	Cubierto	$150 000.00	
Insignia Life	**Costo**	$2 488.00	$438.00	$534.00	N/A	N/A	N/A	$15.67	N/A	$3 475.67
	Suma asegurada	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00				Cubierto		
La Latino Seguros	**Costo**	$2 436.00	$780.00	$762.00	N/A	$240.00	Incluido	$36.00	$805.50	$5 059.50
	Suma asegurada	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00		$600 000.00	10.00% de la S.A. básica	Cubierto	$450 000.00	

Metlife*	**Costo**	$2 136.06	$743.96	$924.03	Incluido	$240.08	$162.03	$34.09	$1 589.94	$5 830.00*
	Suma asegurada	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00	Cubierto	$600 000.00	$8 000.00	Cubierto	$600 000.00	
Seguros Afirme	**Costo**	$2 112.00	$960.00	$756.00	Incluido	$120.00	N/A	$19.00	Incluido	$3 967.00
	Suma asegurada	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00		Cubierto	$600 000.00	
Seguros Monterrey New York Life*	**Costo**	$3 413.36	$780.04	$636.06	N/A	$1 499.97	N/A	$38.06	N/A	$6 367.48
	Suma asegurada	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00		$600 000.00		Cubierto		
Seguros Multiva	**Costo**	$2 496.00	$960.00	$1 200.00	Incluido	$300.00	N/A	$30.00	Incluido	$4 986.00
	Suma asegurada	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00	$600 000.00		Cubierto	$600 000.00	
Prudential Seguros México	**Costo**	No se obtuvo información								
	Suma asegurada									

Moneda: Pesos.
Suma asegurada: $600 000.00
Características físicas: Hombre de 35 años, no fumador, buen estado de salud.
NOTAS (*)
MetLife: No cuenta con el plazo 20 años en moneda nacional, por lo que la información proporcionada es sobre una cotización en dólares, con un tipo de cambio de $12.35 (cierre de diciembre de 2010).
La prima anual mostrada en el comparativo no incluye el recargo fijo, por lo que para obtener la prima total deberán sumarse 85 dólares, resultando que la prima total es de $6 879.94 pesos.
Seguros Monterrey New York Life: No cuenta con el producto en moneda nacional, por lo que la información proporcionada es sobre una cotización en dólares, con un tipo de cambio de $12.12.
Los beneficios incluidos en la cobertura básica pueden variar para cada institución.
Abreviaturas:
N/A: No aplica.
S.A.: Suma asegurada.
Este documento es únicamente informativo, para mayor información consulte a la aseguradora de su interés.

Fuente: http://www.condusef.gob.mx/comparativos/index.php/aseguradoras, 20 de septiembre de 2012.

12.8 Resumen

Este capítulo se ocupó de las anualidades contingentes, que son aquellas cuyas fechas de inicio, de terminación o ambas dependen de algún suceso que se sabe va a ocurrir pero no se sabe cuándo. Un concepto muy importante para manejar anualidades contingentes es el de renta vitalicia: una anualidad que se paga a una persona a partir de cierta fecha y mientras viva para recibirla.

Se explicó también el concepto de dotal puro, que es un compromiso de pagar a una persona una cantidad determinada en una fecha futura, siempre y cuando esté viva para recibirla. Con estos elementos y los ya conocidos de las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas, se revisaron las:

- Anualidades vitalicias vencidas. Respecto a éstas se vio que se les puede contemplar como un conjunto de dotales puros y que, por ello, su valor actual o capital es la suma de los valores actuales de cada uno de esos dotales. A este valor actual de una anualidad contingente se le llama prima neta única.
- Anualidades vitalicias anticipadas, que se pueden contemplar de manera similar a las vencidas, al igual que las dos siguientes.
- Anualidades vitalicias diferidas vencidas.
- Anualidades vitalicias diferidas anticipadas.

Estos cuatro tipos de anualidades pueden resolverse combinando las fórmulas de las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas, y las de los valores actuales de dotales puros, tomando en cuenta sus correspondientes características.

- Anualidades contingentes temporales son aquellas que se pagan durante un número especificado de periodos que terminan al cubrirse este número de pagos aunque el rentista siga vivo, o a la muerte de éste si ocurre antes de cubrir todos los pagos. Se explicaron también los casos vencido y anticipado.

Comprobación del capítulo

Si ha leído el capítulo completo, el lector debe:

- Definir y explicar los siguientes conceptos:
  - Dotal puro
  - Anualidad contingente
  - Prima neta única
  - Renta vitalicia
  - Anualidad vitalicia vencida
  - Anualidad vitalicia anticipada
  - Anualidad vitalicia diferida vencida
  - Anualidad vitalicia diferida anticipada
  - Anualidad contingente temporal vencida
  - Anualidad contingente temporal anticipada
- Identificar situaciones que se pueden representar mediante esos tipos de anualidades.
- Plantear y resolver anualidades de esos tipos, calculando según sea necesario:
  - El valor actual o prima neta única
  - La renta

Términos y conceptos importantes

- Anualidad contingente
- Anualidad contingente temporal anticipada
- Anualidad contingente temporal vencida
- Anualidad vitalicia anticipada
- Anualidad vitalicia diferida anticipada
- Anualidad vitalicia diferida vencida
- Anualidad vitalicia vencida
- Dotal puro
- Prima neta única
- Renta vitalicia

Fórmulas importantes

Valor actual de un dotal puro de \$1:

$$ {}_nE_x = (1+i)^{-n} \frac{v_{x+n}}{v_x} \tag{12.1} $$

Valor actual de un dotal puro de \$$M$:

$$ C = M(1+i)^{-n} \frac{v_{x+n}}{v_n} \tag{12.2} $$

Valor actual de una anualidad vitalicia ordinaria de \$1 por año:

$$ a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \tag{12.3} $$

Valor actual o prima neta única de una anualidad vitalicia vencida de \$$R$ anuales:

$$ C = R\frac{N_{x+1}}{D_x} \tag{12.4} $$

Valor actual de una anualidad vitalicia anticipada de \$1 al año:

$$ \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \tag{12.5} $$

Prima neta única de una anualidad vitalicia anticipada de \$$R$ anuales:

$$ C = R\frac{N_x}{D_x} \tag{12.6} $$

Valor actual de una anualidad vitalicia vencida de \$1, diferida durante k años:

$$ {}_k|a_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x} \tag{12.7} $$

Valor actual de una anualidad vitalicia vencida de \$$R$ anuales, pagadera a una persona de x años de edad y diferida durante k años:

$$ C = R\frac{N_{x+k+1}}{D_x} \tag{12.8} $$

Valor actual de una anualidad vitalicia anticipada de \$1 diferida durante k años:

$$ {}_k|\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k}}{D_x} \tag{12.9} $$

Prima neta única de una anualidad vitalicia anticipada de \$$R$ diferida durante k años:

$$ C = R\frac{N_{x+k}}{D_x} \tag{12.10} $$

Prima neta única de una anualidad temporal vencida de \$1 pagadera a una persona de x años de edad durante n años (una anualidad contingente temporal vencida):

$$ a_{x:n} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \tag{12.11} $$

Prima neta única de una anualidad temporal vencida de \$$R$ pagadera a una persona de x años de edad durante n años (una anualidad contingente temporal vencida):

$$ C = R\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \tag{12.12} $$

Prima neta única de una anualidad temporal anticipada de \$$R$ pagadera a una persona de x años de edad, durante n años (una anualidad contingente temporal anticipada):

$$ C = R\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{12.13} $$

Ejercicios complementarios

1. Dé un ejemplo de cada una de las siguientes anualidades:
   a) Contingente temporal.
   b) Vitalicia diferida vencida.
   c) Vitalicia inmediata y anticipada.
2. Explique la diferencia entre una anualidad vitalicia y una contingente temporal.
3. ¿Qué relación se puede establecer entre los conceptos de *dotal puro* y *anualidad vitalicia*?
4. Si una mujer recibe hoy \$175 000 como valor actual de un dotal puro pagadero dentro de 12 años, calcule el valor a futuro del dotal si la persona tiene 28 años de edad.
5. ¿Tiene sentido calcular el monto de una anualidad vitalicia? Explique su respuesta.
6. ¿Cuál es el valor actual de un dotal puro pagadero a la señora Martínez dentro de 18 años, si el importe del dotal es de \$200 000 y la señora Martínez tiene 40 años?
7. ¿Qué es la prima neta única de una anualidad contingente?

8. ¿Qué datos se requieren para calcular el valor actual de una anualidad vitalicia diferida y anticipada?
9. El licenciado Godínez, de 32 años, va a recibir $250 000 cada año, comenzando dentro de 15 años y durante otros 15 años más, si está vivo para cobrarlos. ¿Qué clase de anualidad puede utilizarse para representar este caso?
10. Calcule la prima neta única de una anualidad de $80 000 pagadera comenzando de inmediato a una persona de 45 años de edad durante el tiempo que permanezca viva.
11. ¿Cuál es el valor actual de una anualidad contingente temporal en los siguientes términos?

    a) Periodo de aplazamiento, 10 años.
    b) Renta anual, $75 000.
    c) Edad del rentista, 40 años.
    d) Periodo de pago, 7 años.
    e) Interés, 18% anual.
    f) Clase, anticipada.

12. Una obrera jubilada de 58 años de edad dispone de $500 000 con los cuales desea contratar una anualidad vitalicia. A 4.5% anual, ¿qué renta anual vitalicia vencida sería equivalente a su capital?
13. Un trabajador de 33 años desea reunir mediante abonos mensuales a un fondo de inversiones que paga 4.5% anual efectivo la cantidad suficiente para comprar, dentro de 17 años, una anualidad vitalicia vencida de $30 000 anuales. Si se considera que el interés al que se contratará esta anualidad es de 4.5% anual, ¿cuánto debe depositar cada mes el trabajador?
14. Calcule el valor actual de una anualidad temporal de $50 000, pagadera durante 8 años a una mujer de 55 años, si se difiere durante 5 años y es anticipada.

Matemáticas en internet. Anualidades contingentes

- Documento que presenta los conceptos básicos de las anualidades con algunos ejemplos.
  http://www.geocities.ws/victor_anaya64/mfin/apuntes_anualidades.pdf
- Página que presenta conceptos y ejemplos de los distintos tipos de anualidades.
  http://matefinacierab1.galeon.com/aficiones831890.html
- Introducción a las anualidades vitalicias.
  http://dinero.about.com/od/Jubilacion/a/Introducci-On-A-Las-Anualidades-O-Rentas-Vitalicias.htm
- Página que presenta los conceptos básicos de las anualidades o rentas vitalicias.
  http://finanzaspracticas.com.mx/70133-Que-es-la-renta-vitalicia.note.aspx
- Explica la importancia de los seguros de vida, incluyendo el seguro dotal puro y algunos otros importantes. A la vez, ayuda a decidir cuál es el mejor que cubre sus necesidades; además, ofrece otro tipo de información referente a inversiones.
  http://www.condusef.gob.mx
- Página que contiene conceptos básicos de matemáticas financieras y su aplicación en el mercado de valores de México.
  http://usuarios.lycos.es/pacheco_1/indice.htm
- Página de la Universidad Estatal de Ohio que proporciona una gran cantidad de información y ligas relacionadas con finanzas. Se trata de una página muy completa de acceso gratuito.
  http://fisher.osu.edu/fin/overview.htm
- Vínculos a sitios relevantes del mundo financiero en Estados Unidos.
  http://www.educationindex.com/finance/#n

Calculadoras financieras

- Análisis de una tarjeta de crédito que muestra los resultados de una transferencia a un crédito de menor interés. Disponible en inglés.
  http://www.creditcardanalyzer.com/
- Publicidad de una empresa que ofrece canjear una anualidad contingente vitalicia por una anualidad contingente de plazo determinado.
  http://www.youtube.com/watch?v=dzHWZWCNyTs

Respuestas a los ejercicios de sección impares

Capítulo 1

1. *a)* a^7 *b)* a^{11} *c)* a^{11} *d)* b^6 *e)* $90b^6$ *f)* c^{-5} *g)* c^5 *h)* a^2 *i)* x^{12} *j)* x^{17} *k)* $8y^7$ *l)* $1/x^9$ *m)* a^8b^{12} *n)* $\dfrac{a^8}{b^{12}}$ *o)* x^{15}/y^{15} *p)* $\dfrac{81x^8y^{12}}{16z^8}$ *q)* $(1.05)^{14}$ *r)* $(1.30)^{31}$
3. *a)* $x^{3/2}$ *b)* $x^{\frac{13}{6}}$ *c)* b *d)* $c^{7/6}$ *e)* $a^{-8}b^{-12}$ *f)* x
5. *a)* $i = 0.41421356$ *b)* $i = -0.33056705$ *c)* $i = 0.05119632$ *d)* $i = 0.15104536$ *e)* $i = 0.13621937$ *f)* $i = 0.12468265$ *g)* $i = 0.93877776$ *h)* $i = 0.48168887$ *i)* $i = 0.157625$ *j)* $i = 0.04469751$
7. *a)* 8 *b)* 125 *c)* 2 *d)* 7 776 *e)* 100
9. *a)* 0.301030 *b)* 0.301030 *c)* 0.301030 *d)* 0.602060 *e)* 0.903090 *f)* 0.903090
11. *a)* 400 *b)* 4 *c)* 0.004
13. *a)* 5.656854 *b)* 213.746993 *c)* 0.593658 *d)* 49.966061 *e)* 5.215432 *f)* 4 859.902588 *g)* 1.507721 *h)* 0.952911 *i)* 0.410031 *j)* 219.650643
15. *a)* 3.969362 *b)* 22.517085 *c)* 6.604171 *d)* 6.603150 *e)* 4.888170 *f)* 1.813336 *g)* 8.552713
17. *a)* 2 550 *b)* 2 484 *c)* 25 245
19. 16 500
21. *a)* $r = 3$, $t_8 = 8\,748$, $S_8 = 13\,120$ *b)* $r = 3$, $t_1 = 2.22222222$, $S_7 = 2\,428.88888646$ *c)* $r = 0.5$, $t_1 = 128$, $S_9 = 255.5$ *d)* $t_1 = 2\,048$, $S_8 = 1\,638.375$ *e)* $t_{12} = 1.60103222$, $S_{12} = 15.62683768$
23. \$313.81
25. *a)* 0.22222222 *b)* 0.44444444 *c)* 1.25 *d)* 0.8 *e)* 20
27. 90 m

Capítulo 2

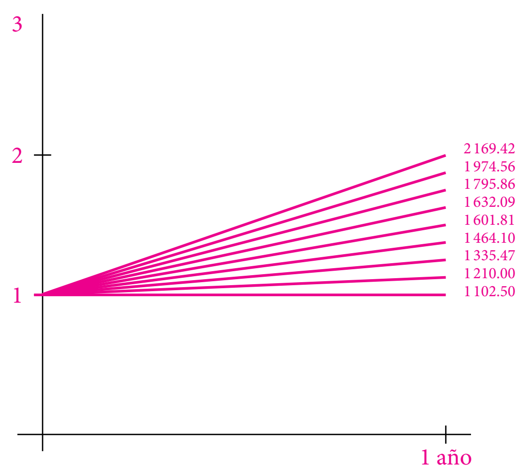
1. \$192 000
3. \$53 373.13
5. \$50 335.57
7. \$4 954.58 con tiempo aproximado, \$4 955.20 con tiempo real.
9. \$837.44
11. \$675
13. \$1 760.00

15. \$14 700.00
17. \$745.64
21. *a*) \$36.99 *b*) \$37.50
23. 273 días
25. 20%
27. 1.785714 años que equivalen a 652 días de tiempo real y a 643 días de tiempo aproximado.
29. 1.25%
31. 2.67%
33. Tiempo ordinario, 15 de diciembre. Tiempo exacto, 12 de diciembre.
35. 32.90%
41. \$173.25
43. *a*) 18 527.78 *b*) 17 954.24, considerando 360 días en el año.
45. $t \approx 104$ días, se descontó el 1 de julio (tiempo aproximado); el 2 de julio (tiempo real).
47. $i = 0.30$ anual = 30%
49. $i = 36\%$ anual
51. \$1 500
53. Tres meses o 90 días.
55. 21 de agosto
57. 15 de febrero con tiempo aproximado.
59. \$5 405.40
61. \$8 333.35
63. \$10 446.05
65. \$5 661.72
67. *a*) \$571.27
69. \$75 246.13
71. \$1 227.64
73. \$113 478.45
75. \$355.83

Capítulo 3

1. *a*) 2.5% *b*) 4% *c*) 2% *d*) 15% *e*) 9% *f*) 1.5% *g*) 0.5%

3. *a*) \$1 102.50 *b*) \$1 210 *c*) \$1 335.47 *d*) \$1 464.10 *e*) \$1 601.81 *f*) \$1 632.09 *g*) \$1 795.86 *h*) \$1 974.56 *i*) \$2 169.42



5. *a*) \$58 037.73
b) \$67 367.55
c) \$78 197.19
d) \$105 359.07

7.

%	Años				
	1	5	10	15	20
10	1.10	1.61	2.59	4.18	6.73
20	1.20	2.49	6.19	15.41	38.34
30	1.30	3.71	13.79	51.19	190.05
40	1.40	5.38	28.93	155.57	836.68
50	1.50	7.59	57.67	437.89	3 325.26
60	1.60	10.49	109.95	1 152.92	12 089.26
70	1.70	14.20	201.60	2 862.42	40 642.31
80	1.80	18.90	357.05	6 746.64	127 482.36
90	1.90	24.76	613.11	15 181.13	375 899.73
100	2.00	32.00	1 024.00	32 768.00	1 048 576.00

9. \$378 743.09

11. *a*) Exacto: 14 378.13 *b*) Aproximado: 14 387.53

13. *a*) 5 años: 4 391 339; 10 años: 5 041 533; 20 años: 6 644 981
b) 5 años: 4 391 339; 10 años: 4 968 397; 20 años: 6 056 448

15. *a*) 6%
b) 6.09%
c) 6.14%
d) 6.17%
e) 6.18%

17. 14.73%

19. 1.91%

21. 16.98%

23. *a*) 18% *b*) 19.62% *c*) 21.43%

25. *a*) 37.18% *b*) 22.17% *c*) 11.04%

27. \$499 132.23

29. *a*) 861.51
b) 863.07
c) 865.33
d) 869.56

31. *a*) Contado. *b*) Contado. *c*) A plazos.

33. 287 955.50 dólares.

35. *a*) Exacto: \$144 544.11 *b*) Aproximado: \$144 571.90

37. *a*) 138.98 meses.
b) 46.56 trimestres.
c) 23.45 semestres.
d) 11.90 años.

39. 28.53 meses.

41. El 27 de octubre (8.87 meses).

43. *a*) 30.94%
b) 31.74%
c) 33%
d) 35.72%

45. 7.18%

47. \$1 689.24

49. *a*) 105 377.50 *b*) 200 344.50

51. *a*) \$64 300.11 *b*) \$78 406.98 *c*) \$86 581.73

53. \$9 020.84

Capítulo 4

1. Simple, cierta, vencida e inmediata.
   $C = \$2\,217\,538.21$
3. General, cierta, anticipada, diferida.
5. General, cierta, vencida e inmediata.
7. $636 969.60
9. $8 030.06
11. $70 684.97
13. $7 685.84
15. $39 393.56, si los $150 000 se consideran a valor actual o $36 393.56 si se consideran como monto.
17. $191 280.74
19. La opción *b*).
21. Cinco pagos completos y uno final de $29.83
23. El 12 de octubre tres años después.
25. *a*) Aproximadamente 9.71 meses (9.71)
    b) Ocho pagos de $100 y un noveno de $175.62
27. Aproximadamente 11.43% semestral.
29. *a*) 49.85% *b*) 2.077% *c*) 63.78%
31. Conviene más el plan de "La Ganga". Ésta cobra 2.52% mensual y "La Bagatela", 2.85%. La diferencia entre ambas tasas es de casi 0.34%.
33. *a*) $7 610.77 *b*) $117.45 *c*) Que ahorre en el banco.

Capítulo 5

1. La anticipada, porque empieza a generar intereses más pronto.
3. $3 782.05
5. $276 055.59
7. $178 265.06
9. $3 599.35
11. Sí.
13. 0.015 mensual aproximadamente = 18% anual.
15. 18
17. 14.40% anual convertible cada mes.
19. 1% semanal ≈ 4.35% mensual ≈ 67.77% anual.

Capítulo 6

1. Simple: el periodo de pago es igual al de capitalización.
   Cierta: las fechas son conocidas.
   Vencida: los pagos o depósitos se hacen al final de los periodos.
   Diferida: la realización de los pagos o depósitos se pospone para algún periodo posterior a la formalización del trato.
3. $918 071.29
5. $148 788.53
7. $811.70
9. $37 705.94
11. La solución matemática y la práctica son iguales: $n = 24$.

13. $n = 6$ pagos
15. La opción *a*) es la más cara, pues fue contratada a una tasa efectiva anual de 24.53% contra una tasa efectiva anual de 21.76% de la opción *b*).
17. $232 045.56
19. $76 542.02

Capítulo 7

1. *a*) $39 071.49   *b*) $40 993.39   *c*) 38 820.49
3. $6 176.89
5. $31 719.82
7. La *b*): $147 557.68 contra $118 233.91 de la *a*).
9. $10 319.13
11. $122 162.33
13. $3 550.83
15. 28% anual efectivo aproximadamente.
17. La *b*) con tasa efectiva anual de 14.28% contra 13.78% de la alternativa *a*).
19. Veintiocho pagos completos y un pago menor de $2 188.73.
21. $8 268.32
23. $93 957.29
25. $7 928.96
27. $3 175.00
29. 14.61 quincenas.
31. 21.17% con capitalización mensual.
33. C = $94 506.77
    M = $67 538.40
35. $4 953.46
37. $1 102.70

Capítulo 8

1. Liquidar una deuda y sus intereses mediante pagos generalmente iguales.
3. *a*) 3 305.88

   b)

Fecha (*n*)	Pago	4% saldo	Amortización	Saldo
0	—	0	0	12 000.00
1	3 305.88	480.00	2 825.88	9 174.12
2	3 305.88	366.96	2 938.92	6 235.20
3	3 305.88	249.41	3 056.47	3 178.73
4	3 305.88	127.15	3 178.73	0

5. *a*) $2 237.85

   b)

Fecha (*n*)	Pago	Interés	Amortización	Saldo
0	—	0	0	7 250.00
1	2 237.85	652.50	1 585.35	5 664.65
2	2 237.85	509.82	1 728.03	3 936.62
3	2 237.85	354.30	1 883.55	2 053.07
4	2 237.85	184.78	2 053.07	0

7.

Periodo	Pago por periodo	Interés sobre saldo	Amortización	Saldo
0				110 000.00
1	5 815.82	2 200.00	3 615.82	106 384.18
2	5 815.82	2 127.68	3 688.14	102 696.04
23	5 815.82	225.84	5 589.99	5 701.78
24	5 815.82	114.04	5 701.78	—

9. $76 313.92

11. 6 pagos de $9 500 y un séptimo pago de $16 745.23.

Periodo	Pago por periodo	Interés sobre saldo	Amortización	Saldo
0				59 540.00
1	9 500.00	3 125.85	6 374.15	53 165.85
2	9 500.00	2 791.21	6 708.79	46 457.06
3	9 500.00	2 439.00	7 061.00	39 396.05
4	9 500.00	2 068.29	7 431.71	31 964.35
5	9 500.00	1 678.13	7 821.87	24 142.47
6	9 500.00	1 276.48	8 232.52	15 909.95
7	16 745.23	835.27	15 909.96	0

13. 4 pagos.

15. 24 pagos.

17. 3% efectivo mensual.

19. 3% anual convertible mensualmente.

21. $4 697.81

23. $30 190.13

25.

Fecha	Depósito por periodo	1.5% de interés	Total que se suma al fondo	Saldo
Fin quincena 1	25 533.46	0	25 533.46	25 533.46
Fin quincena 2	25 533.46	89.21	25 622.67	51 156.12
Fin quincena 3	25 533.46	178.73	25 712.19	76 868.31
Fin quincena 4	25 533.46	268.57	25 802.03	102 670.34
Fin quincena 5	25 533.46	358.72	25 892.17	128 562.51
Fin quincena 6	25 533.46	449.18	25 982.64	154 545.15
Totales	153 200.73	1 344.42	154 545.15	—

27.

Fecha	Depósito por periodo	Intereses	Total que se suma al fondo	Saldo
Inicio periodo 1	1 078.25	—	1 078.25	1 078.25
Inicio periodo 2	1 078.25	7.19	1 085.44	2 163.69
Inicio periodo 3	1 078.25	14.42	1 092.68	3 256.37
Inicio periodo 4	1 078.25	21.71	1 099.96	4 356.33
Inicio periodo 5	1 078.25	29.04	1 107.30	5 463.63
Inicio periodo 6	1 078.25	36.42	1 114.68	6 578.31
Inicio periodo 7	1 078.25	43.86	1 122.11	7 700.42
Inicio periodo 8	1 078.25	51.34	1 129.59	8 830.01
Fin periodo 8	—	58.87	58.87	8 888.88
Totales	8 626.03	262.85	8 888.88	—

29. \$46 168.51
31. \$629.31
33. \$38 638.40
35. Aproximadamente 75.94%.
37. 0.75% mensual.
39. Aproximadamente 19 quincenas.
41. 6% efectivo anual.

Capítulo 9

1. Son tres: intereses, dividendos y ganancias de capital.
3. Las ganancias de capital.
5. $i_{30} = 0.003996 = 0.4\%$
7. 107 días.
9. $i_{30} = 0.00033$
11. $i_{365} = 14.71\%$
13. $i_{30} = 0.00346$
15. No es posible determinarla.
17. *a*) $i = 0.0012522$ *b*) $i = 0.019992$ *c*) $i = 0.018716$
21. $i_{57} = 0.193348$
    $i_{30} = 0.097498$
23. $i_{67} = 0.079522$
    $i_{30} = 0.0348555$
25. $i_{365} = 2.101566 = 210.16\%$
27. *a*) $i_{365} = -0.62914$ *b*) $i_{365} = 0.1752$ *c*) $i_{365} = 0.1501$
29. $d = 0.042636$
31. $i_{365} = 0.043386$
33. $i_{360} = 0.4176$
35. $i_{365} = 0.0512$
37. $i_{365} = 0.0451$
47. $i_{365} = 0.0140$
49. $i_{176} = 0.00428$
51. $i_{30} = 0.0000135$
53. $i_{365} = 0.0484$
55. $i_{31} = 0.003414$
59. 0.0974

Capítulo 10

1. La depreciación anual es de \$4 900.

Periodo	Depreciación por periodo	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	—	—	25 000
1	4 900	4 900	20 100
2	4 900	9 800	15 200
3	4 900	14 700	10 300
4	4 900	19 600	5 400
5	4 900	24 500	500

3. Tasa de depreciación = 91.6745%.

Periodo	Depreciación por periodo	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	—	—	250 000.00
1	229 186.17	229 186.17	20 813.83
2	19 080.97	248 267.14	1 732.86
3	1 588.59	249 855.73	144.27
4	132.26	249 987.99	12.01
5	11.01	249 999.00	1.00

5. El valor en libros a los 5 años será de $114 688.

Periodo	Depreciación por periodo	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	—	—	350 000
1	70 000	70 000	280 000
2	56 000	126 000	224 000
3	44 800	170 800	179 200
4	35 840	206 640	143 360
5	28 672	235 312	114 688

7. El valor en libros sería de 0.

9. Debe ofrecerlo en $150.96.

11. El valor en libros es de $112 000, precio al cual debería venderlo.

13. *a*) $10 675 384.62 *b*) $6 743 076.92

15. *a*)

Periodo	Numerador	Fracción (B/Suma)	Depreciación por periodo	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			—	—	85 550.00
1	15	12.5000%	10 693.75	10 693.75	84 856.25
2	14	11.6667%	9 980.83	20 674.58	64 875.42
3	13	10.8333%	9 267.92	29 942.50	55 607.50
4	12	10.0000%	8 555.00	38 497.50	47 052.50
5	11	9.1667%	7 842.08	46 339.58	39 210.42

b) Valor en libros a los 10 años: $10 693.75.

17. *a*)

Periodo	Horas de trabajo	Depreciación por periodo	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	—	—	—	15 385.00
1	1 800	5 538.60	5 538.60	9 846.40
2	1 700	5 230.90	10 769.50	4 615.50
3	1 500	4 615.50	15 385.00	—

b) $4 615.50

19.

Periodo	Horas de trabajo	Depreciación por periodo	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	—	—	—	27 250.00
1	25 000	4 541.67	4 541.67	22 708.33
2	35 000	6 358.33	10 900.00	16 350.00
3	45 000	8 175.00	19 075.00	8 175.00
4	45 000	8 175.00	27 250.00	—

21. *a*) $35 678.70 *b*) $147 010.07 *c*) $304 536.23

23. *a*) \$1 092.52
b) D_4 = \$5 033.20 V_4 = 12 966.79
c) V_6 \$9 676.22

25. 148 438.16

27. El precio futuro a precios constantes sería de \$16 038.
Con el supuesto de 25% de inflación, el valor de reposición será de \$31 324.22.

Capítulo 11

1. *a*) 5/21 *b*) 11/21 *c*) 11/21

3. *a*) $p = 1/11$ $q = 10/11$

5. *a*) 1/270 725 *b*) 96/6 497 400 = 4/270 725 *c*) 144/6 497 400 = 6/270 725

7. *a*) 0.216 = 21.60% *b*) 0.064 = 6.40%

9. *a*) 0.504 = 50.4% *b*) 0.18 = 18.00% *c*) 0.216 = 21.60%

11. \$3 000

13. \$225

15. *a*) \$13 061.02 *b*) \$8 079.87 *c*) \$3 423.87

17. *a*) \$4 573.50 *b*) \$55 340.23 *c*) \$921 344.80

19. 44.08%

21. *a*) 0.00034622 = 0.0346% *b*) 0.00525437 = 0.5254% *c*) 0.09082115 = 9.0821%

23. *a*) 0.0031468 = 0.3147% *b*) 0.0041068 = 0.4107% *c*) 0.0208435 = 2.0844%

25. *a*) 579 857.5 *b*) 326 482.1 *c*) 4 364.8

Capítulo 12

5. \$575 234.71

9. \$28 879.17

11. \$27 677.39

13. \$547 022.41

15. \$659.20

19. \$1 556 059.45

APÉNDICE

Manejo de tablas

Como se mencionó en un principio, el uso de las tablas matemáticas es cada vez menor debido a la popularización de las calculadoras electrónicas. Para los casos en que no se disponga de esta herramienta se proporcionan a continuación las reglas para el manejo de las tablas de mantisas que se incluyen aquí.

El manejo de las tablas de mortalidad, que también se incluyen, está detallado en los capítulos 11 y 12.

I. Mantisas con seis decimales
II. Tablas de mortalidad de hombres, México, 2000, con columnas de conmutación a 18%
III. Tablas de mortalidad de mujeres, México, 2000, con columnas de conmutación a 18%

1. Mantisas

El logaritmo de un número N es, como se estableció en el capítulo 1, el exponente L al cual debe elevarse una base b para obtener dicho número N.

Los logaritmos comunes (base 10) están compuestos por dos partes:

a) Una parte entera llamada *característica*.
b) Una parte decimal llamada *mantisa*.

La *característica* indica la posición que ocupa el punto decimal del número *y*; para números mayores que 1, es igual al número de dígitos enteros a la izquierda del punto decimal, menos uno.

N	Características
2	1
20	2
200	3

Para números comprendidos entre 0 y 1, la característica está determinada por la posición que ocupe la primera cifra significativa (diferente de 0) a la derecha del punto decimal.

N	Características
.2	$\bar{1}$
.02	$\bar{2}$
.002	$\bar{3}$

El signo negativo que se coloca sobre la característica indica que ésta deberá ser restada de la mantisa del número, la cual, por definición, siempre es positiva.

La *mantisa* es una fracción decimal positiva, por lo general infinita, que se redondea a un número dado de cifras decimales de acuerdo con la precisión que se requiera en los cálculos en que se utilice. Para los efectos de este libro se redondeó a 6 decimales.

La tabla I proporciona la mantisa con 6 cifras decimales para todo número con 4 o menos dígitos. El punto decimal ha sido omitido en la impresión.

Para localizar la mantisa se procede de la siguiente manera:

a) Se buscan los 3 primeros dígitos significativos del número en la columna del extremo izquierdo de la tabla I.
b) Se busca el cuarto dígito del número en el renglón superior de la tabla I.
c) La fracción decimal que se encuentra en la intersección del renglón y la columna así localizada corresponden a la mantisa del número cuyo logaritmo se desea determinar.

EJEMPLO 1

Se requiere encontrar la mantisa del número 2804.

Solución:
Se localiza en la columna (N) los 3 primeros dígitos del número, y en el renglón (N) el cuarto dígito.

N	0	1	2	3	4	5	…
280	447 158	7 313	7 468	7 623	$\boxed{7\,778}$	7 933	…
1	8 706	8 861	9 015	9 170	9 324	9 478	…
2	.	.	.	.	.	.	
3	.	.	.	.	.	.	
4	.	.	.	.	.	.	

La fracción decimal que se encuentra en la intersección del renglón y la columna corresponde a la mantisa del número. En este caso: 0.0447778.

Observe que los primeros 2 dígitos de la mantisa se imprimen sólo cuando aparecen por primera vez, a fin de evitar repeticiones innecesarias que dificulten la lectura de la tabla. En caso de que dichos dígitos cambien en el cuerpo de la tabla se indica con un * (asterisco).

EJEMPLO 2

Se requiere encontrar la mantisa del número 3 804.

Solución:

Procediendo como se explicó arriba se tiene:

N	0	1	2	3	4	5	…
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
380	579 784	9 898	*0012	*0126	$\boxed{\text{*0241}}$	*0355	…
1	580 925	1 039	1 153	1 267	1 381	1 495	…
2	.	.	.	.	.	.	…
3	.	.	.	.	.	.	…
4	.	.	.	.	.	.	…

La mantisa del número 3804 es: 0.580241, por lo cual

$\log 3.804 = 0.580241$ $\quad \log 0.3804 = 0.580241 - 1 = \bar{1}.580241$

$\log 38.04 = 1.580241$ $\quad \log 0.03804 = 0.580241 - 2 = \bar{2}.580241$

$\log 380.4 = 2.580241$ $\quad \log 0.003804 = 0.580241 - 3 = \bar{3}.580241$

$\log 3804. = 3.580241$ $\quad \log 0.0003804 = 0.580241 - 4 = \bar{4}.580241$

Como se puede observar, para todo número cuyos primeros 4 dígitos significativos sean 3804 la mantisa será la misma y diferirán exclusivamente en el valor de la característica.

Interpolación

Cuando un número tiene más de 4 cifras significativas, su mantisa no aparece en las tablas y debe determinarse en forma aproximada por medio de interpolación. Esta herramienta se introdujo en el capítulo 4, donde se la utilizó para determinar la tasa de interés en problemas de anualidades. Dada la dificultad que su comprensión presenta para algunos estudiantes, en este apéndice se presenta un método alternativo a fin de que se pueda seleccionar el que resulte más sencillo para el usuario. A manera de ilustración, observe el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3

Determinar la mantisa del número 19 106.

Solución:

En la tabla I se localizan las mantisas de los números 1910 y 1911:

Número	Mantisa
1 910 = 19 100	281 033
1 911 = 19 110	281 261

El número 19 106 se encuentra entre el 19 100 y 19 110 y, por lo tanto, su mantisa debe encontrarse entre 281 033 y 281 261.

Utilizando el método que se explicó en el capítulo 4 (consulte la sección 7: Interés), esta relación puede ilustrarse como sigue:

Número	19 100	19 106	19 110
Mantisa	281 033	x	281 261

Se establece una proporción entre las diferencias de los números localizados en tablas y el número cuya mantisa se busca y las mantisas respectivas, a partir de la base de que dicho número difiere de aquellos en la misma proporción en que su mantisa diferirá de las que se localicen en las tablas.

$$\frac{19106-19100}{19110-19100}=\frac{x-281033}{281261-281033}$$

$$\frac{6}{10}=\frac{x-281033}{228}$$

$$281033+\frac{6}{10}(228)=x$$

$$281033+136.8=x$$

$$281169.8=281170$$

(Se redondea a 6 cifras, pues es el número de decimales que se maneja en las tablas).

A continuación se ilustra el método alternativo que puede usarse para interpolar. La relación entre números y mantisas se representa como sigue:

Número	Mantisa
$10\begin{bmatrix}19100\\19106\\19110\end{bmatrix}6$	$x\begin{bmatrix}281033\\m\\281261\end{bmatrix}228$

Suponiendo una variación uniforme de los valores de las mantisas entre 0.281033 y 0.281261, el problema puede resolverse mediante una regla de tres simple:

<u>6</u> (diferencia entre el número menor localizado en las tablas y el número cuya mantisa se desea determinar) es a x (diferencia entre la mantisa del número menor localizado en las tablas y la mantisa que se desea determinar) *como 10* (diferencia entre los números que se localizan en las tablas) *es a* 228 (diferencia entre las mantisas menor y mayor localizadas en las tablas).

$$\frac{6}{10}:\frac{x}{228}$$

$$x=\frac{6}{10}(228)=136.8\approx 137$$

La cantidad que así se obtiene se suma a la mantisa correspondiente al número menor a fin de determinar m:

$$m = 281\ 033 + 137 = 281\ 170$$

La mantisa del número 19 106 es 0.281170.

La relación de interpolación es válida tanto si se plantea de un número menor a un número mayor como si se hace de un número mayor a uno menor; en el ejemplo anterior se tiene:

Número	Mantisa
$-10\begin{bmatrix} 19100 \\ 19106 \\ 19110 \end{bmatrix}-4$	$-x\begin{bmatrix} 281\,261 \\ m \\ 281\,033 \end{bmatrix}-228$

Estableciendo la regla de tres:

$$\frac{-4}{-10}:\frac{-x}{-228}=\frac{4}{10}:\frac{x}{228}$$

$$x=\frac{4}{10}(228)=91.2\approx 91$$

$$m=281\,261-x$$

$$m=281\,261-91=281170$$

La mantisa obtenida 0.281170 es la misma que se determinó previamente.

Si el número cuya mantisa se busca tiene 6 o más dígitos significativos se redondea a 5 dígitos y se procede como se ha establecido.

EJEMPLO 4

Determinar la mantisa del número 465 842 y del número 13 148 957.

Solución:

En ambos casos bastará con redondear a 5 dígitos y obtener las mantisas correspondientes:

$N=465\,842$ 46 584

$N=13\,148\,957$ 13 149

a) Mantisa de 46 584:

Número	Mantisa
$10\begin{bmatrix} 46\,580 \\ 46\,584 \\ 46\,590 \end{bmatrix}4$	$x\begin{bmatrix} 668\,199 \\ m \\ 668\,293 \end{bmatrix}94$

$$\frac{4}{10}:\frac{x}{94}$$

$$x=\frac{4}{10}(94)=37.6\approx 38$$

$$m=668\,199+38=668\,237$$

La mantisa de 46 584 es 0.668237.

b) La mantisa de 13 149:

Número	Mantisa
$10\begin{bmatrix} 13140 \\ 13149 \\ 13150 \end{bmatrix}9$	$x\begin{bmatrix} 118\,595 \\ m \\ 118\,926 \end{bmatrix}331$

$$\frac{9}{10} : \frac{x}{331}$$

$$x = \frac{9}{10}(331) = 297.9 \approx 298$$

$$m = 118\,595 + 298 = 118\,893$$

La mantisa de 13 149 es 0.118893.

El proceso de interpolación que aquí se ha visto se puede aplicar también al manejo de otras tablas que se presentan en el libro, al igual que en la determinación de las tasas de interés en problemas que involucran anualidades.

Antilogaritmos

Si log $N = L$; a N se le conoce como el antilogaritmo de L.

Para determinar el antilogaritmo de un logaritmo L se determina la mantisa del mismo y se busca directamente en el cuerpo de la tabla I. Si no apareciese, se buscan las dos que le resulten más aproximadas y, por interpolación, se determina el número N que le corresponda. Finalmente, se coloca el punto decimal de acuerdo con la característica de dicho logaritmo L.

EJEMPLO 5

Se desea determinar el antilogaritmo de 2.863501.

Solución:

La característica del logaritmo es igual a 2, lo cual nos indica que el número N que se busca cuenta con 3 cifras enteras. Su mantisa es 0.863501, que se debe localizar directamente en el cuerpo de la tabla I.

N	0	1	2	3	4	5	…
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
730	863 323	3 382	3 442	$\boxed{3\ 501}$	3 561	3 620	…
1	3 917	3 977	4 036	4 096	4 155	4 214	…
2	4 511	4 570	4 630	4 689	4 748	4 808	…
.	.	.	.	.	.	.	…
.	.	.	.	.	.	.	…

En este caso se le localizó exactamente y corresponde al número 7304. Como la característica es 2, el antilogaritmo cuenta con 3 cifras enteras y se tiene que $N = 730.3$.

EJEMPLO 6

Dado log $N = 1.256594$, se desea determinar N.

Solución:

La característica del logaritmo es [1]. La mantisa es 0.256494. Ésta se busca en el cuerpo de la tabla I y se observa que no se encuentra exactamente. Los valores que más se le aproximan son:

Mantisa	Número
25-64-77	1 805
25-67-18	1 806

Puede verse que el número que se busca se encuentra entre 1 805 y 1 806. Para determinarlo se recurre a la interpolación:

Número	Mantisa
$241\begin{bmatrix} 256\,477 \\ 256\,594 \\ 256\,718 \end{bmatrix}117$	$x\begin{bmatrix} 18\,050 \\ N \\ 18\,060 \end{bmatrix}10$

$$\frac{117}{241} : \frac{x}{10}$$

$$x = (117/241)(10) = 4.855$$

$$N = 18\,050 + 4.855 = 18\,054.855$$

La característica $\bar{1}$ indica que el número N se encuentra entre 0 y 1, y que su primera cifra significativa ocupa el primer lugar a la derecha del punto decimal, por lo cual

$$N = 0.18054855$$

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 0000	0434	0868	1301	1734	2165	2598	3029	3461	3891
1	4321	4751	5181	5609	6038	6466	6894	7321	7748	8174
2	8600	9026	9451	9876	*0300	*0724	*1147	*1570	*1993	*2415
3	01 2837	3869	3680	4600	4821	4940	5360	5779	6127	6616
4	7953	7451	7868	8284	8700	9116	9538	9947	*0361	*0775
105	02 1189	1608	2016	2428	2841	3252	3664	4075	4486	4896
6	5306	5715	6125	6583	6942	7350	7757	9164	8571	8978
7	9384	9789	*0195	*0608	*1004	*1408	*1812	*2216	*2619	*3021
8	03 3124	3826	4227	4628	5029	5430	5830	6230	6629	7028
9	7426	7825	8223	8620	9617	9414	9811	*0207	*0602	*0998
110	04 1393	1787	2182	2576	2969	3362	3755	4148	4540	4932
1	5323	5714	6105	6495	6885	7275	7664	8053	8442	8830
2	9218	9606	9993	*0380	*0766	*1153	*1538	*1924	*2309	*2694
3	05 3078	3463	3846	4230	4613	4996	5378	5760	6142	6524
4	6905	7286	7666	8046	8426	8805	9185	9563	9942	*0320
115	06 0698	1075	1452	1829	2206	2582	2958	3333	3709	4083
6	4458	4832	5206	5580	5953	6326	6699	7071	7443	7815
7	8186	8557	8928	9298	9668	*0038	*0407	*0776	*1145	*1514
8	07 1882	2250	2617	2985	3352	3718	4085	4451	4816	5182
9	5547	5912	6276	6640	7004	7368	7731	8094	8457	8819
120	07 9181	9543	9904	*0266	*0626	*0987	*1347	*1707	*2067	*2426
1	08 2785	3144	3503	3861	4219	4576	4934	5291	5647	6004
2	6360	6716	7071	7426	7781	8136	8490	8845	9198	9552
3	9905	*0258	*0611	*0963	*1315	*1667	*2018	*2370	*2721	*3071
4	09 3422	3772	4122	4471	4820	5169	5518	5866	6215	6662
125	09 6910	7257	7604	7951	8298	8644	8990	9335	9681	*0626
6	10 0371	0715	1059	1403	1747	2091	2434	2777	3119	3462
7	3804	4146	4487	4828	5169	5510	5851	6191	6531	6871
8	7210	7549	7888	8227	8565	8903	9241	9579	9916	*0253
9	11 0590	0926	1263	1599	1934	2270	2605	2940	3275	3609
130	11 3943	4277	4611	4944	5278	5611	5943	6276	6608	6940
1	7271	7603	7934	8265	8595	8926	9256	9586	9915	*0245
2	12 0574	0903	1231	1560	1888	2216	2544	2871	3198	3525
3	3852	4178	4504	4830	5156	5481	5806	6131	6456	6781
4	7105	7429	7753	8076	8399	8722	9045	9368	9690	*0012
135	13 0334	0655	0977	1298	1619	1939	2260	2580	3900	3219
6	3539	3858	4177	4496	4814	5133	5451	5760	6986	6483
7	6721	7037	7354	7071	7987	8303	8612	8984	9249	9644
8	9879	*0194	*0508	*0822	*1136	*1450	*1163	*2076	*2389	*2702
9	14 3015	3227	3639	3951	4263	4574	4885	5196	5507	5818
140	14 6128	6438	6748	7058	7367	7676	7985	8284	8603	8911
1	9219	9527	9825	*0142	*0449	*0756	*1063	*1370	*1676	*1982
2	15 2288	2594	2900	3205	3510	3815	4120	4424	4728	5032
3	5336	5640	5943	6246	6549	6852	7154	7457	7459	8081
4	8362	8664	8965	9266	9567	3868	*0163	*0469	*0769	*1968
145	16 1368	1667	1967	2266	2564	2863	3161	3460	3758	4055
6	4353	4650	4947	5244	5541	5838	6124	6430	6726	7022
7	7317	7613	7908	8203	8497	8792	9086	9380	9674	9968
8	17 0262	0555	0848	1141	1434	1726	2019	2311	2663	2895
9	3186	3478	3769	4660	4351	4641	4832	5222	5512	5802

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17 6091	6381	6670	6959	7248	7636	7825	8113	3401	8689
1	8977	9264	9552	8839	*0126	*0413	*0699	*0986	*1272	*1658
2	18 1844	2129	2415	2700	2985	3270	3555	3839	4123	4407
3	4691	4975	5259	5542	5825	6108	6391	6674	6956	7239
4	7521	7808	8084	8366	8647	8928	9209	9490	9771	*0051
155	19 0332	0612	0892	1171	1451	1730	2010	2289	2567	2846
6	3125	3403	3681	3959	4237	4514	4792	5069	5346	5623
7	5900	6176	6453	6729	7005	7281	7556	7832	8107	8382
8	8657	8932	9206	9481	9755	*0029	*0303	*0577	*0850	*1124
9	20 1397	1670	1943	2216	2488	2761	3033	3305	3577	3848
160	20 4120	4391	4663	4934	5204	5745	5746	6016	6286	6556
1	6826	7096	7365	7634	7904	8173	8441	8710	8979	9247
2	9515	9783	*0051	*0319	*0586	*0853	*1121	*1388	*1654	*1921
3	21 2188	2454	2720	2986	3252	3518	3783	4049	4314	4579
4	4844	5109	5373	5638	5902	6166	6430	6694	6957	7221
165	21 7484	7747	8010	8273	8536	8798	9060	9323	9585	9846
6	22 0108	0370	0631	0892	1153	1414	1675	1936	2196	2456
7	2716	2976	3236	3496	3755	4015	4274	4533	4792	5051
8	5309	5568	5826	6084	6342	6600	6858	7115	7372	7630
9	7887	8144	8400	8657	8913	9170	9426	9682	9938	*0193
170	23 0449	0704	0960	1215	1470	1724	1979	2234	2488	2742
1	2996	3250	3504	3757	4011	4264	4517	4770	5023	5276
2	5528	5781	6033	6285	6537	6789	7041	7292	7544	7795
3	8046	8297	8548	8799	9049	9299	9550	9800	*0050	*0300
4	24 0549	0799	1048	1297	1546	1795	2044	2293	2541	2790
175	24 3038	3286	3534	3782	4030	4277	4525	4772	5019	5266
6	5513	5759	6006	6252	6499	6745	6991	7237	7482	7728
7	7973	8219	8464	8709	8954	9198	9443	9687	9932	*0176
8	25 0420	0664	0908	1151	1395	1638	1881	2125	2368	2610
9	2853	3096	3338	3580	3822	4064	4306	4548	4790	5031
180	25 5273	5514	5755	5996	6237	6477	6718	6958	7198	7439
1	7679	7918	8158	8398	8637	8877	9116	9355	9594	9833
2	26 0071	0310	0548	0787	1025	1263	1501	1739	1976	2214
3	2451	2688	2925	3162	3399	3636	3873	4109	4346	4582
4	4818	5054	5290	5525	5761	5996	6232	6467	6702	6937
185	26 7172	7406	7641	7875	8110	8344	8578	8812	9046	9279
6	9513	9746	9980	*0213	*0446	*0679	*0912	*1144	*1377	*1609
7	27 1842	2074	2306	2538	2770	3001	3233	3464	3696	3927
8	4158	4389	4620	4850	5081	5311	5542	5772	6002	6232
9	6462	6692	6921	7151	7380	7609	7838	8067	8296	8525
190	27 8754	8982	9211	9439	9667	9895	*0123	*0351	*0578	*0806
1	28 1033	1261	1488	1715	1942	2169	2396	2622	2849	3075
2	3301	3527	3753	3979	4205	4431	4656	4882	5107	5332
3	5657	5782	6007	6232	6456	6681	6905	7130	7354	7578
4	7882	8026	8249	8473	8996	8920	9143	9366	9589	9812
195	29 0035	0257	0480	0702	0925	1147	1369	1591	1313	2034
6	2256	2478	2699	2920	3141	3363	3584	3804	4025	4246
7	4466	4687	4907	5127	5347	5567	5787	6007	6226	6446
8	6665	6884	7104	7323	7542	7761	7979	8198	8416	8635
9	8853	9071	9289	9507	9725	9943	*0161	*0378	*0595	*0813

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	30 1030	1247	1464	1681	1898	2114	2331	2547	2764	2980
1	3196	3412	3628	3844	4059	4275	4491	4706	4921	5136
2	5351	5566	5781	5996	6211	6425	6639	6854	7068	7282
3	7496	7710	7924	8137	8351	8564	8778	8991	9204	9417
4	9630	9843	*0056	*0268	*0481	*0693	*0906	*1118	*1330	*1542
205	31 1754	1966	2177	2389	2600	2812	3023	3234	3445	3656
6	3867	4078	4289	4499	4710	4920	5130	5340	5551	5760
7	5970	6180	6390	6599	6809	7018	7227	7436	7646	7854
8	8063	8272	8481	8689	8898	9106	9314	9522	9730	9938
9	32 0146	0354	0562	0769	0977	1184	1391	1598	1805	2012
210	32 2219	2426	2633	2839	3046	3252	3458	3665	3871	4077
1	4282	4488	4694	4899	5105	5310	5516	5721	5926	6131
2	6336	6541	6745	6950	7155	7359	7563	7767	7972	8176
3	8380	8583	8787	8991	9194	9398	9601	9805	*0008	*0211
4	33 0414	0617	0819	1022	1225	1427	1630	1832	2034	2236
215	33 2438	2640	2842	3044	3246	3447	3649	3850	4051	4253
6	4454	4655	4856	5057	5257	5458	5658	5859	1659	8257
7	6460	6660	6860	7060	7260	7459	7659	7858	6059	6260
8	8456	8656	8855	9054	9253	9451	9650	9849	*0047	*0246
9	34 04444	0642	0841	1039	1237	1435	1632	1830	2028	2225
220	34 2423	2620	2817	3014	3212	3409	3606	3802	3999	4196
1	4392	4589	4785	4981	5178	5374	5570	5766	5962	6157
2	6353	6549	6744	6939	7135	7330	7525	7720	7915	8111
3	8305	8500	8694	8889	9083	9278	9472	9666	9860	*0054
4	35 0248	0442	0636	0829	1023	1216	1410	1603	1796	1989
225	35 2183	2375	2568	2761	2964	3147	3339	3532	3724	3916
6	4108	4301	4493	4685	4876	5068	5260	5452	5643	5834
7	6025	6217	6408	6599	6790	6981	7172	7363	7554	7744
8	7935	8125	8316	8506	8696	8886	9076	9266	9456	9646
9	9835	*0025	*0215	*0404	*0593	*0783	*0972	*1161	*1350	*1539
230	36 1728	1917	2105	2294	2482	2671	2859	3048	3236	3424
1	3612	3800	3988	4176	4363	4551	4739	4926	5113	5301
2	5488	5675	5862	6049	6236	6423	6610	6796	6983	7169
3	7356	7542	7729	5915	8101	8287	8473	8659	8845	9030
4	9216	9401	9587	6772	9958	*0143	*0238	*0513	*0698	*0883
235	37 1068	1253	1437	1622	1806	1991	2175	2360	2544	2728
6	2912	3096	3280	3464	3647	3831	4015	4198	4382	4565
7	4748	4932	5115	6298	5481	5664	5846	6029	6212	6394
8	6577	6759	6942	7124	7306	7488	7670	7852	8034	8216
9	8398	8580	8761	3943	9124	9306	9487	9668	9849	*0030
240	38 0211	0392	0573	0754	0934	1145	1296	1476	1650	1837
1	2017	2197	2377	2557	2737	2917	3097	3277	3456	3636
2	3815	3995	4174	4353	4533	4712	4891	5070	5249	5468
3	5606	5785	5964	5142	6321	6499	6677	6856	7034	7212
4	7390	7568	7746	7923	3101	8279	8456	8634	8811	8989
245	38 9166	9343	9520	9598	9875	*0051	*0228	*0405	*0582	*0759
6	39 0935	1112	1288	1464	1641	1817	1992	2169	2345	2521
7	2697	2873	3048	3224	3400	3575	3751	3926	4101	4287
8	4452	4627	4802	4977	5152	5326	5501	5676	5850	6025
9	6199	6374	6548	6722	6896	7071	7245	7419	7592	7766

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	39 7940	8114	8287	8461	8634	8808	8981	9154	9328	9501
1	9 674	9847	*0020	*0192	*0365	*0538	*0711	*0883	*1056	*1228
2	40 1401	1573	1745	1917	2089	2261	2433	2605	2777	2949
3	3 121	3292	3464	3635	3807	3978	4149	4320	4492	4663
4	4 834	5005	5176	5346	5517	5688	5858	6029	6199	6370
255	40 0540	6710	6881	7051	7221	7391	7561	7731	7901	8070
6	8 240	8410	8579	8749	8918	9087	9257	9426	9595	9764
7	9 933	*0102	*0271	*440	*0609	*0777	*0946	*1114	*1283	*1451
8	41 1620	1788	1956	2124	2293	2461	2629	2796	2964	3132
9	3 300	3467	3635	3803	3970	4137	4305	4472	4639	4806
260	41 4973	5140	5307	5474	5641	5808	5974	6141	6308	6474
1	6 641	6807	6973	7139	7306	7472	7638	7804	7970	8135
2	8 301	8467	8633	8798	8964	9129	9295	9460	9625	9791
3	9 956	*0121	*0286	*0451	*0616	*0781	*0945	*1410	*1275	*1439
4	42 1604	1768	1933	2097	2261	2426	2590	2754	2918	3082
265	42 3246	3410	3574	3737	3901	4065	4228	4392	4555	4718
6	4 882	5045	5208	5371	5524	5697	5860	6023	6186	6349
7	6 511	6674	6836	6999	7161	7324	7486	7648	7811	7973
8	8 135	8297	8459	8621	8783	8944	9106	9268	9429	9591
9	9 752	9914	*0075	*0236	*0398	*0559	*0720	*0881	*1042	*1203
270	43 1364	1525	1685	1846	2007	2167	2328	2488	2649	2809
1	2 969	3130	3290	3450	3610	3770	3930	4090	4249	4409
2	4569	4729	4888	5048	5207	5367	5526	5685	5844	6004
3	6163	6322	6481	6640	6799	6957	7116	7275	7433	7592
4	7751	7909	8067	8226	8384	8542	8701	8859	9017	9175
275	43 9338	9491	9648	9806	9964	*0122	*0279	*0437	*0594	*0752
6	44 0909	1066	1224	1381	1538	1695	1852	2009	2166	2323
7	2480	2637	2793	2950	3106	3263	3419	3576	3732	3889
8	4045	4201	4357	4513	4669	4825	4981	5137	5293	5449
9	5504	5760	5915	6071	6236	6382	6537	6692	6848	7003
280	44 7158	7313	7468	7623	7778	7933	8088	8242	8397	8552
1	8706	8861	9015	9170	9324	9478	9633	9787	9941	*0095
2	45 0249	0403	0557	0711	0865	1018	1172	1326	1479	1633
3	1786	1940	2093	2247	2400	2553	2706	2859	3012	3165
4	3318	3471	3624	3777	3930	4082	4235	4387	5440	4692
285	45 4845	4997	5150	5302	5454	5606	5758	5910	6062	6214
6	6366	6518	6670	6821	6973	7125	7276	7428	7579	7731
7	7882	8033	8184	8336	8487	8638	8789	8940	9091	9242
8	9392	9543	9694	9845	9995	*0146	*0296	*0447	*0597	*0748
9	46 0898	1048	1198	1348	1499	1649	1799	1948	2098	2248
290	46 2398	2548	2697	2847	2997	3146	3296	3445	3594	3744
1	3893	4042	4191	4340	4490	4639	4788	4936	5085	5234
2	5383	5532	5680	5829	5977	6126	6274	6423	6571	6719
3	6868	7016	7164	7312	7460	7608	7756	7904	8052	8200
4	8347	8495	8643	8790	8938	9085	9233	9380	9527	9675
295	46 9822	9969	*0116	*0263	*0410	*0557	*0704	*0851	*0998	*1145
6	47 1292	1438	1585	1732	1878	2025	2171	2318	2464	2610
7	2756	2903	3049	3195	3341	3487	3633	3779	3925	4071
8	4216	4362	4508	4653	4799	4944	5090	5235	5381	5526
9	5671	5816	5962	6107	6252	6397	6542	6687	6832	6976

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47 7121	7266	7411	7555	7700	7844	7989	8133	8278	8422
1	8566	8711	8855	8999	9143	9287	9431	9575	9719	9863
2	48 0007	0151	0294	0438	0582	0725	0869	1012	1156	1299
3	1443	1586	1729	1872	2016	2159	2302	2445	2588	2731
4	2874	3016	3159	3302	3445	3587	3730	3872	4015	4157
305	48 4300	4442	4585	4727	4869	5011	5153	5295	5437	55796
6	5721	5863	6005	6147	6289	6430	6572	6714	6855	6997
7	7138	7280	7421	7563	7704	7845	7986	8127	8269	8410
8	8551	8692	8833	8974	9114	9255	9396	9537	9677	9818
9	9958	*0099	*0239	*0380	*0520	*0661	0801	*0941	*1081	*1222
310	49 1362	1502	1642	1782	1922	2062	2201	2341	2481	2621
1	2760	2900	3040	3179	3319	3458	3597	3737	3876	4015
2	4155	4294	4433	4572	4711	4850	4989	5128	5267	5406
3	5544	5683	5822	5960	6099	6238	6376	6515	6653	6791
4	6930	7068	7206	7344	7483	7621	7759	7897	8035	8173
315	49 8311	8448	8586	8724	8862	8999	9137	9275	9412	9550
6	9687	9824	9962	*0099	*0236	*0374	*0511	*0648	*0785	*0922
7	50 1059	1196	1333	1470	1607	1744	1880	2017	2154	2291
8	2427	2564	2700	2837	2973	3109	3246	3382	3518	3655
9	3791	3927	4063	4199	4335	4471	4607	4743	4878	5014
320	50 5150	5286	5421	5557	5693	5828	5964	6099	6234	6370
1	6505	6640	6776	6911	7046	7181	7316	7451	7586	7721
2	7856	7991	8126	8260	8395	8530	8664	8799	8934	9068
3	9203	9337	9471	9606	9740	9874	*0009	*0143	*0277	*0411
4	51 0545	0679	0813	0947	1081	1215	1349	1482	1616	1750
325	51 1883	2017	2151	2284	2418	2551	2684	2818	2951	3084
6	3218	3351	3484	3617	3750	3883	4016	4149	4282	4415
7	4548	4681	4813	4946	5079	5211	5344	5476	5609	5741
8	5874	6006	6139	6271	6403	6535	6668	6800	6932	7064
9	7196	7328	7460	7592	7724	7855	7987	8119	8251	8382
330	51 8514	8646	8777	8909	9040	9171	9303	9434	9566	9697
1	9828	9959	*0090	*0221	*0353	*0484	*0615	*0745	*0876	*1007
2	52 1138	1269	1400	1530	1661	1792	1922	2053	2183	2314
3	2444	2575	2705	2835	2966	3096	3226	3356	3486	3616
4	3746	3876	4006	4136	4266	4396	4526	4656	4785	4915
335	52 5045	5174	5304	5434	5563	5693	5822	5951	6081	6210
6	6339	6469	6598	6727	6856	6985	7114	7243	7372	7501
7	7630	7759	7888	8016	8145	8274	8402	8531	8660	8788
8	8917	9045	9174	9302	9430	9559	9687	9815	9943	*0072
9	53 0200	0328	0456	0584	0712	0840	0968	1096	1223	1351
340	53 1479	1607	1734	1862	1990	2117	2245	2372	2500	2627
1	2754	2882	3009	3136	3264	3391	3518	3645	3772	3899
2	4026	4153	4280	4407	4534	4661	4787	4914	5041	5167
3	5294	5421	5547	5674	5800	5927	6053	6180	6306	6432
4	6558	6685	6811	6937	7063	7189	7315	7441	7567	7693
345	53 7819	7945	8071	8197	8322	8448	8574	8699	8825	8951
6	9076	9202	9327	9452	9578	9703	9829	9954	*0079	*0204
7	54 0329	0455	0580	0705	0830	0955	1080	1205	1330	1454
8	1579	1704	1829	1953	2078	2203	2327	2452	2576	2701
9	2825	2950	3074	3199	3323	3447	3571	3696	3820	3944

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
350	54 4068	4192	4316	4440	4564	4688	4812	4936	5060	5183
1	5307	5431	5555	5678	5802	5925	6049	6172	6296	6410
2	6543	6666	6789	6913	7036	7159	7282	7405	7529	7652
3	7775	7898	8021	8144	8267	8389	8512	8635	8753	8881
4	9003	9126	9249	9371	9494	9616	9739	9861	9984	*0106
355	55 0228	0351	0473	0595	1717	0840	0962	1084	1206	1328
6	1450	1572	1694	1816	1933	2060	2181	2303	2425	2547
7	2668	2790	2911	3033	3255	3276	3398	3519	3640	3762
8	3883	4004	4126	4247	4368	4489	4610	4731	4852	4973
9	5094	5215	5336	5457	5578	5699	5820	5940	6061	6182
360	55 6303	6423	6544	6664	6785	6905	7026	7146	7267	7387
1	7507	7627	7748	7868	7988	8108	8228	8349	8469	8589
2	8709	8829	8948	9068	9188	9308	9428	9548	9667	9787
3	9907	*0026	*0146	*0265	*0385	*0504	*0624	*0743	*0863	*0982
4	56 1101	1221	1340	1459	1578	1698	1817	1936	2055	2174
365	56 2293	2412	2531	2650	2769	2887	3006	3125	3244	3362
6	3481	3600	3718	3837	3955	4074	4192	4311	4429	4548
7	4666	4784	4903	5021	5139	5257	5376	5494	5612	5730
8	5848	5966	6084	6202	6320	6437	6555	6673	6791	6909
9	7026	7144	7262	7379	7497	7614	7732	7849	7967	8084
370	56 8202	8319	8436	8554	8671	8788	8905	9023	9140	9257
1	9374	9491	9608	9725	9842	9959	*0076	*0193	*0309	*0426
2	57 0543	0660	0776	0893	1010	1126	1243	1359	1459	1592
3	1709	1825	1942	2058	2174	2291	2407	2523	2639	2755
4	2872	2988	3104	3220	3336	3452	3568	3684	3800	3915
375	57 4031	4147	4263	4379	4494	4610	4726	4841	4957	5072
6	5188	5303	5419	5534	5650	5765	5880	5996	6111	6226
7	6341	6457	6572	6687	6802	6917	7032	7147	7282	7377
8	7492	7607	7722	7836	7951	8066	8181	8295	8410	8526
9	8639	8754	8868	8983	9097	9212	9326	9441	9555	9669
380	57 9784	9898	*0012	*0126	*0241	*0355	*0469	*0583	*0697	*0811
1	58 0925	1039	1153	1267	1381	1495	1608	1722	1830	1950
2	2063	2177	2291	2404	2518	2631	2746	2858	2972	3085
3	3199	3312	3426	3539	3652	3765	3879	3992	4105	4218
4	4331	4444	4557	4670	4783	4896	5009	5122	5235	5348
385	58 5461	5574	5686	5799	5912	6024	6137	6250	6362	6475
6	6587	6700	6812	6925	7037	7149	7262	7374	7486	7699
7	7711	7823	7935	8047	8160	8272	8384	8496	8608	8720
8	8832	8944	9056	9167	9279	9391	9503	9615	9726	9838
9	9950	*0061	*0173	*0284	*0396	*0507	*0619	*0730	*0842	*0953
390	59 1065	1176	1287	1399	1510	1621	1732	1843	1955	2066
1	2177	2288	2399	2510	2621	2732	2843	2954	3064	3175
2	3286	3397	3508	3618	3729	3840	3950	4061	4171	4282
3	4393	4503	4614	4724	4834	4945	5055	5165	5276	5386
4	5496	5606	5717	5827	5937	6047	6157	6267	6377	6487
395	59 6597	6707	6817	6927	7037	7146	7256	7366	7476	7586
6	7695	7805	7914	8024	8134	8243	8353	8462	8572	8681
7	8791	8900	9009	9119	9228	9337	9446	9556	9665	9774
8	9883	9992	*0101	*0210	*0319	*0428	*0537	*0616	*0755	*0864
9	60 0973	1082	1191	1299	1408	1517	1625	1734	1843	1951

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
400	60 2060	2169	2277	2386	2494	2603	2711	2819	2928	3036
1	3144	3253	3361	3469	3577	3686	3794	3902	4010	4118
2	4226	4334	4442	4550	4658	4766	4874	4982	5089	5197
3	5305	5413	5521	5628	5736	5844	5951	6059	6166	6274
4	6381	6489	6596	6704	6811	6919	7026	7133	7241	7348
405	60 7455	7562	7669	7777	7884	7991	8098	8205	8312	8419
6	8526	8633	8740	8817	8954	9061	9167	9274	9381	9488
7	9594	9701	9808	9914	*0021	*0123	*0234	*0341	*0447	*0554
8	61 0660	0767	0873	0979	1086	1192	1298	1405	1511	1617
9	1723	1829	1936	2042	2148	2254	2360	2466	2572	2678
410	61 2784	2890	2996	3102	3207	3313	3419	3525	3630	3736
1	3842	3947	4053	4159	4264	4370	4475	4581	4686	4792
2	4897	5003	5108	5213	5319	5424	5529	5634	5740	5845
3	5950	6055	6160	6265	6370	6476	6581	6686	6790	6895
4	7000	7105	7210	7315	7420	7525	7629	7734	7839	7943
415	61 8048	8153	8257	8362	8466	8571	8676	8780	8884	8989
6	9093	9198	9302	9406	9511	9615	9719	9824	9928	0032
7	62 0136	0240	0344	0448	0552	0656	0760	0864	0968	1072
8	1176	1280	1384	1488	1592	1695	1799	1903	2007	2110
9	2214	2318	2421	2525	2628	2732	2835	2939	3042	3146
420	62 3249	3353	3456	3559	3663	3766	3869	3973	4076	4179
1	4282	4385	4488	4591	4695	4798	4901	5004	5107	5210
2	5312	5415	5518	5621	5724	5827	5929	6032	6135	6238
3	6340	6443	6546	6643	6751	6853	6956	7058	7161	7263
4	7366	7468	7571	7673	7775	7878	7980	8082	8185	8287
425	62 8389	8491	8593	8695	8797	8900	9002	9104	9206	9308
6	9410	9512	9613	9715	9817	9919	*0021	*0123	*0224	*0326
7	63 0428	0530	0631	0733	0835	0936	1038	1139	1241	13428
8	1444	1546	1647	1748	1849	1951	2052	2153	2255	2356
9	2457	2559	2660	2761	2862	2963	3064	3165	3266	3367
430	633468	3569	3670	3771	3872	3973	4074	4175	4276	4376
1	4477	4578	4679	4779	4880	4981	5081	5182	5283	5383
2	5484	5584	5685	5785	5886	5986	6087	6187	6287	6388
3	6488	6588	6688	6789	6889	6989	7089	7189	7290	7390
4	7490	7590	7690	7790	7890	7990	8090	6190	8290	8389
435	63 8489	8589	8689	8789	8888	8988	9088	9188	9287	9387
6	9486	9586	9686	9785	9885	9984	*0084	*0183	*0283	*0382
7	64 0481	0581	0680	0779	0879	0978	1077	1177	1276	1375
8	1474	1573	1672	1771	1871	1970	2069	2168	2267	2366
9	2465	2563	2662	2761	2860	2959	3058	3156	3255	3354
440	64 3453	3551	3650	3749	3847	3946	4044	4143	4242	4340
1	4439	4537	4636	4734	4832	4931	5029	5127	5226	5324
2	5422	5521	5619	5717	5815	5913	6011	6110	6208	6306
3	6404	6502	6600	6698	6796	6894	6992	7089	7187	7285
4	7383	7481	7579	7676	7774	7872	7969	8067	8165	8262
445	64 8360	8458	8555	8653	8750	8848	8945	9043	9140	9237
6	9335	9432	9530	9627	9724	9821	9919	*0016	*0113	*0210
7	65 0380	0405	0502	0599	0696	0793	0890	0987	1084	1181
8	1278	1375	1472	1569	1666	1762	1859	1956	2053	2150
9	2246	2343	2440	2536	2633	2730	2826	2923	3019	3116

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
450	65 3213	3309	3405	3502	3598	3695	3791	3888	3984	4080
1	4177	4273	4369	4465	4562	4658	4754	4850	4946	5042
2	5138	5235	5331	5427	5423	5619	5715	5810	5906	6002
3	6098	6194	6290	6386	6482	6577	6673	6769	6864	6960
4	7056	7152	7247	7343	7438	7534	7629	7725	7820	7916
455	65 8011	8107	3202	8298	8393	8488	8584	8679	8774	8870
6	8965	9060	9155	9250	9346	9441	9536	9631	9726	9821
7	9916	*0011	*0106	*0201	*0296	*0391	*0486	*0581	*0676	*0771
8	66 0865	0960	1055	1150	1245	1339	1434	1529	1623	1718
9	1813	1907	2002	2096	2191	2286	2380	2475	2569	2663
460	66 2758	2852	2947	3041	3135	3230	3324	3418	3512	3607
1	3701	3795	3889	3983	4078	4172	4266	4360	4454	4548
2	4642	4736	4830	4924	5018	5112	5206	5299	5393	5487
3	5581	5675	5769	5862	5956	6050	6143	6237	6331	6424
4	6518	6612	6705	6799	6892	6986	7079	7173	7266	7360
465	66 7453	7546	7640	7733	7826	7920	8013	8106	8199	8293
6	8386	8479	8572	8665	8759	8852	8945	9038	9131	9224
7	9317	9410	9503	9596	9689	9782	9875	9967	*0060	*0153
8	67 0246	0339	0431	0524	0617	0710	0802	0895	0988	1080
9	1173	1265	1358	1451	1543	1636	1728	1821	1913	2005
470	67 2098	2190	2283	2375	2467	2560	2652	2744	2836	2929
1	3021	3113	3205	3297	3390	3482	3574	3666	3758	3850
2	3942	4034	4126	4218	4310	4402	4494	4586	4677	4769
3	4861	4953	5045	5137	5228	5320	5412	5503	5595	5687
4	5778	5870	5962	6053	6145	6236	6328	6419	6511	6602
475	67 6694	6785	6876	6968	7059	7151	7242	7333	7424	7516
6	7607	7698	7789	7881	7972	8063	8154	8245	8336	8427
7	8518	8609	8700	8791	8882	8973	9064	9155	9246	9337
8	9428	9519	9610	9700	9791	9882	9973	*0063	*0154	*0245
9	68 0336	0426	0517	0617	0698	0789	0879	0970	1060	1151
480	68 1241	1332	1422	1513	1603	1693	1784	1874	1964	2055
1	2145	2235	2326	2416	2506	2596	2686	2777	2867	2957
2	3047	3137	3227	3317	3407	3497	3587	3677	3767	3857
3	3947	4037	4127	4217	4307	4396	4486	4576	4666	4756
4	4845	4935	5025	5114	5204	5294	5383	5473	5563	5652
485	66 5742	5831	5921	6010	6100	6189	6279	6368	6458	6547
6	6636	6726	6815	6904	6994	7083	7172	7261	7351	7440
7	7529	7618	7707	7796	7886	7975	8064	8153	8242	8331
8	8420	8509	8598	8687	8776	8865	8953	9042	9131	9220
9	9309	9398	9486	9575	9664	9753	9841	9930	*0019	*0107
490	69 0196	0285	0373	0462	0550	9639	0728	0816	0905	0993
1	1081	1170	1258	1347	1435	1524	1612	1700	1789	1877
2	1965	2053	2142	2230	2318	2406	2494	2583	2671	2759
3	2847	2935	3023	3111	3199	3287	3375	3463	3551	3639
4	3727	3815	3903	3991	4078	4166	4254	4342	4430	4517
495	69 4605	4693	4781	4868	4956	5044	5131	5219	5307	5394
6	5482	5569	5657	5744	5832	5919	6007	6094	6182	6269
7	6356	6444	6531	6618	6706	6793	6880	6968	7055	7142
8	7229	7317	7404	7491	7578	7665	7752	7839	7926	8014
9	8101	8188	8275	8362	8449	8535	8622	8709	8796	8883

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69 8970	9057	9144	9231	9317	9404	9491	9578	9664	9751
1	9838	9924	*0011	*0098	*0184	*0271	*0358	*0444	*0531	*0617
2	70 0704	0790	0877	0963	1050	1136	1222	1309	1395	1482
3	1568	1654	1741	1827	1913	1999	2086	2172	2258	2344
4	2431	2517	2603	2689	2775	2861	2947	3033	3119	3205
505	70 3291	3377	3463	3549	3635	3721	3807	3893	3979	4065
6	4151	4236	4322	4408	4494	4579	4665	4751	4837	4922
7	5008	5094	5179	5265	5350	5436	5522	5607	5693	5778
8	5864	5949	6035	6120	6206	6291	6376	6462	6547	6632
9	6718	6803	6888	6974	7059	7144	7229	7315	7400	7485
510	70 7570	7655	7740	7826	7911	7996	8081	8166	8251	8336
1	8421	8506	8591	8676	8761	8846	8931	9015	9100	9185
2	9270	9355	9440	9524	9609	9694	9779	9863	9948	*0033
3	71 0117	0202	0287	0371	0456	0540	0625	0710	0794	0879
4	0963	1048	1132	1217	1301	1385	1470	1554	1639	1723
515	71 1807	1892	1976	2060	2144	2229	2313	2397	2481	2556
6	2650	2734	2818	2902	2986	3070	3154	3238	3323	3407
7	3491	3575	3659	3742	3826	3910	3994	4078	4162	4246
8	4330	4414	4497	4581	4665	4749	4833	4916	5000	5084
9	5167	5251	5335	5418	5502	5586	5669	5753	5836	5920
520	71 6003	6087	6170	6254	6337	6421	6504	6588	6671	6754
1	6838	6921	7004	7088	7171	7254	7338	7421	7504	7587
2	7671	7754	7837	7920	8003	8086	8169	8253	8336	8419
3	8502	8585	8668	8751	8834	8917	9000	9083	9165	9248
4	9331	9414	9497	9580	9663	9745	9828	9911	9994	*0077
525	72 0159	0242	0325	0407	0490	0573	0655	0738	0821	0903
6	0986	1068	1151	1233	1316	1398	1481	1563	1646	1728
7	1811	1893	1975	2058	2140	2222	2305	2387	2469	2552
8	2634	2716	2798	2881	2963	3045	3127	3209	3291	3374
9	3456	3538	3620	3762	3784	3866	3946	3030	4112	4194
530	72 4276	4358	4440	4522	4604	4685	4767	4849	4931	5013
1	5095	5176	5258	5340	5422	5503	5585	5667	5748	5830
2	5912	5993	6075	6156	6238	6320	6401	6483	6564	6646
3	6727	6809	6890	6972	7053	7134	7216	7267	7379	7460
4	7541	7623	7704	7785	7866	7948	8029	8110	8191	8273
535	72 8354	8435	8516	8597	8678	8759	8841	8922	9003	9084
6	9165	9246	9327	9408	9489	9576	9651	9732	9813	9893
7	9974	*0055	*0136	*0217	*0298	*0378	*0459	*0540	*0621	*0702
8	73 0782	0863	0944	1024	1105	1186	1266	1347	1428	1508
9	1589	1669	1750	1830	1911	1991	2072	2152	2233	2313
540	73 2394	2474	2555	2635	2715	2796	2876	2956	3037	3117
1	3197	3278	3358	3438	3518	3598	3679	3759	3839	3919
2	3999	4079	4160	4240	4320	4400	4480	4560	4640	4720
3	4800	4880	4960	5040	5120	5200	5279	5359	5439	5519
4	5599	5679	5759	5838	5918	5998	6078	6157	6237	6317
545	73 6397	6476	6556	6635	6715	6795	6874	6954	7034	7113
6	7193	7272	7352	7431	7511	7590	7670	7749	7829	7908
7	7987	8067	8146	8225	8305	8384	8463	8543	8622	8701
8	8781	8860	8939	9018	9097	9177	9256	9335	9414	9493
9	9572	9651	9731	9810	9889	9968	*0047	*0126	*0205	*0284

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
550	74 0363	0442	0521	0600	0678	0757	0836	0915	0994	1073
1	1152	1230	1309	1383	1467	1546	1624	1703	1782	1860
2	1939	2018	2096	2175	2254	2332	2411	2489	2568	2647
3	2725	2804	2882	2961	3039	3118	3196	3275	3353	3431
4	3510	3588	3667	3745	3823	3902	3980	4058	4136	4215
555	74 4293	4371	4449	4528	4606	4684	4762	4840	4919	4997
6	5075	5153	5231	5309	5387	5465	5543	5621	5699	5777
7	5855	5933	6011	6089	6167	6245	6323	6401	6479	6556
8	6634	6712	6790	6868	6945	7023	7101	7179	7256	7334
9	7412	7489	7567	7645	7722	7800	7878	7955	8033	8110
560	74 8188	8266	8343	8421	8498	8576	8653	8731	8808	8885
1	8963	9040	9118	9195	9272	9350	9427	9504	9582	9659
2	9736	9814	9891	9968	*0045	*0123	*0200	*0277	*0354	*0431
3	75 0508	0586	0663	0740	0817	0894	0971	1048	1125	1202
4	1279	1356	1433	1510	1587	1664	1741	1818	1895	1972
565	75 2048	2125	2202	2279	2356	2433	2509	2586	2663	2740
6	2816	2893	2970	3047	3123	3200	3277	3353	3430	3506
7	3583	3660	3736	3813	3889	3966	4042	4119	4195	4272
8	4348	4425	4501	4578	4654	4730	4807	4119	4197	4272
9	5112	5189	5265	5341	5417	5494	5570	5646	5722	5799
570	75 5875	5951	6027	6103	6180	6256	6332	6408	6484	6560
1	6636	6712	6788	6864	6940	7016	7092	7168	7244	7320
2	7396	7472	7548	7624	7700	7775	7851	7927	8003	8079
3	8155	8230	8306	8382	8458	8533	8609	8685	8761	8836
4	8912	8988	9063	9139	9214	9290	9366	9441	9517	9592
575	75 9668	9743	9819	9894	9970	*0045	*0121	*0196	*0272	*0347
6	76 0422	0498	0573	0649	0724	0799	0875	0950	1025	1101
7	1176	1251	1326	1402	1477	1552	1627	1702	1778	1853
8	1928	2003	2078	2153	2228	2303	2378	2453	2529	2604
9	2679	2754	2829	2904	2978	3053	3128	3203	3278	3353
580	76 3428	3503	3578	3653	3727	3802	3877	3952	4027	4101
1	4176	4251	4336	4400	4475	4550	4624	4699	4774	4848
2	4923	4998	5072	5147	5221	5296	5370	5445	5520	5594
3	5669	5743	5818	5892	5966	6041	6115	6190	6264	6338
4	6413	6487	6562	6636	6710	6785	6859	6933	7007	7082
585	76 7156	7230	7304	7379	7453	7527	7601	7675	7749	7823
6	7898	7972	8046	8120	8194	8268	8342	8416	8490	8564
7	8638	8712	8786	8860	8934	9008	9082	9156	9230	9303
8	9377	9451	9525	9599	9673	9746	8230	9894	9968	*0042
9	77 0115	0189	0263	0336	0410	0484	0557	0631	0705	0778
590	77 0852	0926	0999	1073	1146	1220	1293	1367	1440	1514
1	1587	1661	1734	1808	1881	1955	2028	2102	2175	2248
2	2322	2395	2468	2542	2615	2688	2762	2835	2908	2981
3	3055	3128	3201	3274	3348	3421	3494	3567	3640	3713
4	3786	3860	3933	4006	4079	4152	4225	4298	4371	4444
595	77 4517	4590	4663	4736	4809	4882	4955	5028	5100	5173
6	5246	5319	5392	5465	5538	5610	5683	5756	5829	5902
7	5974	6067	6120	6193	6265	6338	6411	6483	6556	6629
8	6701	6774	6846	6919	6992	7064	7137	7209	7282	7354
9	7427	7499	7572	7644	7717	7789	7862	7934	8006	8079

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	77 8151	8224	8296	8368	8441	8513	8585	8658	8730	8802
1	8874	8947	9019	9091	9163	9236	9308	9380	9452	9524
2	9596	9669	9741	9813	9885	9957	**0029**	0101	*0173	*0245
3	78 0317	0389	0461	0533	0605	0677	0749	0821	0893	0965
4	1037	1109	1181	1253	1324	1396	1468	1540	1612	1684
605	78 1755	1827	1899	1971	2042	2114	2186	2258	2329	2401
6	2473	2544	2616	2688	2759	2831	2902	2974	3046	3117
7	3189	3260	3332	3403	3475	3546	3618	3689	3761	3832
8	3904	3975	4046	4118	4189	4261	4332	4403	4475	4546
9	4617	4689	4760	4831	4902	4974	5045	5116	5187	5259
610	78 5330	5401	5472	5543	5615	5686	5757	5828	5899	5970
1	6041	6112	6183	6254	6325	6396	6467	6538	6609	6680
2	6751	6822	6893	6964	7035	7106	7177	7248	7319	7390
3	7460	7531	7602	7673	7744	7815	7885	7956	8027	8098
4	8168	8239	8310	8381	8451	8522	8593	8663	8734	8804
615	78 8875	8946	9016	9087	9157	9228	9299	9369	9440	9510
6	9581	9651	9722	9792	9863	9933	*0004	*0074	*0144	*0215
7	79 0285	0356	0426	0496	0567	0637	0707	0778	0848	0918
8	0988	1059	1129	1199	1269	1340	1410	1480	1550	1620
9	1691	1761	1831	1901	1971	2041	2111	2181	2252	2322
620	79 2392	2462	2532	2602	2672	2742	2812	2882	2952	3022
1	3092	3162	3231	3301	3371	3441	3511	3581	3651	3721
2	3790	3860	3930	4000	4070	4139	4209	4279	4349	4418
3	4488	4558	4627	4697	4767	4836	4906	4976	5045	5115
4	5185	5254	5324	5393	5463	5532	5602	5672	5741	5811
625	79 5880	5949	6019	6088	6158	6227	6297	6366	6436	6505
6	6574	6644	6713	6782	6852	6921	6990	7060	7129	7198
7	7268	7337	7406	7475	7545	7614	7683	7752	7821	7890
8	7960	8029	8098	8167	8236	8305	8374	8443	8513	8582
9	8651	8720	8789	8858	8927	8996	9065	9134	9203	9272
630	79 9341	9409	9478	9547	9616	9685	9754	9823	9892	9961
1	80 0029	0098	0167	0236	0305	0373	0442	0511	0580	0648
2	0717	0786	0854	0923	0992	1061	1129	1198	1266	1335
3	1404	1472	1541	1609	1678	1747	1815	1884	1952	2021
4	2089	2158	2226	2295	2363	2432	2500	2568	2637	2705
635	80 2774	2842	2910	2979	3047	3116	3184	3252	3321	3389
6	3457	3525	3594	3662	3730	3798	3867	3935	4003	4071
7	4139	4208	4276	4344	4412	4480	4548	4616	4685	4753
8	4821	4889	4957	5025	5093	5161	5229	5297	5365	5433
9	5501	5569	5637	5705	5773	5841	5908	5976	6044	6112
640	80 6180	6248	6316	6384	6451	6519	6587	6655	6723	6790
1	6858	6926	6994	7061	7129	7197	7264	7332	7400	7467
2	7535	7603	7670	7738	7806	7873	7941	8008	8076	8143
3	8211	8279	8346	8414	8481	8549	8616	8664	8751	8818
4	8886	8953	9021	9098	9156	9223	9290	9358	9425	9192
645	80 9540	9627	9694	9762	9829	9896	9964	*0031	*0098	*0165
6	81 0233	0300	0367	0434	0501	0569	0636	0703	0770	0837
7	0904	0971	1039	1106	1173	1240	1307	1374	1441	1508
8	1575	1642	1709	1776	1843	1910	1977	2044	2111	2178
9	2245	2312	2379	2445	2512	2579	2646	2713	2780	2847

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
650	81 2913	2980	3047	3114	3181	3247	3314	3381	3448	3514
1	3581	3648	3714	3781	3848	3914	3981	4048	4114	4181
2	4248	4314	4381	4447	4514	4581	4647	4714	4780	4847
3	4913	4980	5046	5113	5179	5246	5312	5378	5445	5511
4	5578	5644	5711	5777	5843	5910	5976	6042	6109	6175
655	81 6241	6308	6374	6440	6506	6573	6639	6705	6771	6838
6	7565	7631	7698	7764	7830	7896	7962	8028	8094	8160
7	7565	7631	7698	7764	7830	7896	7962	8028	8094	8160
8	8226	8292	8358	8424	8490	8556	8622	8688	8754	8820
9	8885	8951	9017	9083	9149	9215	9281	9346	9412	9478
660	81 9544	9610	9676	9741	9807	9873	9939	*0004	*0070	*0136
1	82 0201	0267	0333	0399	0464	0530	0595	0661	0727	0792
2	0858	0924	0989	1055	1120	1186	1251	1317	1382	1448
3	1514	1579	1645	1710	1775	1841	1906	1972	2037	2103
4	2168	2233	2299	2364	2430	2495	2560	2626	2691	2756
665	82 2822	2887	2952	3018	3083	3148	3213	3279	3344	3409
6	3474	3539	3605	3670	3735	3800	3865	3930	3996	4061
7	4126	4191	4256	4321	4386	4451	4516	4581	4646	4711
8	4776	4841	4906	4971	5036	5101	5166	5231	5296	5361
9	5426	5491	5556	5621	5686	5751	5815	5880	5945	6010
670	82 6075	6140	6204	6269	6334	6399	6464	6528	6593	6658
1	6723	6787	6852	6917	6981	7046	7111	7175	7240	7305
2	7369	7434	7499	7563	7628	7692	7757	7821	7886	7951
3	8015	8080	8144	8209	8273	8338	8402	8467	8531	8595
4	8660	8724	8789	8853	8918	8982	9046	9111	9175	9239
675	82 9304	9368	9432	9497	9561	9625	9690	9754	9818	9882
6	9947	*0011	*0075	*0139	*0204	*0268	*332	*396	*0460	*0525
7	83 0589	0653	0717	0781	0845	0909	0973	1037	1102	1166
8	1230	1294	1358	1422	1486	1550	1614	1678	1742	1806
9	1870	1934	1998	2062	2126	2189	2253	2317	2381	2445
680	83 2509	2573	2637	2700	2764	2828	2892	2956	3020	3083
1	3147	3211	3275	3338	3402	3466	3530	3593	3657	3721
2	3784	3848	3912	3975	4039	4103	4166	4230	4294	4357
3	4421	4484	4548	4611	4675	4739	4802	4866	4929	4993
4	5056	5120	5183	5247	5310	5373	5437	5500	5564	5627
685	83 5691	5754	5817	5881	5944	6007	6071	6134	6197	6261
6	6324	6387	6451	6514	6577	6641	6704	6767	6830	6894
7	6957	7020	7083	7146	7210	7273	7336	7399	7462	7525
8	7588	7652	7715	7778	7841	7904	7967	8030	8093	8156
9	8219	8282	8345	8408	8471	8534	8597	8660	8723	8786
690	83 8849	8912	8975	9038	9101	9164	9227	9289	9352	9415
1	9478	9541	9604	9667	9729	9792	9855	9918	9981	*0043
2	84 0106	0169	0232	0294	0357	0420	0482	0545	0608	0671
3	0733	0796	0859	0921	0984	1046	1109	1172	1234	1297
4	1359	1422	1485	1547	1610	1672	1735	1797	1860	1922
695	84 1985	2047	2110	2172	2235	2297	2360	2422	2484	2547
6	2609	2672	2734	2796	2859	2921	2983	3046	3108	3170
7	3233	3295	3357	3420	3482	3544	3606	3669	3731	3793
8	3855	3918	3980	4042	4104	4166	4229	4291	4353	4415
9	4477	4539	4601	4664	4726	4788	4850	4912	4974	5036

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	84 5098	5160	5222	5284	5346	5408	5470	5532	5594	5656
1	5718	5780	5842	5904	5966	6028	6090	6151	6213	6275
2	6337	6399	6461	6523	6585	6646	6708	6770	6832	6894
3	6955	7017	7079	7141	7202	7264	7326	7388	7449	7511
4	7573	7634	7696	7758	7819	7881	7943	8004	8066	8128
705	84 8189	8251	8312	8374	8435	8497	8559	8620	8682	8743
6	8805	8866	8928	8989	9051	9112	9174	9235	9297	9358
7	9419	9481	9542	9604	9665	9726	9788	9849	9911	9972
8	85 0033	0095	0156	0217	0279	0340	0401	0462	0524	0585
9	0646	0707	0769	0830	0891	0952	1014	1075	1136	1197
710	85 1258	1320	1381	1442	1503	1564	1625	1686	1747	1809
1	1870	1931	1992	2053	2114	2175	2236	2297	2358	2419
2	2480	2541	2602	2663	2724	2785	2846	2907	2968	3029
3	3090	3150	3211	3272	3333	3394	3455	3515	3577	3637
4	3698	3759	3820	3881	3941	4002	4063	4124	4185	4215
715	85 4306	4367	4428	4488	4549	4610	4670	4731	4792	4852
6	4913	4974	5034	5095	5156	5216	5277	5337	5398	5459
7	5519	5580	5640	5701	5761	5822	5882	5943	6003	6064
8	6124	6185	6245	6306	6366	6427	6487	6548	6608	6668
9	6729	6789	6850	6910	6970	7031	7091	7152	7212	7272
720	85 7332	7393	7453	7513	7574	7634	7694	7755	7815	7875
1	7935	7995	8056	8116	8176	8236	8297	8357	8417	8477
2	8537	8597	8657	8718	8778	8838	8898	8958	9018	9078
3	9138	9198	9258	9318	9379	9439	9499	9559	9619	9679
4	9739	9799	9859	9918	9978	*0038	*0098	*0158	*0218	*0273
725	86 0338	0398	0458	0518	0578	0637	0697	0757	0817	0877
6	0937	0996	1056	1116	1176	1236	1295	1355	1415	1475
7	1534	1594	1654	1714	1773	1833	1893	1952	2012	2072
8	2131	2191	2251	2310	2370	2430	2489	2549	2608	2663
9	2728	2727	2847	2906	2966	3025	3085	3144	3204	3263
730	86 3323	3382	3442	3501	3561	3620	3680	3739	3799	3858
1	3917	3977	4036	4096	4155	4214	4274	4333	4392	4452
2	4511	4570	4630	4689	4748	4808	4867	4926	4985	5045
3	5104	5163	5222	5282	5341	5400	5459	5519	5578	5637
4	5696	5755	5814	5874	5933	5992	6051	6110	6169	6228
735	86 287	6346	6405	6465	6524	6583	6642	6701	6760	6819
6	6878	6937	6996	7055	7114	7173	7232	7291	7350	7409
7	7467	7526	7585	7644	7703	7762	7821	7880	7939	7998
8	8056	8115	8174	8233	8292	8350	8409	8468	8527	8586
9	8644	8703	8762	8821	8879	8938	8997	9056	9114	9173
740	86 9232	9290	9349	9408	9466	9525	9584	9642	9701	9760
1	9818	9877	9935	9994	0053	*0111	*0170	*0228	*0287	0345
2	87 0404	0462	0521	0579	0638	0696	0755	0813	0872	0930
3	0989	1047	1106	1164	1223	1281	1339	1398	1456	1515
4	1573	1631	1690	1748	1806	1865	1923	1981	2040	2098
745	87 2156	2215	2273	2331	2389	2448	2506	2564	2622	2681
6	2739	2797	2855	2913	2972	3030	3088	3146	3204	3262
7	3321	3379	3437	3495	3553	3611	3669	3727	3785	3844
8	3902	3960	4018	4076	4134	4192	4250	4308	4366	4424
9	4482	4540	4598	4656	4714	4772	4830	4888	4945	5003

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
750	87 5061	5119	5177	5235	5293	5351	5409	5466	5524	5582
1	5640	5698	5756	5813	5871	5929	5987	6045	6102	6160
2	6218	6276	6333	6391	6449	6507	6564	6622	6680	6737
3	6795	6853	6910	6968	7026	7083	7141	7199	7256	7314
4	7371	7429	7487	7544	7602	7659	7717	7774	7832	7889
755	87 7947	8004	8062	8119	8177	8234	8292	8349	8407	8464
6	8522	8579	8637	8694	8752	8809	8866	8924	8981	9039
7	9096	9153	9211	9268	9325	9383	9440	9497	9555	9612
8	9669	9726	9784	9841	9898	9956	*0013	*0070	*0127	*0185
9	88 0242	0299	0356	0413	0471	0528	0585	0642	0699	0756
760	88 0814	9871	0928	0985	1942	1099	1156	1213	1271	1328
1	1385	1442	1499	1556	1613	1670	1727	1784	1841	1898
2	1955	2012	2069	2126	2183	2240	2297	2354	2411	2468
3	2525	2581	2638	2695	2752	2809	2866	2923	2980	3037
4	3093	3150	3207	3264	3321	3377	3434	3491	3548	3605
765	88 3661	3718	3775	3822	3888	3945	4002	4059	4115	4172
6	4229	4285	4342	4399	4455	4512	4569	4625	4682	4739
7	4795	4852	4909	4965	5022	5078	5135	5192	5248	5305
8	5361	5418	5474	5531	5587	5644	5700	5757	5813	5870
9	5926	5983	6039	6096	6152	6209	6265	6321	6378	6434
770	88 6491	6547	6604	6660	6716	6773	6829	6885	6942	6998
1	7054	7111	7167	7223	7280	7336	7392	7449	7505	7561
2	7617	7674	7730	7786	7842	7898	7955	8011	8067	8123
3	8179	8236	8292	8348	8404	8460	8516	8573	8629	8685
4	8741	8797	8853	8909	8965	9021	9077	9134	9190	9246
775	88 9302	9358	9414	9470	9526	9582	9638	9694	9750	9806
6	9862	9918	9974	*0030	*0086	*0141	*0197	*0253	*0309	*0365
7	89 0421	0477	0533	0589	0645	0700	0756	0812	0868	0924
8	0980	1035	1091	1147	1203	1259	1314	1370	1426	1482
9	1537	1593	1649	1705	1760	1816	1872	1928	1983	2039
780	89 2095	2150	2206	2262	2317	2373	2429	2484	2540	2595
1	2651	2707	2762	2818	2873	2929	2985	3040	3096	3151
2	3207	3262	3318	3373	3429	3484	3540	3595	3651	3706
3	3762	3817	3873	3928	3984	4039	4094	4150	4205	4261
4	4316	4371	4427	4482	4538	4593	4648	4704	4759	4814
785	89 4870	4925	4980	5036	5091	5146	5201	5257	5312	5367
6	5423	5478	5533	5588	5644	5699	5754	5809	5864	5920
7	5975	6030	6085	6140	6195	6251	6306	6361	6416	6471
8	6526	6581	6636	6692	6747	6802	6857	6912	6967	7022
9	7077	7132	7187	7242	7297	7352	7407	7462	7517	7572
790	89 7627	7682	7737	7792	7847	7902	7957	8012	8067	8122
1	8176	8231	8286	8341	8396	8451	8506	8561	8615	8670
2	8725	8780	8835	8890	8944	8999	9054	9109	9164	9218
3	9273	9328	9383	9437	9492	9547	9602	9656	9711	9766
4	9821	9875	9930	9985	*0039	*0094	*0149	*0203	*0258	*0312
795	90 0367	0422	0476	0531	0586	0640	0695	0749	0804	0859
6	0913	0968	1022	1077	1131	1186	1240	1295	1349	1404
7	1458	1513	1567	1622	1676	1731	1785	1840	1894	1948
8	2003	2057	2112	2166	2221	2275	2329	2384	2438	2492
9	2547	2601	2655	2710	2764	2818	2873	2927	2981	3036

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
800	90 3090	3144	3199	3253	3307	3361	3416	3470	3524	3578
1	3633	3687	3741	3795	3849	3904	3958	4012	4066	4120
2	4174	4229	4283	4337	4391	4445	4499	4553	4607	4661
3	4716	4770	4824	4878	4932	4986	5040	5094	5148	5202
4	5256	5310	5364	5418	5472	5526	5580	5634	5688	5742
805	90 5796	5850	5904	5958	6012	6066	6119	6173	6227	6281
6	6335	6389	6443	6497	6551	6604	6658	6712	6766	6820
7	6874	6927	6981	7035	7089	7143	7196	7250	7304	7358
8	7411	7465	7519	7573	7626	7680	7734	7787	7841	7895
9	7949	8002	8056	8110	8163	8217	8270	8324	8378	8431
810	90 8485	8539	8592	8646	8699	8753	8807	8860	8914	8967
1	9021	9074	9128	9181	9235	9289	9342	9396	9449	9503
2	9556	9610	9663	9716	9770	9823	9877	9930	9984	*0037
3	91 0091	0144	0197	0251	0304	0358	0411	0464	0518	0571
4	0624	0678	0731	0784	0838	0891	0944	0998	1051	1104
815	91 1158	1211	1264	1317	1371	1424	1477	1530	1584	1637
6	1690	1743	1797	1850	1903	1956	2009	2063	2116	2169
7	2222	2275	2328	2381	2435	2488	2541	2594	2647	2700
8	2753	2806	2859	2913	2966	3019	3072	3125	3178	3231
9	3284	3337	3390	3443	3496	3549	3602	3655	3708	3761
820	91 3814	3867	3920	3973	4026	4079	4132	4184	4237	4290
1	4343	4396	4449	4502	4555	4608	4660	4713	4766	4819
2	4872	4925	4977	5030	5083	5136	5189	5241	5294	5347
3	5400	5453	5505	5558	5611	5664	5716	5769	5822	5875
4	5927	5980	6033	6085	6138	6191	6243	6296	6349	6401
825	91 6454	6507	6559	6612	6664	6717	6770	6822	6875	6927
6	6980	7033	7085	7138	7190	7243	7295	7348	7400	7453
7	7506	7558	7611	7663	7716	7768	7820	7873	7925	7978
8	8030	8083	8135	8188	8240	8293	8345	8397	8450	8502
9	8555	8607	8659	8712	8764	8816	8869	8921	8973	9026
830	91 9078	9130	9183	9235	9287	9340	9392	9444	9496	9549
1	9601	9653	9706	9758	9810	9862	9914	9967	*0019	*0071
2	92 0123	0176	0228	0280	0332	0384	0436	0489	0541	0593
3	0645	0697	0749	0801	0853	0906	0958	1010	1062	1114
4	1166	1218	1270	1322	1374	1426	1478	1530	1582	1634
835	92 1686	1738	1790	1842	1894	1946	1998	2050	2102	2154
6	2206	2258	2310	2362	2414	2466	2518	2570	2622	2674
7	2725	2777	2829	2881	2933	2985	3037	3089	3140	3192
8	3244	3296	3348	3399	3451	3503	3555	3607	3658	3710
9	3762	3814	3865	3917	3969	4021	4072	4124	4176	4228
840	92 4279	4331	4383	4434	4486	4538	4589	4641	4693	4744
1	4796	4848	4899	4951	5003	5054	5106	5157	5209	5261
2	5312	5364	5415	5467	5518	5570	5621	5673	5725	5776
3	5828	5879	5931	5982	6034	6085	6137	6188	6240	6291
4	6342	6394	6445	6497	6548	6600	6651	6702	6754	6805
845	92 6857	6908	6959	7011	7062	7114	7165	7216	7268	7319
6	7370	7422	7473	7524	7576	7627	7678	7730	7781	7832
7	7883	7935	7986	8037	8088	8140	8191	8242	8293	8345
8	8396	8447	8498	8549	8601	8652	8703	8754	8805	8857
9	8908	8959	9010	9061	9112	9163	9215	9266	9317	9368

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
850	92 9419	9470	9521	9572	9623	9674	9725	9776	9827	9879
1	9930	9981	*0032	*0083	*0134	*0185	*0236	*0287	*0338	*0389
2	93 0440	0491	0542	0592	0643	0694	0745	0796	0847	0898
3	0949	1000	1051	1102	1153	1204	1254	1305	1356	1407
4	1458	1509	1560	1610	1661	1712	1763	1814	1865	1915
855	93 1966	2017	2068	2118	2169	2220	2271	2322	2372	2423
6	2474	2524	2575	2626	2677	2727	2778	2829	2879	2930
7	2981	3031	3082	3133	3183	3234	3285	3335	3386	3437
8	3847	3538	3589	3639	3690	3740	3791	3841	3892	3943
9	3993	4044	4094	4145	4195	4296	4347	4296	4387	4448
860	93 4498	4549	4599	4650	4700	4751	4801	4852	4902	4953
1	5003	5054	5104	5154	5205	5225	5306	5356	5406	5457
2	5507	5558	5608	5658	5709	5759	5809	5860	5910	5960
3	6011	6061	6111	6162	6212	6262	6313	6363	6413	6463
4	6514	6564	6614	6665	6715	6765	6815	6865	6916	6966
865	93 7016	7066	7117	7167	7217	7267	7317	7367	7418	7468
6	7518	7568	7618	7668	7718	7769	7819	7869	7919	7969
7	8019	8069	8119	8169	8219	8269	8320	8370	8420	8470
8	8520	8570	8620	8670	8720	8770	8820	8870	8920	8970
9	9020	9070	9120	9170	9220	9270	9320	9369	9419	9469
870	93 9519	9569	9619	9669	9719	9769	9819	9869	9918	9968
1	94 0018	0068	0118	0168	0218	0267	0317	0367	0417	0467
2	0516	0566	0616	0666	0716	0765	0815	0865	0915	0964
3	1014	1064	1114	1163	1213	1263	1313	1362	1412	1462
4	1511	1561	1611	1660	1710	1760	1809	1859	1909	1958
875	94 2008	2058	2107	2157	2207	2256	2306	2355	2405	2455
6	2504	2554	2603	2653	2702	2752	2801	2851	2901	2950
7	3000	3049	3099	3148	3198	3247	3297	3346	3396	3445
8	3495	3544	3593	3643	3692	3742	3791	3841	3890	3939
9	3989	4038	4088	4137	4186	4236	4285	4335	4384	4433
880	94 4483	4532	4581	4631	4680	4729	4779	4828	4877	4927
1	4976	5025	5074	5124	5173	5222	5272	5321	5370	5419
2	5469	5518	5567	5616	5665	5715	5764	5813	5862	5912
3	5961	6010	6059	6108	6157	6207	6256	6305	6354	6403
4	6452	6501	6551	6600	6649	6698	6747	6796	6845	6894
885	94 6943	6992	7041	7090	7140	7189	7238	7287	7336	7385
6	7434	7483	7532	7581	7630	7679	7728	7777	7826	7875
7	7924	7973	8022	8070	8119	8168	8217	8266	8315	8364
8	8413	8462	8511	8560	8609	8657	8706	8755	8804	8853
9	8902	8951	8999	9048	9097	9146	9195	9244	9292	9341
890	94 9390	9439	9488	9536	9585	9634	9683	9731	9780	9829
1	9878	9926	9975	*0024	*0073	*0121	*0170	*0219	*0267	*0316
2	95 0365	0414	0462	0511	0560	0608	0657	0706	0754	0803
3	0851	0900	0949	0997	1046	1095	1143	1192	1240	1289
4	1338	1386	1435	1483	1532	1580	1629	1677	1726	1775
895	95 1823	1872	1920	1929	2017	2066	2114	2163	2211	2260
6	2308	2356	2405	2453	2502	2550	2599	2647	2696	2744
7	2792	2841	2889	2938	2986	3034	3083	3131	3180	3228
8	3276	3325	3373	3421	3470	3518	3566	3615	3663	3711
9	3760	3808	3856	3905	3953	4001	4049	4098	4146	4194

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	95 4243	4291	4339	4387	4435	4484	4532	4580	4628	4677
1	4725	4773	4821	4869	4918	4966	5014	5062	5110	5158
2	5207	5255	5303	5351	5399	5447	5495	5543	5592	5640
3	5688	5736	5784	5832	5880	5928	5976	6024	6072	6120
4	6168	6216	6265	6313	6361	6409	6457	6505	6553	6601
905	95 6642	6697	6745	6793	6840	6888	6936	6984	7032	7080
6	7128	7176	7224	7272	7320	7368	7416	7464	7512	7559
7	7607	7655	7703	7751	7799	7847	7894	7942	7990	8038
8	8086	8134	8181	8229	8277	8325	8373	8421	8468	8516
9	8564	8612	8659	8707	8755	8803	8850	8898	8946	8994
910	95 9041	9089	9137	9185	9232	9280	9328	9375	9423	9471
1	9518	9566	9614	9661	9709	9757	9804	9852	9900	9947
2	9995	*0042	*0090	*0138	*0185	*0233	*0280	*0328	*0376	*0423
3	96 0471	0518	0566	0613	0661	0709	0756	0804	0851	0899
4	0946	0994	1041	1089	1136	1184	1231	1279	1326	1374
915	96 1421	1469	1516	1563	1611	1658	1706	1753	1801	1848
6	1895	1943	1990	2038	2085	2132	2180	2227	2275	2322
7	2369	2417	2464	2511	2559	2606	2653	2701	2748	2795
8	2843	2890	2937	2985	3032	3079	3126	3174	3221	3268
9	3316	3363	3410	3457	3504	3552	3599	3646	3693	3741
920	96 3788	3835	3882	3929	3977	4024	4071	4118	4165	4212
1	4260	4307	4354	4401	4448	4495	4542	4590	4637	4684
2	4731	4778	4825	4872	4919	4966	5013	5061	5108	5155
3	5202	5249	5296	5443	5390	5437	5484	5531	5578	5625
4	5672	5719	5766	5813	5860	5907	5954	6001	6048	6095
925	96 6142	6189	6236	6283	6329	6376	6423	6470	6517	6564
6	6611	6658	6705	6752	6799	6845	6892	6939	6986	7023
7	7080	7127	7173	7220	7267	7314	7361	7408	7454	7501
8	7548	7595	7642	7688	7735	7782	7829	7875	7922	7969
9	8016	8062	8109	8156	8203	8249	8296	8343	8390	8436
930	96 8483	8530	8576	8623	8670	8716	8763	8810	8856	8903
1	8950	8996	9043	9090	9136	9183	9229	9276	9323	9369
2	9416	9463	9509	9556	9602	9649	9695	9742	9789	9835
3	9882	9928	9975	*0021	*0068	*0114	*0161	*0207	*0254	*0300
4	97 0347	0393	0440	0486	0533	0579	0626	0672	0719	0765
935	97 0812	0858	0904	0951	0997	1044	1090	1137	1183	1229
6	1276	1322	1369	1415	1461	1503	1554	1601	1647	1693
7	1740	1786	1832	1879	1925	1971	2018	2064	2110	2157
8	2203	2249	2295	2342	2388	2434	2481	2527	2573	2619
9	2666	2712	2758	2804	2851	2897	2943	2989	3035	3082
940	97 3128	3174	3220	3266	3313	3359	3405	3451	3497	3543
1	3590	3636	3682	3728	3774	3820	3866	3913	3959	4005
2	4051	4097	4143	4189	4235	4281	4327	4374	4420	4466
3	4512	4558	4604	4650	4696	4742	4788	4834	4880	4926
4	4972	5018	5064	5110	5156	5202	5248	5294	5340	5386
945	97 5432	5478	5524	5570	5616	5662	5707	5753	5799	5815
6	5891	5937	5983	6029	6075	6121	6167	6212	6258	6304
7	6350	6396	6442	6488	6533	6579	6625	6671	6717	6763
8	6808	6854	6900	6946	6992	7037	7083	7129	7175	7220
9	7266	7312	7358	7403	7449	7495	7541	7586	7632	7673

(*continúa*)

Tabla I MANTISAS Logaritmos base 10 (*continuación*)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
950	97 7724	7769	7815	7861	7906	7952	7998	8043	8089	8135
1	8181	8226	8272	8317	8363	8409	8454	8500	8546	8591
2	8637	8683	8728	8774	8819	8865	8911	8956	9002	9047
3	9093	9138	9184	9230	9275	9321	9366	9412	9457	9503
4	9548	9594	9639	9685	9730	9776	9821	9867	9912	9958
955	98 0003	0049	0094	0140	0185	0231	0276	0322	0367	0412
6	0458	0503	0549	0594	0640	0685	0730	0776	0821	0867
7	0912	0957	1003	1048	1093	1139	1184	1229	1275	1320
8	1366	1411	1456	1501	1547	1592	1637	1683	1728	1773
9	1819	1864	1909	1954	2000	2045	2090	2135	2181	2226
960	98 2271	2316	2362	2407	2452	2497	2543	2588	2633	2678
1	2723	2769	2814	2859	2904	2949	2994	3040	3085	3130
2	3175	3220	3265	3310	3356	3401	3446	3491	3536	3581
3	3626	3671	3716	3762	3807	3852	3897	3942	3987	4032
4	4077	4122	4167	4212	4257	4302	4347	4392	4437	4482
965	98 4527	4572	4617	4662	4707	4752	4797	4842	4887	4932
6	4977	5022	5067	5112	5157	5202	5247	5292	5337	5382
7	5426	5471	5516	5561	5606	5651	5696	5741	5786	5830
8	5875	5920	5965	6010	6055	6100	6144	6189	6234	6279
9	6324	6369	6413	6458	6503	6548	6593	6637	6682	6727
970	98 6772	6817	6861	6906	6951	6996	7040	7085	7130	7125
1	7219	7264	7309	7353	7398	7443	7488	7532	7577	7622
2	7666	7711	7756	7800	7845	7890	7934	7979	8024	8068
3	8113	8157	8202	8247	8291	8336	8381	8425	8470	8514
4	8559	8604	8648	8693	8737	8782	8826	8871	8916	8960
975	98 9005	9049	9094	9138	9183	9227	9372	9316	9361	9405
6	9450	9494	9539	9583	9628	9672	9717	9761	9806	9850
7	9895	9939	9983	*0028	*0072	*0117	*0161	*0206	*0250	*0294
8	99 0339	0383	0428	0472	0516	0561	0605	0650	0694	0738
9	0783	0827	0871	0916	0960	1004	1049	1093	1137	1182
980	99 1226	1270	1315	1359	1403	1448	1492	1536	1580	1625
1	1669	1713	1758	1802	1846	1890	1935	1979	2023	2067
2	2111	2156	2200	2244	2288	2333	2377	2421	2465	2509
3	2554	2598	2642	2686	2730	2774	2819	2863	2907	2951
4	2995	3039	3083	3127	3172	3216	3260	3304	3348	3392
985	99 3436	3480	3524	3568	3613	3657	3701	3745	3789	3833
6	3877	3921	3965	4009	4053	4097	4141	4185	4229	4273
7	4317	4361	4405	4449	4493	4357	4581	4625	4669	4713
8	4757	4801	4845	4889	4933	4977	5021	5065	5108	5152
9	5196	5240	5284	5328	5372	5416	5460	5504	5547	5591
990	995635	5679	5723	5767	5811	5854	5898	5942	5986	6030
1	6074	6117	6161	6205	6249	6293	6337	6380	6424	6468
2	6512	6555	6599	6643	6687	6731	6774	6818	6862	6906
3	6949	6993	7037	7080	7124	7168	7212	7255	7299	7343
4	7386	7430	7474	7517	7561	7605	7648	7692	7736	7779
995	99 7823	7867	7910	7954	7998	8041	8085	8129	8172	8216
6	8259	8303	8347	8390	8434	8477	8521	8564	8609	8652
7	8695	8739	8782	8826	8869	8913	8956	9000	9043	9087
8	9131	9174	9218	9261	9305	9348	9392	9435	9479	9522
9	9565	9609	9652	9696	9739	9783	9826	9870	9913	9957

Tabla II Tabla de mortalidad de hombres, México, 2010

Edad	v_x	m_x	1 000 q_x	D_x	N_x	Edad
0	100 000	1 571	15.710	100 000.0	2 162 583.2	0
1	98 429	139	1.412	94 190.4	2 062 583.2	1
2	98 290	66	0.671	90 007.1	1 968 392.8	2
3	98 224	44	0.448	86 073.4	1 878 385.7	3
4	98 180	35	0.356	82 330.0	1 792 312.4	4
5	98 145	30	0.306	78 756.6	1 709 982.4	5
6	98 115	27	0.275	75 342.1	1 631 225.8	6
7	98 088	26	0.265	72 077.9	1 555 883.8	7
8	98 062	26	0.265	68 955.7	1 483 805.9	8
9	98 035	27	0.275	65 968.2	1 414 850.2	9
10	98 008	29	0.296	63 110.1	1 348 882.0	10
11	97 979	32	0.327	60 374.5	1 285 771.9	11
12	97 947	35	0.357	57 755.8	1 225 397.4	12
13	97 911	40	0.409	55 248.4	1 167 641.6	13
14	97 871	46	0.470	52 847.7	1 112 393.2	14
15	97 826	53	0.542	50 548.7	1 059 545.5	15
16	97 772	62	0.634	48 345.3	1 008 996.8	16
17	97 710	72	0.737	46 234.1	960 651.5	17
18	97 638	84	0.860	44 210.5	914 417.5	18
19	97 554	95	0.974	42 270.3	870 206.9	19
20	97 459	107	1.098	40 410.7	827 936.6	20
21	97 352	118	1.212	38 628.0	787 525.9	21
22	97 234	129	1.327	36 919.8	748 897.9	22
23	97 105	138	1.421	35 283.1	711 978.1	23
24	96 967	147	1.516	33 715.8	676 694.9	24
25	96 820	155	1.601	32 215.0	642 979.2	25
26	96 666	161	1.666	30 778.7	610 764.2	26
27	96 504	168	1.741	29 403.9	579 985.5	27
28	96 337	173	1.796	28 089.0	550 581.6	28
29	96 163	179	1.861	26 830.9	522 492.5	29
30	95 984	185	1.927	25 627.7	495 661.6	30
31	95 799	191	1.994	24 476.9	470 033.9	31
32	95 608	198	2.071	23 376.1	445 557.0	32
33	95 411	205	2.149	22 323.4	422 180.9	33
34	95 205	214	2.248	21 316.0	399 857.4	34
35	94 991	224	2.358	20 352.2	378 541.4	35
36	94 767	235	2.480	19 429.9	358 189.2	36
37	94 532	247	2.613	18 547.1	338 759.3	37
38	94 285	262	2.779	17 702.1	320 212.2	38
39	94 023	277	2.946	16 892.7	302 510.1	39
40	93 746	295	3.147	16 117.6	285 617.4	40
41	93 451	314	3.360	15 375.0	269 499.8	41
42	93 136	336	3.608	14 663.4	254 124.8	42
43	92 801	359	3.868	13 981.4	239 461.4	43
44	92 441	385	4.165	13 327.5	225 480.0	44
45	92 056	413	4.486	12 700.4	212 152.5	45

(continúa)

Tabla II Tabla de mortalidad de hombres, México, 2010 (*continuación*)

Edad	v_x	m_x	1 000 q_x	D_x	N_x	Edad
46	91 644	443	4.834	12 099.1	199 452.0	46
47	91 201	475	5.208	11 522.2	187 352.9	47
48	90 726	510	5.621	10 968.6	175 830.7	48
49	9 0216	548	6.074	10 437.2	164 862.2	49
50	8 9668	588	6.558	9 927.1	154 424.9	50
51	89 080	631	7.084	9 437.3	144 497.8	51
52	88 450	677	7.654	8 967.1	135 060.5	52
53	87 773	725	8.260	8 515.3	126 093.4	53
54	87 048	777	8.926	8 081.3	117 578.2	54
55	86 271	832	9.644	7 664.2	109 496.9	55
56	85 439	891	10.428	7 263.5	101 832.7	56
57	84 547	954	11.284	6 878.1	94 569.2	57
58	83 594	1 020	12.202	6 507.7	87 691.1	58
59	82 574	1 089	13.188	6 151.5	81 183.3	59
60	81 485	1 162	14.260	5 809.0	75 031.8	60
61	80 323	1 239	15.425	5 479.6	69 222.8	61
62	79 084	1 318	16.666	5 162.7	63 743.3	62
63	77 766	1 402	18.028	4 858.1	58 580.6	63
64	76 365	1 488	19.485	4 565.1	53 722.5	64
65	74 877	1 577	21.061	4 283.4	49 157.4	65
66	73 300	1 669	22.769	4 012.6	44 874.0	66
67	71 631	1 763	24.612	3 752.4	40 861.3	67
68	69 868	1 858	26.593	3 502.4	37 108.9	68
69	68 010	1 955	28.746	3 262.5	33 606.5	69
70	66 056	2 051	31.049	3 032.3	30 344.0	70
71	64 004	2 148	33.560	2 811.6	27 311.7	71
72	61 857	2 242	36.245	2 600.3	24 500.1	72
73	59 615	2 334	39.151	2 398.1	21 899.9	73
74	57 280	2 423	42.301	2 204.9	19 501.8	74
75	54 858	2 506	45.682	2 020.8	17 296.8	75
76	52 352	2 572	49.129	1 845.4	15 276.1	76
77	49 780	2 630	52.832	1 679.2	13 430.6	77
78	47 150	2 678	56.797	1 522.0	11 751.4	78
79	44 471	2 715	61.051	1 373.7	10 229.5	79
80	41 757	2 739	65.594	1 234.3	8 855.8	80
81	39 018	2 748	70.429	1 103.7	7 621.5	81
82	36 270	2 743	75.627	981.8	6 517.8	82
83	33 527	2 721	81.158	868.4	5 536.0	83
84	30 806	2 682	87.061	763.6	4 667.5	84
85	28 125	2 629	93.476	667.1	3 903.9	85
86	25 496	2 562	100.486	578.7	3 236.8	86
87	22 934	2 480	108.136	498.2	2 658.1	87
88	20 455	2 382	116.451	425.2	2 159.9	88
89	18 073	2 269	125.546	359.5	1 734.8	89
90	15 803	2 141	135.481	300.8	1 375.3	90
91	13 662	1 999	146.318	248.8	1 074.5	91

(*continúa*)

Tabla II Tabla de mortalidad de hombres, México, 2010 (*continuación*)

Edad	v_x	m_x	1 000 q_x	D_x	N_x	Edad
92	11 663	1 844	158.107	203.3	825.6	92
93	9 819	1 684	171.504	163.8	622.4	93
94	8 135	1 514	186.109	129.8	458.6	94
95	6 621	1 337	201.933	101.1	328.7	95
96	5 285	1 158	219.111	77.2	227.6	96
97	4 127	981	237.703	57.7	150.4	97
98	3 146	811	257.788	42.1	92.6	98
99	2 335	653	279.657	29.9	50.5	99
100	1 682	1 682	1 000.000	20.6	20.6	100

Adaptada de Alejandro Mina Valdés, El Colegio de México, "La obtención y proyección de tablas de mortalidad empleando curvas Spline", X Reunión Nacional de Investigación Demográfica en México, México, D.F., 3-6 de noviembre de 2010, México: *Tabla de vida por sexo y edad desplegada,* 2010.

Tabla III Tabla de mortalidad de mujeres, México, 2010

Edad	v_x	m_x	1 000 q_x	D_x	N_x	Edad
0	100 000	1 254	12.540	100 000.0	2 199 656.1	0
1	98 746	111	1.124	94 493.8	2 099 656.1	1
2	98 635	60	0.608	90 323.0	2 005 162.3	2
3	98 575	41	0.416	86 380.9	1 914 839.3	3
4	98 534	32	0.325	82 626.8	1 828 458.4	4
5	98 503	26	0.264	79 043.8	1 745 831.6	5
6	98 477	22	0.223	75 620.1	1 666 787.7	6
7	98 454	20	0.203	72 346.8	1 591 167.7	7
8	98 434	19	0.193	69 217.3	1 518 820.9	8
9	98 416	18	0.183	66 224.6	1 449 603.5	9
10	98 398	18	0.183	63 361.2	1 383 379.0	10
11	98 380	19	0.193	60 621.6	1 320 017.8	11
12	98 361	20	0.203	57 999.9	1 259 396.1	12
13	98 341	22	0.224	55 491.0	1 201 396.2	13
14	98 319	25	0.254	53 089.6	1 145 905.2	14
15	98 294	27	0.275	50 790.5	1 092 815.6	15
16	98 267	30	0.305	48 590.0	1 042 025.1	16
17	98 237	33	0.336	46 483.4	993 435.0	17
18	98 204	35	0.356	44 466.8	946 951.6	18
19	98 170	36	0.367	42 537.2	902 484.8	19
20	98 133	38	0.387	40 690.1	859 947.6	20
21	98 096	39	0.398	38 923.3	819 257.4	21
22	98 056	40	0.408	37 232.0	780 334.2	22
23	98 016	41	0.418	35 614.1	743 102.2	23
24	97 975	43	0.439	34 066.2	707 488.1	24
25	97 932	44	0.449	32 585.0	673 421.8	25
26	97 888	46	0.470	31 167.8	640 836.9	26
27	97 842	48	0.491	29 811.6	609 669.1	27
28	97 794	51	0.522	28 513.9	579 857.5	28
29	97 743	54	0.552	27 271.8	551 343.6	29
30	97 688	58	0.594	26 082.7	524 071.8	30
31	97 630	63	0.645	24 944.7	497 989.1	31
32	97 567	68	0.697	23 855.1	473 044.4	32
33	97 499	74	0.759	22 812.0	449 189.3	33
34	97 425	80	0.821	21 813.1	426 377.4	34
35	97 345	88	0.904	20 856.6	404 564.3	35
36	97 257	96	0.987	19 940.4	383 707.7	36
37	97 161	105	1.081	19 062.9	363 767.3	37
38	97 056	115	1.185	18 222.3	344 704.4	38
39	96 941	127	1.310	17 417.0	326 482.1	39
40	96 814	139	1.436	16 645.1	309 065.1	40
41	96 676	152	1.572	15 905.6	292 420.0	41
42	96 523	167	1.730	15 196.6	276 514.4	42
43	96 356	184	1.910	14 517.0	261 317.8	43
44	96 172	202	2.100	13 865.4	246 800.7	44
45	95 971	221	2.303	13 240.6	232 935.3	45

(*continúa*)

Tabla III Tabla de mortalidad de mujeres, México, 2010 (*continuación*)

Edad	v_x	m_x	1 000 q_x	D_x	N_x	Edad
46	95 749	242	2.527	12 641.1	219 694.8	46
47	95 507	266	2.785	12 066.2	207 053.7	47
48	95 241	291	3.055	11 514.4	194 987.5	48
49	94 950	319	3.360	10 984.9	183 473.1	49
50	94 631	349	3.688	10 476.6	172 488.2	50
51	94 283	381	4.041	9 988.6	162 011.6	51
52	93 901	417	4.441	9 519.7	152 023.0	52
53	93 484	455	4.867	9 069.3	142 503.3	53
54	93 029	497	5.342	8 636.5	133 434.0	54
55	92 532	542	5.857	8 220.5	124 797.5	55
56	91 990	591	6.425	7 820.4	116 577.1	56
57	91 399	645	7.057	7 435.5	108 756.7	57
58	90 754	703	7.746	7 065.1	101 321.1	58
59	90 051	766	8.506	6 708.5	94 256.0	59
60	89 285	833	9.330	6 365.0	87 547.5	60
61	88 452	906	10.243	6 034.1	81 182.4	61
62	87 546	984	11.240	5 715.1	75 148.3	62
63	86 562	1 068	12.338	5 407.6	69 433.2	63
64	85 495	1 157	13.533	5 110.9	64 025.6	64
65	84 337	1 253	14.857	4 824.6	58 914.7	65
66	83 085	1 354	16.297	4 548.3	54 090.1	66
67	81 730	1 461	17.876	4 281.4	49 541.8	67
68	80 269	1 575	19.622	4 023.8	45 260.4	68
69	78 694	1 693	21.514	3 775.0	41 236.6	69
70	77 001	1 818	23.610	3 534.7	37 461.6	70
71	75 183	1 946	25.884	3 302.7	33 926.8	71
72	73 237	2 079	28.387	3 078.6	30 624.2	72
73	71 158	2 215	31.128	2 862.4	27 545.5	73
74	68 943	2 353	34.130	2 653.9	24 683.1	74
75	66 590	2 491	37.408	2 452.9	22 029.2	75
76	64 099	2 615	40.796	2 259.5	19 576.3	76
77	61 484	2 734	44.467	2 074.0	17 316.8	77
78	58 750	2 847	48.460	1 896.4	15 242.8	78
79	55 904	2 950	52.769	1 726.9	13 346.3	79
80	52 953	3 043	57.466	1 565.3	11 619.5	80
81	49 910	3 122	62.553	1 411.8	10 054.2	81
82	46 788	3 183	68.030	1 266.5	8 642.4	82
83	43 605	3 226	73.982	1 129.5	7 376.0	83
84	40 379	3 246	80.388	1 000.9	6 246.5	84
85	37 134	3 245	87.386	880.8	5 245.6	85
86	33 889	3 220	95.016	769.2	4 364.8	86
87	30 669	3 169	103.329	666.2	3 595.5	87
88	27 500	3 091	112.400	571.6	2 929.4	88
89	24 409	2 985	122.291	485.5	2 357.7	89
90	21 424	2 851	133.075	407.8	1 872.2	90
91	18 573	2 689	144.780	338.3	1 464.4	91

(*continúa*)

Tabla III Tabla de mortalidad de mujeres, México, 2010 (*continuación*)

Edad	v_x	m_x	1 000 q_x	D_x	N_x	Edad
92	15 883	2 503	157.590	276.8	1 126.2	92
93	13 381	2 287	170.914	223.2	849.3	93
94	11 093	2 058	185.522	177.1	626.1	94
95	9 035	1 819	201.328	138.0	449.1	95
96	7 216	1 577	218.542	105.5	311.1	96
97	5 639	1 337	237.099	78.9	205.6	97
98	4 302	1 107	257.322	57.6	126.7	98
99	3 194	892	279.274	40.9	69.1	99
100	2 303	2 303	1 000.000	28.2	28.2	100

Adaptada de Alejandro Mina Valdés, El Colegio de México, "La obtención y proyección de tablas de mortalidad empleando curvas Spline", X Reunión Nacional de Investigación Demográfica en México, México, D.F., 3-6 de noviembre de 2010, México: *Tabla de vida por sexo y edad desplegada,* 2010.

Índice analítico

A

B

C

D